

球面上のトレーサ移流

榎本剛

要 旨

移流は、最も重要な大気の力学過程のひとつである。トレーサの時間発展を正確に再現するためには、精度の高い移流スキームを必要とする。著者は、簡便で高精度なスキームを提案し、これまでに球面上でガウス型の山を移流する実験で検証している。本研究では、本スキームを球面上の標準実験により詳細な検証を行う。検証の結果、コサインベルや溝付円柱のような滑らかでない分布についても精度よく移流でき、数値予報モデルや気候モデルで用いられている準3次内挿法の1/4の格子数で同じ精度を得ることができることが分った。さらに、混合特性にも秀でていることが明らかになった。精度の低下や計算コストの増大をほとんど伴わずに、波状のノイズはフィルタにより大部分を取り除くことができ、質量は全球で保存させることが可能である。

キーワード：セミ・ラグランジュ移流、内挿、球面調和函数

1. はじめに

対流圏では水蒸気、成層圏ではオゾンが輸送され、濃淡が生ずることにより、局所的な加熱を引き起こし、大循環を駆動している。大気の微量成分エアロゾルの分布形成にも、移流は重要な役割を果たしている。火山噴火に伴う噴煙や核実験・原子力発電所の事故に伴う放射性物質分布の時間発展において、移流は拡散や沈着と並ぶ重要な過程である。大気シミュレーションを正確に行うためには、精度の良い移流スキームは必須である。

移流の数値解法は、オイラー及びラグランジュの2つに大別することができる。オイラー移流は、格子点上での時間発展を計算する。ラグランジュ移流は、流体粒子を追跡する。セミ・ラグランジュ移流は、定期的（例えば毎時間ステップ）に格子上で流体粒子のサンプリングをやり直す。このようにすることで、ラグランジュ移流でありながら格子上での時間発展を得ることができる。

セミ・ラグランジュ移流は、時間刻み幅 Δt をクーラン数 $c\Delta t/\Delta x$ （ c は情報の伝達の速さ、 Δx は格子点間隔）を1より大きくしても安定であることが知られている。また、オイラー移流と比較して分散性が小さく、前線のような急峻な分布の移流に適している。しかし、消散性がありトレーサの保存を担保するには工夫が必要である。

セミ・ラグランジュ移流では、上流点探索と内挿が移流の精度を左右する。球面上の上流点探索については、大円上の等速移動を仮定した基本的な手法(Ritchie 1987)、Taylor展開を利用した経済的かつ高精度な手法(McGregor 1993)、加速度を考慮した手法(Hortal 2002)などが提案されている。本研究では、Ritchie (1987)の手法を採用し、精度に対する内挿法の影響について調べる。

本稿の構成は、以下の通りである。第2章でモデル、第3章で標準実験の概要について述べる。実験結果を第4章に示し、今後の課題について第5章で議論する。

2. モデル

この章では、本研究で用いられるオイラー移流モデル及びセミ・ラグランジュ移流モデル並びに、後者に必要な内挿法について述べる。

2.1 移流の計算手法

本研究で扱うのは、単位球面上でトレーサ q の保存を表す方程式

$$\frac{dq}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) q = 0 \quad (1)$$

である。ここで $\mathbf{v} = (u, v)$ は速度ベクトルで u, v はそれぞれ東向き及び北向きの風を表す。本研究では、(Ritchie 1987)に従って、オイラー移流モデル及びセ

ミ・ラグランジュ移流モデルを構築した。ただし、後者については、3つの時間レベルではなく、2つの時間レベルを用いた。

(1) オイラー移流

オイラー移流モデルは、式(1)の中辺を離散化して、

$$q(t + \Delta t) = q(t - \Delta t) - \frac{2\Delta t}{\cos^2 \theta} \left(U \frac{\partial q}{\partial \lambda} + V \cos \theta \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) \quad (2)$$

を各格子点上で積分する。ここで、 t は時刻、 Δt は時間刻み幅、 λ, θ はそれぞれ経度及び緯度、 $(U, V) = (u, v) \cos \theta$ は風像 (wind image) である。時刻を標記していない変数は、時刻 t における値を表す。水平微分は、スペクトル空間で計算する。

