

Group の C -generator について

相模工大 津久井 康之

3-dimensional topology の研究に 1-dim. homology group と fundamental group (1-dim. homotopy group) は基本的である。実際には空間の中の loops の, base point をもたない homotopic (free-homotopic) の関係を調べた場合が多いが、よく知られるように free-homotopic という relation は group を形成しない。

以下ではこの free-homotopic という関係を fundamental group の中でいくらかでも反映して考えるために C -generating set という概念を定義する。このことにより group の新しい invariant が導かれる。また途中、いくつかの群論的な問題も提起される。Group の algorithm (例えば " C -generating set" であるかどうかの判定) は悲観的で、特別な結果は得られていない。この講演では、基本的な性質といくつかの examples をして問題提起にとどまる。

§1 以下で考える group は全て finitely generated とする。また $[G, G]$ は group G の commutator subgroup で

$$\phi: G \longrightarrow \tilde{G} \equiv G/[G, G]$$

は natural onto homomorphism とする。

Definition 1 group G の elements の finite set $G_f = \{x_1, \dots, x_n\}$ が G の X -generating set である ($X = A, C$ or E) とは, 任意の G の element $g \neq 1$ に対して

- (1) $X = E$ (essential) $g = \prod_j x_{ij}^{\varepsilon_j}$
- (2) $X = C$ (conjugate) $g = \prod_j \omega_j^{-1} x_{ij}^{\varepsilon_j} \omega_j$
- (3) $X = A$ (abelian) $\phi(g) = \sum_j \phi(x_{ij}^{\varepsilon_j})$

と表わせることである。ここに $\varepsilon_j = \pm 1$, $\omega_j \in G$, $x_{ij} \in G_f$ 。
set G_f が group G の X -generating set のとき略して $G_f = G_{fx}(G)$ と記す。また G_{fx} の elements の数 $n \in n = n(G_{fx}G)$ とし、 G におけるその最小数を G の X -number と呼ぶ。

$n_x(G) = \min \{n(G_{fx}G) \mid G_{fx} \text{ は } G \text{ の } X\text{-generating set}\}$
で表わす ($X = A, C, E$)。

Definition 2 group G の element g_1 が G の X -generator であるとは、他に G の elements $g_2, g_3, \dots, g_n$, $n = n_x(G)$ があって、 $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ が G の X -generating set になるときをいう。

Definition 3 NG を finitely generated non-abelian groups 全体のなす set とし

$AE = \{G \in NG \mid G \text{ の任意の A-generating set は E-generating set} \}$ とする。 NG の subsets AC, CE も同様に定義する。

Remark E-generating set とは普通 "a set of generators for a group" と呼ばれるもので、記述の容易さのためにこう名づけた。
A-generating set は $\hat{G} \equiv G/[G, G]$ の E-generating set を $\phi: G \rightarrow \hat{G}$ でひきもどしたといえるもので $\eta_A(G) = \eta_E(\hat{G})$ である。 G がある空間の fundamental group なら $\hat{G}$ はその空間の 1-dim. homology-group で、C-generating set はこの gap をある程度埋めた」と定義したものである。 Definition 1, 2. が無意味でないことは以下のいくつかの例で示される。 Definition 3 については後に $AC \neq \emptyset$ は示されるが他の 2 つについては、私には分かっていない。

次の命題は definition から明らかである。

Proposition 1 (1) E-generating set $\Rightarrow$ C-generating set $\Rightarrow$ A-generating set.

(2) $\eta_E(G) \geq \eta_C(G) \geq \eta_A(G) = \eta_E(\hat{G})$, for any group G

(3) G abelian group $\Rightarrow$ E-generating set = C-generating set = A-generating set.

(4) $\eta_E(G) = 0 \Leftrightarrow \eta_C(G) = 0 \Leftrightarrow G = \{1\}$.

(5) $AE = AC \cap CE$.

