

モノドロミー群が可約な大久保型方程式

城西大 土屋 進 (Susumu Tsuchiya)

一般に有関数係数の連立一階線形常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (t \in S: \text{リーマン球面})$$

$A(t)$: 有理関数を成分とする n 次正方行列

のモノドロミー群が可約であるとき、方程式自身が可約である（すなわち次のような $R(t)$ が存在する）ことは知られているが、ここでは大久保型方程式についてその構成的な証明を与える。

$R(t)$ は有理関数を成分とし、行列式が 0 でない n 次正方行列で、 x に変換 “ $x = R(t)y$ ” を施すと上の方程式は

$$\frac{dy}{dt} = B(t)y$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & 0 \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix}$$

のかたちになる。

さて連立常微分方程式

$$(tI - B) \frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{---} (*)$$

I : d 次単位行列

B : 定数係数の d 次対角行列 ($= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$)

A : 定数係数の d 次正方行列

x : d 次元列ベクトル

を考える。 A は次の条件を満たすものとする。

(i) A は対角化可能で、その固有値を $\rho_1, \dots, \rho_d$ とするとき、各 ρ_j ($j=1, \dots, d$) は負の整数でなく、 ρ_j と ρ_k が異なるとき $\rho_j - \rho_k$ は整数でない。

(ii) B の対角成分を等しいものをまとめて並べておき、最初の m_1 個、次の m_2 個、 $\dots$ 、 m_r 個が等しいとするとき、それに応じて A を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & \dots & A_{rr} \end{pmatrix}$$

$A_{ij} = (m_i, m_j)$ 行列

のように分けるとき、 $A_{11}, \dots, A_{rr}$ は対角行列である。そしてその対角成分 a_{ii} ($i=1, \dots, d$) は整数でなく、 a_{ii} と a_{jj} が共に A_{kk} の対角成分であるとき $a_{ii} -$

a_{jj} は整数でない。

最後に (*) が accessory parameter を持たないという

条件:

$$d^2 - d + 2 - \sum_{j=1}^r m_j^2 - \sum_{k=1}^s n_k^2 = 0$$

(ただし $n_1, \dots, n_s$ は A の固有値の重複度)

を置く。

以上の条件のもとで (*) は $\lambda_1, \dots, \lambda_d, \infty$ を特異点 (極又は分岐点) に持つ基本解 $X = (x_1, \dots, x_d)$ を持つ。

$\phi \in S^* = S - \{\lambda_1, \dots, \lambda_d, \infty\}$ を基点とする基本群

$\pi_1(S^*, \phi)$ の X に関するモノドロミー表現

$$\rho: \pi_1(S^*, \phi) \longrightarrow GL(d, \mathbb{C})$$

の像を G とする。

補助定理

モノドロミー群が可約 (i.e. $\mathbb{C}^d$ の p 次元部分空間 V で、

$\forall M \in G$ に対して $MV \subset V$ を満たすものが存在する)

$\Rightarrow \exists X^*: (*)$ の基本解

かつ X^* に関するモノドロミー表現の像 $G^* \ni \forall M^*$

$$M^* = \left(\begin{array}{cc} * & 0 \\ * & \underbrace{*}_{p} \end{array} \right) \Bigg\} p$$

証明. $\mathbb{C}^d$ の基底 $\{v_1, \dots, v_d\}$ を $\{v_{d-p+1}, \dots, v_d\}$ が V の基底になるように選んでおき

$$v_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ \vdots \\ v_{dj} \end{pmatrix} \quad (j=1, \dots, d)$$

と表わして、

$$x_j^* = \sum_{i=1}^d v_{ij} x_i \quad (j=1, \dots, d)$$

と定め、 $X^* = (x_1^*, \dots, x_d^*)$ とおけばよい。 [証明終]

定理

(*) のモノドロミー群が可約であれば、微分方程式 (*) 自身が可約である

証明. (*) のモノドロミー群が p 次元の不変部分空間を持つとして、補助定理で得られに (*) の基本解を $X = (x_1, \dots, x_d)$ とする。

$$x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{dj} \end{pmatrix} \quad (j=1, \dots, d)$$

とあくと行列

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x_{1, d-p+1} & \dots & x_{1, d} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{d, d-p+1} & \dots & x_{d, d} \end{pmatrix}$$

の rank は p であるから、この行列の適当な p 行を選んで作った小行列 U は正則行列である。そして $\tilde{X} U^{-1}$ は S 上の有理関数を成分とする行列である。

実際、 $\tilde{X} U^{-1}$ が分岐する可能性があるのは、 $\lambda_1, \dots, \lambda_d, \infty$

のみである。一方 S^* 上の θ を基点とする任意の閉曲線 α を考え、そのホモトピー類 $[\alpha]$ に対応する G の元 M_α は

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

と表わせる。 α に沿って $\tilde{X}$ を解析接続すると $\tilde{X}M_{22}$ となる。同様に U を解析接続するとやはり UM_{22} となるから、 $\tilde{X}U^{-1}$ は α に沿って解析接続しても変化しない。すなわち $\tilde{X}U^{-1}$ の成分は分岐点を持たないから有理関数である。

そこで $(d, d-p)$ 次定数行列 P を $R = (P \ \tilde{X}U^{-1})$ の行列式 $\det R \neq 0$ となるように選ぶ。例えば、 U が $\tilde{X}$ の最後の p 行である場合は $\tilde{X}U^{-1} = \begin{pmatrix} * \\ I \end{pmatrix}_{p \times p}$ であるから $P = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}_{(d-p) \times (d-p)}$

と選ぶが良い。そこで “ $x = Ry$ ” という変換を施すと

(*) は

$$\frac{dy}{dt} = R^{-1}(tI - B)^{-1}(AR - (tI - B)\frac{dR}{dt})y \quad (**)$$

となる。この y の係数を計算するために先ず $AR - (tI - B)\frac{dR}{dt}$ を計算すると

$$AR - (tI - B)\frac{dR}{dt} = (Q - (tI - B)\tilde{X}\frac{dU^{-1}}{dt})$$

$$\text{ただし } Q = AP - (tI - B)\frac{dP}{dt} = AP$$

であるから

$$\begin{aligned} & R^{-1}(tI-B)^{-1}(AR - (tI-B)\frac{dR}{dt}) \\ &= (R^{-1}(tI-B)^{-1}Q - R^{-1}\tilde{X}\frac{dU^{-1}}{dt}) \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} R^{-1}\tilde{X}\frac{dU^{-1}}{dt} &= R^{-1}\tilde{X}U^{-1}U\frac{dU^{-1}}{dt} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} U\frac{dU^{-1}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ U\frac{dU^{-1}}{dt} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

すなわち (**) は

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} y$$

の形にある。

(証明終)

上の証明の C_{ij} は一般に二位以上の極を持つ。一位の極のみを持つように出来るかはまだわかりません。

[参考文献]

大久保謙二郎: On the Group of Fuchsian Equations

都立大学数学教室セミナー報告