(2) セミ・ラグランジュ移流

セミ・ラグランジュ移流モデルでは、格子点 g に到着する流体粒子を大円上で流れを遡って探索し、上流点 r を決定する。上流点 r におけるトレーサの値がそのまま次の時刻の格子点 g におけるトレーサの値となる。

$$q(g, t + \Delta t) = q(r, t) \quad (3)$$

上流点 r は格子点上であるとは限らないので、上流点 r での値は周囲の値から内挿する必要がある。

2.2 内挿法

これまでに様々な内挿法が提案され、様々な分野で利用されている。ここでは、気象の数値予報モデル及び気候モデルでよく利用されている準3次内挿法と著者が考案したスペクトル双3次内挿法について述べる。

(1) 準3次内挿法

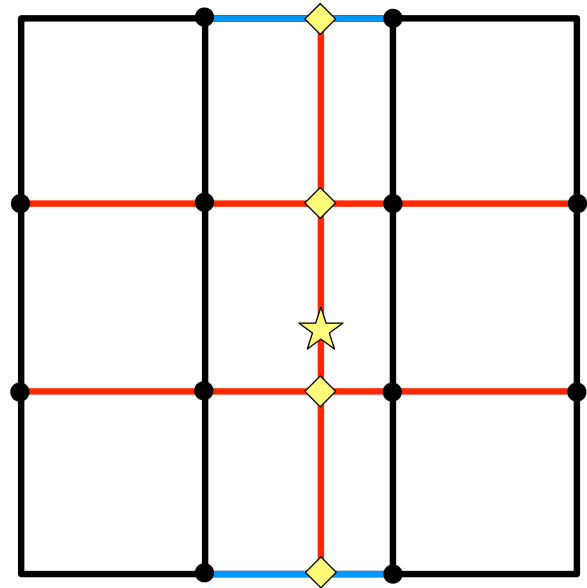
準3次内挿法(Ritchie et al. 1995)は、16点を用いる2次元ラグランジュ内挿法を軽量化したもので、12点(●)の情報を用い1次元の内挿でほぼ同等の精度が得られる。内挿する点(☆)を含むセルから遠いところでは1次元線型内挿を、内挿する点直近の緯度円上では1次元3次ラグランジュ内挿をして、内挿する点と同一の経度上での値(◇)を求める。最後にこれら4点を使って南北に1次元3次ラグランジュ内挿を行い、内挿点における値を得る。

(2) スペクトル双3次内挿法

双3次内挿法は、画像処理等で広く用いられている。この方法では次元分割を用いず、2次元で内挿を行う。内挿する点(☆)を囲むセル上の4点での値に加えて、それぞれの点で東西、南北、クロス微分が合計16の値が必要になる。情報量は2次元の3次ラグランジュ内挿と同じであるが、まわりの点が必要ないのでコンパクトである。スペクトル双3次内挿法では、微分の値をスペクトル空間で計算する。微分を差分法で

求めた場合は、2次元の3次ラグランジュ内挿と同等の精度であるか、スペクトル空間で求めた場合は格段に精度が向上する(Enomoto 2008)。

(a)



(b)

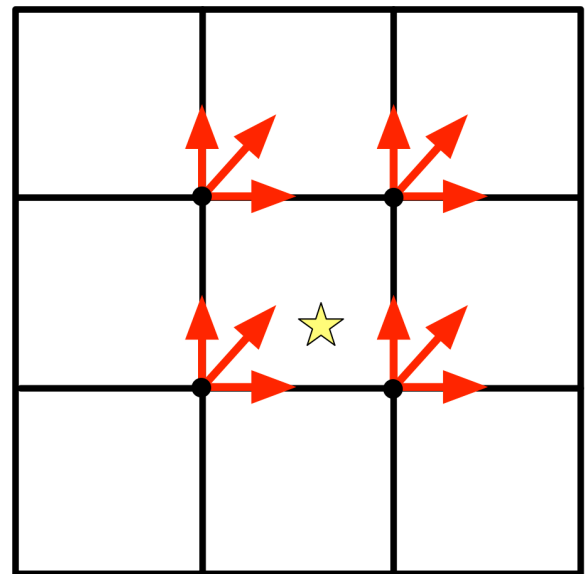


Fig. 1 The schematic diagrams of (a) the quasi-cubic and (b) the spectral bicubic interpolation schemes. The stars indicate the interpolation target, the diamonds the temporary values at the same longitude as the interpolation target, and the black circles the locations of information used in interpolation. The blue and red lines indicate the linear and the cubic Lagrange interpolation, respectively. The red arrows indicate zonal, meridional and cross derivatives.