Proposition 2 M を 3-sphere S^3 内の connected closed 2-sub-manifold (PL-submanifold) とする。 V^3 を $S^3 - M$ の component の任意の 1 つ とすると、 V^3 の fundamental group $\pi_1(V^3)$ について

$$\eta_c(\pi_1(V^3)) = \text{genus of } M.$$

このことは V^3 が S^3 内のある linear graph の complement と homeo. になることからただちに導かれる。 $\eta_E(G) \neq \eta_c(G)$ なる G の簡単な例としてはこの proposition からすぐに、

Corollary G を S^3 内の non-trivial knot の knot group とすると

$$\eta_E(G) \neq \eta_c(G) = \eta_A(G) = 1.$$

このように space の fundamental group については η_E よりも η_c の方が topological な考察から容易に導かれる場合が多い。

S^3 内の link の group の c-number η_c は丁度 link の components の数に等しい。しかしここまでの例ではまだ $\eta_c = \eta_A$ である。

§2

Proposition 3 G を free group で $\mathbb{Z}$ (infinite cyclic) でないとする。

- (1) $\eta_E(G) = \eta_c(G) = \eta_A(G)$
- (2) G の C-generating set である A-generating set G_A ($\eta(G_A, G) = \eta_c(G)$) が存在する。
- (3) E-generating set である C-generating set G_c ($\eta(G_c, G) = \eta_E(G)$) が存在する。

証明は(1)は明らか、(2)は example 1 で、(3)は example 2, 3, 4 で示す。example 4 は(3)がもうすこし強い形にできることを示している。

group G の elements の set $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ があって、その各 element w_i が G の E-generator で represent されているとき、 G に $w_1=1, w_2=1, \dots, w_k=1$ という relation をつけ加えて新しく得られる group を $(G; w_1, w_2, \dots, w_k)$ で表わす。次のことはかんたんにえて C-generating set の判定の可能性を与える。

Proposition 4 group G の elements の finite set $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ が C-generating set である必要十分条件は $(G; y_1, \dots, y_m) = \{1\}$ である。

このことは E-generating set が group を generate する、生かす、ものであるのに対して、C-generating set が名前は generating set であるが group を trivial にするもの、殺すもの、であることを示している。一般に $n_E(G) \geq n_C(G)$ ということは実に、壊すより作る方が大変だということである。

Example 1 $G = (x, y; 1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ($*$ は free product を意味する) とする。 $G_A = \{x^5 y^3, x y x y^{-2}\}$ が G の A-generating set であることは $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$ からあきらめ。もし G_A が G の

C-generating set ならば proposition 4 から、 $G' = (G; x^5 y^{-3}, xyx y^{-2}) = \{1\}$ のはずである。ところが $G' = (x, y; x^5 y^{-3}, (xy)^3 y^{-3})$ はよく知られるように Poincaré manifold の fundamental group で trivial ではない。従って G_A は G の C-generating set ではない。逆に simply connected でない homology sphere の fundamental group の finite presentation の relator 全体を G_f とおけば、これが上の G_A と同じ性質を持つことがわかる。

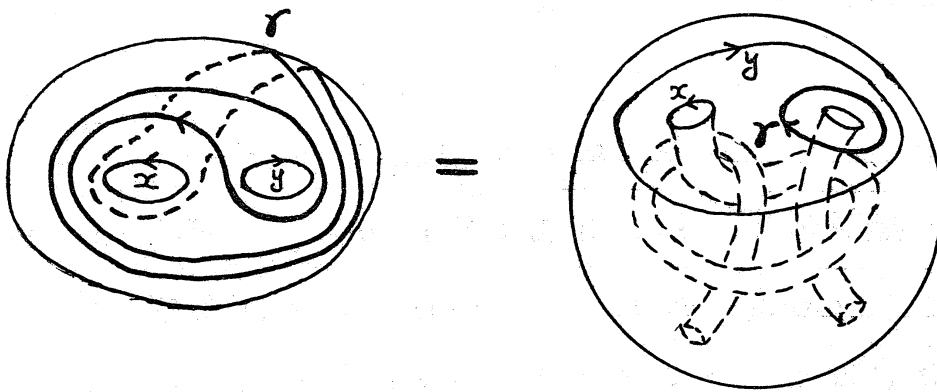
なおこの group G' について、 G' は non-abelian だから $\pi_E(G') = 2$ 、 $(G'; y) = \{1\}$ 故 $\{y\}$ は G' の C-generating set で $\pi_C(G') = 1$ 、 $\widetilde{G'} = \{1\}$ だから $\pi_A(G') = 0$ で、 $\pi_E(G') > \pi_C(G') > \pi_A(G')$ となり definition 1 の C-generating set の定義が無意味でないことがわかる。

