

氏 名	うえ の りょう いち 上 野 亮 一
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 1784 号
学位授与の日付	平 成 9 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	Which properties of coverings of the Riemann sphere minus three points can be found also in higher dimensional cases ? (リーマン球面から3点を除いた空間の被覆のもつどのような性質 が高次元の場合にも見出せるか)

(主 査)
論文調査委員 教 授 伊 原 康 隆 教 授 齋 藤 恭 司 教 授 河 合 隆 裕

論 文 内 容 の 要 旨

射影直線の3点分岐被覆系は、幾何学的、解析学的、数論的それぞれの立場から見て極めて興味深い対象である。そのうちの一つは Belyi の定理で、それは、代数曲線が数体上で定義されることと、それが射影直線の $0, 1, \infty$ 以外では不分岐な有限分岐被覆として実現できることが同値であることを主張している。この研究の出発点は、この議論の類似が高次元の場合にも存在するか否かを問うたことである。

各 n 次元代数多様体 V は、明らかに、射影空間 P^n のある有限分岐被覆 $\pi': V' \rightarrow P^n$ と双有理同値になる。与えられた V に対して (V', π') のとり方は無限通りある。明らかでないのは、問「与えられた V に対して、 π' の分岐軌跡をなるべく簡単にするにはどうすればよいか」に対する答であろう。我々はまた「 P^n 上に与えられた超曲面 B (可約でよい) に対して、 B の外で不分岐な P^n の有限分岐被覆多様体と双有理同値な代数多様体の特徴づけよ」という問題も考えることが出来る。 B が $(P^1$ 上の $\{0, 1, \infty\}$ のように) 変形を許さないときには、この特徴づけは「 V が数体上で定義される」ことを条件の一部として含むはずである。大域多様体に関するこれらの問に対する答としては、最初の問について π' の分岐軌跡として次に述べる特別な型のものがとれることが証明できた。その特別な型とは、有限個の多項式写像 $C^{n-1} \rightarrow C$ のグラフ ($\subset C^n$) の合併の閉包として与えられることである (定理 1)。大域的問題から局所的問題に眼を転じると、まず任意の n 次元正規特異点 (X, x) は n 次元アフィン空間の原点に於る芽 $(C^n, 0)$ の有限分岐被覆となることが知られている。そこで、上の2つの間のこの場合の類似問題について考察する。まず上の定理 1 の局所版 (定理 2) が得られ、更に $n=2$ の場合に以下のより詳しい諸結果が得られた。

(X, x) を複素 2 次元正規特異点とする。このとき (X, x) が正規 C^* 特異点であることと原点を通る有限個の直線の外では不分岐な有限分岐被覆 $(X, x) \rightarrow (C^2, 0)$ として実現されることは同値である (定理 3)。ここで (X, x) が正規 C^* 特異点とは、それが x を孤立固定点とする C^* 作用をもつことであ

る。更に (X, x) が代数的数全体のつくる体 $\bar{Q}$ で定義される正規 C^x 特異点であることと、それが原点を通る 3 本の直線でのみ分岐する $(C^2, 0)$ の有限分岐被覆としての構造をもつことも同値である (定理 4)。後者は Belyi の定理の 2 次元正規特異点版と言える。 C^x 作用があるので、1 次元に近いが、Belyi の定理に帰着させるには注意深い議論が必要である。

複素射影直線マイナス 3 点について解析的立場から重要な事柄の一つは、その普遍被覆が複素上半平面 $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$ と同型であり、 z を $P^1(C) - \{0, 1, \infty\}$ 上の多価関数とみると、それはガウスの超幾何微分方程式の適当な 2 つの解の比として表わされる、という事である。この高次元への一般化を試み、第一歩となる結果を得た。

まず空間としては P^1 上の増異なる $n+3$ 点の列の全体のモジュライ空間を考える。 P^1 の自己同型群 $PL(2)$ で割っているの、これは n 次元で、 $n=1$ のときは $P^1 - \{0, 1, \infty\}$ である。この空間 D の普遍被覆空間 $T = T_{0, n+3}$ は一般化されたタイヒミュラー空間である。 D はちょうど Appell-Lauricella の超幾何方程式の正規点全体になっているが、この微分方程式の解の比を用いたのでは T の忠実な実現は出来ないことが知られている。この研究では、Garnier system とよばれる非線型微分方程式の解の比を用いて、 T からある (よりわかりやすい) 空間の中への、少なくとも $T \rightarrow D$ の各ファイバー上では単射的な埋め込みを構成することに成功した。

論文審査の結果の要旨

論文内容の要旨欄にあるように、申請者は射影直線マイナス 3 点の被覆系に関する代数的、解析的な基本事項 (有限被覆系の特徴づけ (Belyi の定理)、普遍被覆空間が微分方程式の解を用いて構成できること) の高次元化を試み、それぞれについて新しい方向を見出し、第一歩として十分価値ある研究成果をあげた。

前者については、次元を上げる一方で、もとの空間を局所化し、2 次元正規特異点 (の近傍の芽) を対象としてとりあげると、それに対して Belyi の定理の類似が成立つことを示した。後者については、 P^1 マイナス 3 点は P^1 上の 4 点モジュライであると見做して、それを $n+3$ 点 ($n \geq 1$) のモジュライ空間 D_n におきかえ、その普遍被覆空間 (タイヒミュラー空間の一種) を微分方程式の解によって構成する研究を進めた。これは古典的で極めて困難な問題で、例えば、 D_n 上の超幾何微分方程式を用いてもだめなことが知られている。申請者は Garnier system と呼ばれるある (非線型) 微分方程式系を考えることにより内容要旨欄にあるように具体的な第一歩を踏み出す興味深い成果を得た。

本学位論文において、申請者は、広範でやや莫とした研究領域の中から全く独力で複数の具体的な方向を見出し、それぞれが有望であることをかなりの程度証拠立てるに足る成果を挙げている。内容の検証もなされた結果、正しいと認められた。

従って、本申請者論文は博士 (理学) の学位論文として十分な価値を有すると認めた。なお、論文内容とそれに関連した口頭諮問を行った結果合格と認めた。