3. 標準実験

この章では、本研究で実行した球面上の2次元トレーサ移流の標準実験(Lauritzen et al. 2012)の概要について述べる。

3.1 トレーサ分布

トレーサの初期分布は、赤道上に並べた2つの(a)ガウス型の山、(b)コサインベル、(c)溝付円柱、(d)コサインベルの山 x と $ax^2 + b$ 、(a, b は定数)の非線型関係にある分布の4種類ある (Fig. 2)。2つの山の中心は、 $\lambda_1 = 5/6\pi$ 及び $\lambda_2 = 7/6\pi$ に置く。

3.2 時間発展する流れ場

流れ場は、時間変化するものを与える。トレーサは、時間とともに両極に向かって引き延ばされ、中間の時刻 $t = T/2$ で再び元に戻される。ここで T は1周期にかかる時間である。このような伸び縮み成分の他に、 T で1回転する剛体回転成分が付け加わっている。この実験には、解析解は存在しないが、1周期すると元に戻るの、初期値は時刻 T における真値である。本稿では、非発散の流れ場について報告するが、発散成分を持つ流れ場についても標準実験の中に含まれている。

3.3 評価方法

標準実験では、精度や混合特性、計算コスト等様々な観点から比較するために、以下のような評価方法が定義されている。

1. 解の収束性
2. 指定精度を得る「最低」解像度
3. フィラメントの保存に関する診断
4. 時刻 $t = T/2$ 及び $t = T$ におけるトレーサ分布
5. 関数関係の保存
6. 計算コスト (ハローの数, 通信の回数, 関数評価の数, 許容される最大クーラン数, 再利用可能な情報)

実施した計算の条件は、次の通りである。解像度は、 $3^\circ, 1.5^\circ, 0.75^\circ, 0.375^\circ, 0.1875^\circ$ で、それぞれ切断波数T39, 79, 159, 319, 639に対応する。クーラン数は、セミ・ラグランジュ移流モデルでは5.2, 1.0, 0.8, オイラー移流モデルでは1.0について計算した。いずれも数値不安定は生じていない。本稿では、上記のうち、1, 2, 5について報告する。