Example 2 G は example 1 と同じとし $G_c = \{xyx^{-1}, y^{-1}xy\}$ とする。 G_c が C-generating set であることは明らかで、もし E-generating set であるならば $G' = (G; (xyx^{-1})(y^{-1}xy)^{-1}) \cong \mathbb{Z}$ のはずである。ところが $G' = (x, y; xyx^{-1}y^{-1}xy)$ は trefoil knot の group で $\mathbb{Z}$ ではない。よって G_c は E-generating set ではない。しかし $\{x, xyx^{-1}\}$, $\{y, y^{-1}xy\}$ が共に E-generating set であることは明らかだから、 xyx^{-1} , $y^{-1}xy$ はそれぞれ E-generator である。このことが一般には成立しないことを次の 2 つの examples が示している。

Example 3 group $G = (x, y; 1)$ は example 1, 2 と同じ。

$\gamma = xy^{-1}xyx^{-1}y$ とすると、 $x = \gamma \cdot y^{-1}(xy^{-1}x^{-1})y$ ゆえ $G_\gamma = \{\gamma, y\}$ は C-generating set である。 $(G; \gamma) \neq \mathbb{Z}$ から G_γ は E-generating set でないし、また γ は E-generator でない。

なお example 2 の G_{γ_0} , example 3 の G_γ はともに genus 2 の solid torus の fundamental group の elements として その boundary 上に simple loops で represent できることに注意しておく。



Example 4 $G = (x, y; 1)$ は上と同じ。

$(G; x^5y^3, x^7y^4) = (x, y; x^5=y^{-3}, y^{-1}=x^2) = (x, y; x^5=x^6, y^{-1}=x^2) = \{1\}$ であるから $G_\gamma = \{x^5y^3, x^7y^4\}$ は G の C-generating set である。
しかし、 $(G; x^5y^3)$ と $(G; x^7y^4)$ はどちらも $\mathbb{Z}$ でないから、 x^5y^3 も x^7y^4 も共に E-generator ではない。この G_γ によって は前と異なり genus 2 の solid torus の fundamental group の elements として その boundary 上に simple loops として disjoint には現れせなからう。

genus n の solid torus T_n の fundamental group G は free group で $\pi_1(G) = \pi_2(G) = n$. G_f は G の C-generating set で そのすべての elements が ∂T_n 上に simple loops で disjoint に表現されるもので、 $\pi(G_f, G) = n$ であるとする。このとき次の事はあきらか。

Proposition 5 「上のような任意の n と G_f に対して、すくなくとも 1 つの G_f の element は G の E-generator である」が正しいければ Poincaré conjecture も正しい。

しかしこのような方向での Poincaré conjecture への attack は全く絶望的で、例えばある G の element が ∂T_n 上に simple loop で represent できるかどうかについては Reinhart [2] があるが完全ではないようである。それよりも proposition 5 の逆が成立するかどうかの方が興味ある問題ではなからうか、すくなくとも 3-sphere S^3 の性質をいくらかは明らかにすると思われる。

Proposition 6 任意の A-generating set がまた C-generating set であるような non-abelian group が存在する (すなわち $AC \neq \phi$)。

これは具体的に次の example 5 の中で示される。

Example 5 $G = (x, y; x^2, y^2) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ とすると $G \in AC-CE$.