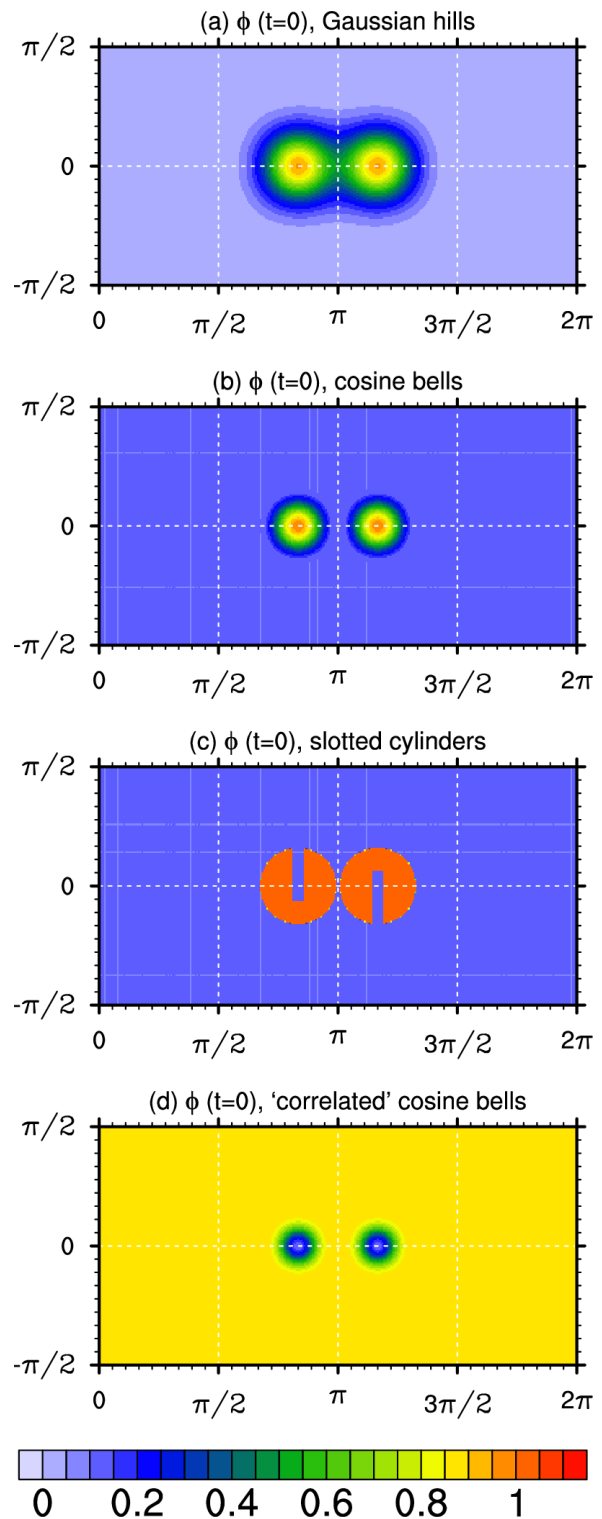


Fig. 2 The initial (and final true) tracer distributions. (a) Gaussian hills, (b) cosine bells, (c) slotted cylinders and (d) correlated cosine bells.

4. 検証結果

本章では、標準実験の結果について述べる。

4.1 収束性

第2章で述べたオイラー移流モデル、準3次及びスペクトル双3次内挿法を用いたセミ・ラグランジュ移流モデルをさまざまな解像度で実行し、 l_2 ノルム（付録）の解像度依存性を調べた（Fig. 3）。

クーラン数1.0では、どの解像度でもスペクトル双3次（赤）の誤差が最も小さく、次いでオイラー移流（紫）、準3次（青）の順である。スペクトル双3次とオイラー移流はコサインベルで期待される2次精度を達成しているが、準3次は期待どおり誤差が低下していない。

クーラン数5.2では、時間ステップ数、すなわち内挿の回数が少なくなるため、どちらの内挿法を用いても、全ての解像度で誤差が小さくなっている。準3次の収束性は改善しているものの、内挿法による差異はクーラン数1.0の場合と同様の傾向が認められる。

4.2 「最低」解像度

「最低」解像度は、 $\log_{10} l_2 = 0.033$ を得るために必要な解像度として定義されている。指定された精度にはもちろん任意性があるが、定義されたトレーサが大きく形を崩すことなく初期位置に戻るような精度である。収束性を求めた前節の実験から推定された「最低」解像度をTable 1に示す。「最低」解像度が粗いほど、少ない格子点数で同等の精度を得ることができる。「最低」解像度からも、スペクトル双3次内挿法が卓越していることが分る。準3次は、クーラン数1.0のときは収束が十分でないために、非常に高い解像度が必要とする。クーラン数5.2の場合でも、「最低」解像度はスペクトル双3次の半分以下である。これは、同一の精度を得るために4倍の格子数が必要であることを示している。

Table 1 The ‘minimal’ resolution of the Eulerian advection model, semi-Lagrangian model using the quasi-cubic interpolation and the spectral bicubic interpolation (°) with the Courant number (C) of 1.0 and 5.2.

C	Euler	Quasi-cubic	Spectral bicubic
1.0	0.79	0.061	1.2
5.2	N/A	0.92	2.1

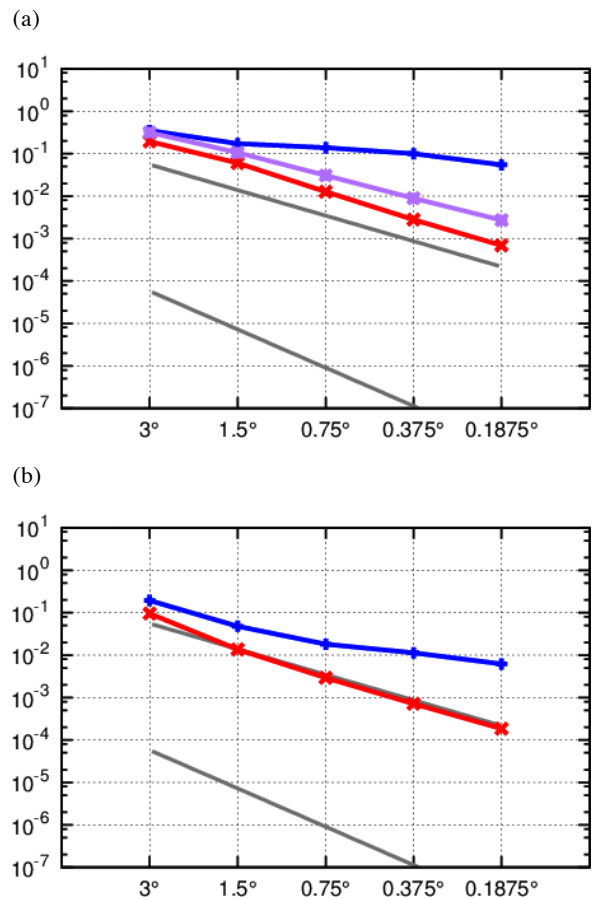


Fig. 3 The resolution dependency of the l_2 norm for the twin cosine bells in the Eulerian advection model (purple) and in the semi-Lagrangian advection model using the quasi-cubic interpolation (blue) and using the spectral bicubic interpolation (red) with the Courant number of (a) 1.0 and (b) 5.2 (except for the Eulerian advection model).

4.3 混合特性

化学輸送モデルのように、複数のトレーサが互いに反応するなどして相互作用を及ぼす場合は、互いに異なる分布の函数関係が維持されなければならない。コサインベルと相関コサインベルとは、非線型な函数関係にある。解像度T159 (0.75°)の結果に対して、 χ 軸にコサインベル、 ξ 軸に相関コサインベルの値とり、散布図を作成した（Fig. 4）。オイラー移流モデルはクーラン数1.0の場合、セミ・ラグランジュ移流モデルはクーラン数5.2の場合について示す。

函数関係が維持されていれば、同一格子点の点は曲線上にのるはずである。曲線上よりも小さい値は実混合(real mixing, l_r)、大きい値は非混合(unmixing, l_u)、0.1～1の値に入らない値は逸脱(overshooting, l_o)と呼ばれる。 l_r, l_u, l_o は、曲線からの距離で測る。

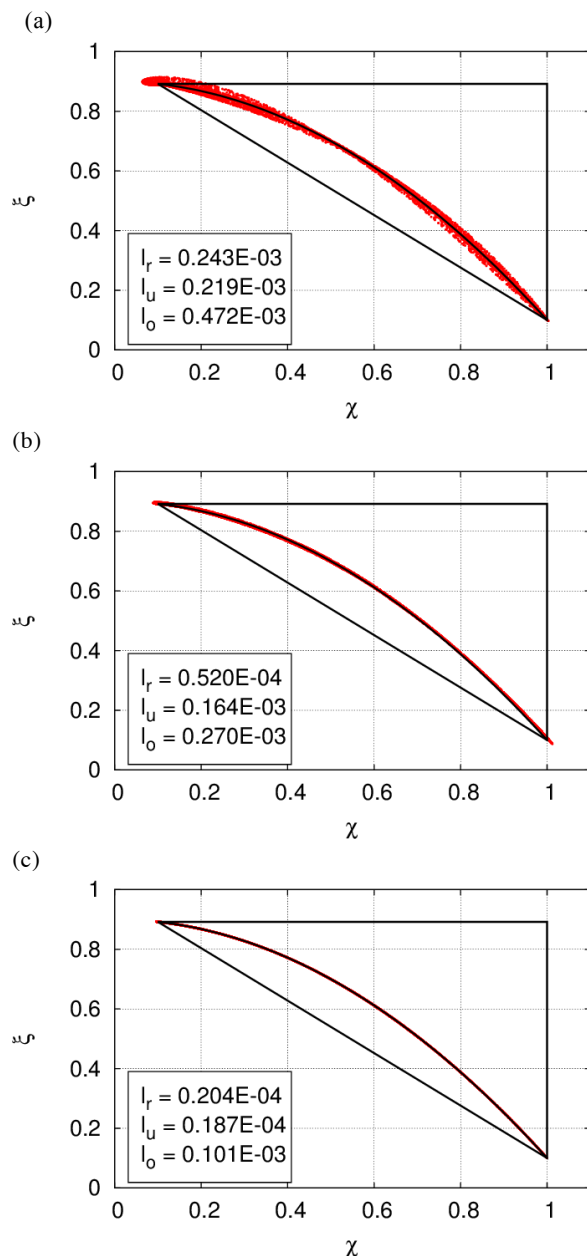


Fig. 4 Functional relations between the cosine bells (χ) and the correlated cosine bells (ξ) at truncation wave number of T159 in (a) the Eulerian advection model with the Courant number of 1.0 and in the semi-Lagrangian advection model using (b) the quasi-cubic interpolation and (c) spectral bicubic interpolation with the Courant number of 5.2. The norms l_r, l_u, l_o are area-weighted distance from the curve.