G の 1 でない element g は 次の 4 つ の形のうちのどれか 1 つで表わされる;

$$(1) (xy)^k x \quad (2) y \cdot (xy)^k \quad (3) (xy)^h \quad (4) (yx)^h, \quad k \geq 0, h \geq 1.$$

このことからまず、 G の任意の A -generator が C -generator になることは簡単に分かる。 $\{g_1, g_2\}$ が G の A -generating set であるとき g_1, g_2 は 各々上の (1) ~ (4) の形のどれかで表わされているということからその組み合わせを全て調べることによって $G \in AC$ を得る。また、例えば $\{(xy)^2 x, (xy)^3 x\}$ は E -generating set でない C -generating set であることが確かめられて、 $G \notin CE$ を得る。

§3

group G の E -number $\eta_E(G)$ と free product との関係については、

B.H. Newmann [1]; $G = G_1 * G_2$ ならば $\eta_E(G) = \eta_E(G_1) + \eta_E(G_2)$.

がある。このことが C -number $\eta_C(G)$ については一般には成立しないことは次の example 6 に示される通りである。 A -number $\eta_A(G)$ については $\widetilde{G_1 * G_2} = \widetilde{G_1} \times \widetilde{G_2}$ から、

$\widetilde{G_1 * G_2}$ が free abelian の時 $\eta_A(G_1 * G_2) = \eta_A(G_1) + \eta_A(G_2)$ 。

Example 6 $G = (x, y; x^2, y^3) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ とする。

$$t = yx^{-1} \text{ とおくと}$$

$$y = y^4 = t(\bar{x}^3 t x) t(\bar{x}^3 t x) \quad (= y\bar{x}^3(\bar{x}^3 y \bar{x}^3 x) y\bar{x}^3(\bar{x}^3 y \bar{x}^3 x))$$

$$x = t^3 y = (\bar{x}^3 t x) t(\bar{x}^3 t x)$$

と G の generator (E-generating set) $\{x, y\}$ が t の conjugate の product で表わされるから $\{t\}$ は G の C-generating set であって、
 $\mathcal{N}_C(G) = 1$ 。 $\mathcal{N}_C(\mathbb{Z}_2) = \mathcal{N}_C(\mathbb{Z}_3) = 1$ 故 $\mathcal{N}_C(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3) \neq \mathcal{N}_C(\mathbb{Z}_2) + \mathcal{N}_C(\mathbb{Z}_3)$ 。

Definition 1 に見る通り、C-generating set という概念は A-generating set と E-generating set の中間にあるのだから free product に関しても似たような性質を待つのではないかと思える。そこで、

Conjecture 2つの group G_1 と G_2 の free product $G_1 * G_2$ が

① finite order の element をもたない

② $\widetilde{G_1 * G_2} = \widetilde{G_1} \times \widetilde{G_2}$ は free abelian

ならば $\mathcal{N}_C(G_1 * G_2) = \mathcal{N}_C(G_1) + \mathcal{N}_C(G_2)$ であらう。

この Conjecture は knot group (C-number は 1) が indecomposable であることのある意味での拡張になっている。example 6 は上の条件①②とも満していいが、あるいは②は不必要か又はもっと弱められるかもしれない。

ここまでのいくつかの問題をまとめてみると、

問題 1. CE, AE は empty であるか. $AC(CE, AE)$ を characterize せよ.

問題 2. example 5 の性質 ($G \in AC$) をもつ group で indecomposable なものをさがせ.

問題 3. 上の conjecture を (必要なら条件を強めて) 証明せよ.

(特に $\widetilde{G_1 * G_2} = \{1\}$ の時をまず示せ.)

問題 4. Proposition 5 の逆を証明せよ.

問題 5. C -generating set の definition には finitely generated という条件は特に必要ではない. infinitely generated group で C -number が finite であるものがあればそれらをみつけ出して, characterize せよ.

なお C -generator という呼び名は Combinatorial Topology 研究集会, (1971.2月 京都・数理解析研) において 細川先生 (神戸) が Poincaré Conjecture についての講演の中で使われたもので, ここではそれを少し整理した形で用いています. またこの講演はその時の細川先生の「予想」の反例 (example 2~4) を作ることから出発したものです.

参 照 文 献

[1] B.H. Newmann, On the number of generators of a free product, J. London Math. 18 (1943).

[2] B.L. Reinhart, Algorithms for Jordan curves on compact surfaces, Ann. of Math. 75 (1962).