オイラー移流モデルは、混合特性が良くない。実混合は、セミ・ラグランジュ移流モデルと比較してひと桁大きい。これは、分散性のためであると考えられる。この結果は、オイラー移流モデルは化学輸送モデルに適さないことを示している。セミ・ラグランジュ移流モデルは、オイラー移流モデルに比べれば函数関係をよく維持している。しかし、スペク

トル双3次は準3次と比較して、実混合は半分以下、非混合はほぼひと桁小さい。スペクトル双3次の逸脱は、準3次の半分以下、オイラー移流モデルの1/5近くと小さい。

5. おわりに

本稿では、球面上の2次元移流モデルについて紹介し、提案されている標準実験の概要、実験結果について述べた。著者が提案したスペクトル双3次内挿法を用いたセミ・ラグランジュ移流モデルは、収束性がよく、少ない格子点数で精度よく計算できる。化学輸送モデルのような複数のトレーサを移流する場合に重要となる、混合特性にも優れている。

スペクトル双3次内挿法を用いたセミ・ラグランジュ移流モデルは、単調性や保存性が担保されていない。短波を濾過するフィルタ(Sun et al. 1996)を適用すれば、波状のノイズを大幅に低減でき、単調性を確保できることを確認している。また、変分法に基づく修正法(Sun and Sun 2004)を適用すれば、トレーサ量を全球で保存させることが可能である。どちらも精度や計算コストへの影響は小さい。

本稿では、スペクトル双3次内挿法を用いたセミ・ラグランジュ移流モデルをオイラー移流モデルや準3次内挿法を用いたセミ・ラグランジュ移流モデルと比較したが、現在米国国立大気研究センター (NCAR) のP. H. Lauritzenらを中心となって、2次元移流モデルのモデル間比較を行っている。著者もスペクトル双3次内挿法を用いたセミ・ラグランジュ移流モデルでの結果を提出し、現在共著者とともに編集をしているところである。本稿で報告した比較の詳細についても、投稿を準備しているところである。

謝 辞

Some of the figures are produced with NCL and gnuplot scripts and a Fortran subroutine provided by Dr. P. H. Lauritzen.

参考文献

- Enomoto, T. (2008): Bicubic interpolation with spectral derivatives. *SOLA*, **4**, 5–8, doi:10.2151/sola.2008-002.
- Hortal, M. (2002): The development and testing of a new two-time-level semi-Lagrangian scheme (SETTLES) in the ECMWF forecast model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **128**, 1671–1687.
- Lauritzen, P. H., W. C. Skamarock, M. J. Prather, and M. A. Taylor (2012): A standard test case suite for

- two-dimensional linear transport on the sphere. **5**, 189–228.
- McGregor, J. L. (1993): Economical Determination of Departure Points for Semi-Lagrangian Models. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 221–230.
- Ritchie, H. (1987): Semi-Lagrangian Advection on a Gaussian Grid. *Mon. Wea. Rev.*, **115**, 608–619.
- Ritchie, H., C. Temperton, A. Simmons, M. Hortal, T. Davies, D. Dent, and M. Hamrud (1995): Implementation of the semi-Lagrangian method in a high-resolution version of the ECMWF forecast model. *Mon. Wea. Rev.*, **123**, 489–514.
- Sun, W.-Y., and M.-T. Sun (2004): Mass correction applied to semi-Lagrangian advection scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **132**, 975–984.
- Sun, W.-Y., K.-S. Yeh, and R.-Y. Sun (1996): A simple semi-Lagrangian scheme for advection equation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **122**, 1211–1226.

付 録

l_2 ノルムは以下のように定義される。

$$l_2 = \left\{ \frac{I[(q - q_t)^2]}{I[q_t^2]} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

ここで $q_t = q(t = 0)$ は真値で

$$I(q) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} q(\lambda, \theta, t) \cos \theta \, d\theta d\lambda$$

は全球平均である。

(論文受理日 : 2012年6月7日)

Advection of Smooth and Non-Smooth Tracers on the Sphere

Takeshi ENOMOTO

Synopsis

Advection is one of the most important processes in the atmosphere. It is crucial to use an accurate advection scheme to simulate the time evolution of tracers. A simple and accurate scheme has been developed by the author and verified with advection of a Gaussian hill. In this study the proposed scheme is verified with a standard test cases on the sphere. Our scheme is found to be capable of advecting non-smooth twin cosine hills and slotted cylinders and requires a quarter of the grid points to obtain the same accuracy as quasi-cubic interpolation, commonly used in operational weather and climate models. In addition the proposed scheme exhibit an excellent mixing properties. The ripple noise can be filtered and the mass can be conserved globally. These fixes can be applied with only a small penalty in accuracy or computational load.

Keywords: semi-Lagrangian scheme, interpolation, spherical harmonics