

ある *Random matrix* の固有ベクトルの
漸近分布について

広島大 理 小西 貞則

§ 1. 序

多変量解析において擾動論を用いた研究は古くは,
Girshic [4], Lawley [5, 6] によって, また最近では Fujikoshi [2] が
多変量解析におけるいくつかの統計量の漸近展開を求めてお
り, さらに母集団固有根に重根がある場合の Wishart 行列, 多
変量 F 行列 (Fujikoshi [3]), 正準相関係数 (Sugiura [1975.4. 数学会報別
の固有根の漸近展開がえられている。固有ベクトルに関して
は Sugiura [7] が, 母集団固有根が単根の時, 1 つ又は 2 つの
Wishart 行列の固有ベクトルの擾動展開を与えそれを基に分布
の漸近展開を求めた。ここでは, はじめに § 2 において, P
次対称行列 S の一つの擾動系を考え, その固有ベクトルの擾
動展開を導き, 同時に固有根の擾動公式 (Fujikoshi [3]) も導び
かれることを示す。§ 3 において, 母集団固有根に重根があ
る場合の Wishart 行列の固有ベクトルの分布について, § 2 で

求めた結果から考察する。

§ 2. 対称行列の固有ベクトルの摂動展開

一般に P 次対称行列 S が十分小なる ε に対して

$$(2.1) \quad S = \Gamma + \varepsilon V^{(1)} + \varepsilon^2 V^{(2)} + \varepsilon^3 V^{(3)} + \dots,$$

と表わされるとする。ここに $\Gamma = \text{diag}[\gamma_1 I_{g_1}, \gamma_2 I_{g_2}, \dots, \gamma_R I_{g_R}]$,

$\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_R > 0$, $\sum_{i=1}^R g_i = P$, $V^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots$): P 次対称行列

とする。このとき S の固有ベクトルの摂動展開公式を与える。

いま S の第 i 番目の固有値 λ_i ($i=1, \dots, P$) に対応する固有ベク

トル c_i は $c_i' c_j = \delta_{ij}$ ($i, j=1, \dots, P$) をみたすようにとり,

$C = [c_1, c_2, \dots, c_P]$, $L = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_P]$ とおく。また

Γ の第 i 番目の固有ベクトルを第 i 列にもつ P 次行列 E は

$$(2.2) \quad E = [e_1, e_2, \dots, e_P] = \begin{bmatrix} E_1 & & 0 \\ & E_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & E_R \end{bmatrix} \quad E_i: g_i \times g_i \text{ 直交行列}$$

と表わすことができる。ここで ε が小さいという仮定のもと

で、摂動系 (2.1) の固有値, 固有ベクトルを ε の中級数に展開

する。すなわち

$$(2.3) \quad C = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} E_1 & & 0 \\ & E_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & E_R \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} E_1 & & 0 \\ & E_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & E_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & \dots & A_{1R}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} & \dots & A_{2R}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{R1}^{(1)} & A_{R2}^{(1)} & \dots & A_{RR}^{(1)} \end{bmatrix} \\ + \varepsilon^2 \begin{bmatrix} E_1 & & 0 \\ & E_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & E_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & \dots & A_{1R}^{(2)} \\ A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} & \dots & A_{2R}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{R1}^{(2)} & A_{R2}^{(2)} & \dots & A_{RR}^{(2)} \end{bmatrix} + \varepsilon^3 \begin{bmatrix} E_1 & & 0 \\ & E_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & E_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{(3)} & A_{12}^{(3)} & \dots & A_{1R}^{(3)} \\ A_{21}^{(3)} & A_{22}^{(3)} & \dots & A_{2R}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{R1}^{(3)} & A_{R2}^{(3)} & \dots & A_{RR}^{(3)} \end{bmatrix} + \dots,$$

$$(2.4) \quad L = \begin{bmatrix} L_1 & & 0 \\ & L_2 & \\ 0 & & L_n \end{bmatrix} = \Gamma + \varepsilon L^{(1)} + \varepsilon^2 L^{(2)} + \varepsilon^3 L^{(3)} + \dots,$$

ここに $C_{ij}, A_{ij}^{(\mu)}$ ($i, j=1, 2, \dots, n, \mu=1, 2, \dots$) : $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ 行列

$$L^{(\mu)} = \begin{bmatrix} L_1^{(\mu)} & & 0 \\ & L_2^{(\mu)} & \\ 0 & & L_n^{(\mu)} \end{bmatrix} \quad L_i^{(\mu)} : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \text{ 行列} \quad \text{とある。}$$

(注) Γ が simple の場合 $L_i^{(\mu)}$ は対角行列にとれるが, Γ が重根を含む場合にはこの段階では対角行列にはとれない。

(2.3), (2.4) の係数 $A_{ij}^{(\mu)}, L_i^{(\mu)}$ を, $SC = CL, C'C = I$ なる関係から決定することによって, 固有値, 固有ベクトルの摂動展開公式として次の補助定理をえる。

補助定理

P 次対称行列 S が, 摂動系 (2.1) で表わされるとき, S の固有ベクトル, 固有値の摂動展開は

$$(2.5) \quad C_{ij} = \frac{1}{\sigma_j - \sigma_i} \left[\varepsilon V_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 \left(\sum_{\alpha \neq j} \frac{1}{\sigma_j - \sigma_\alpha} V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha j}^{(1)} - \frac{1}{\sigma_j - \sigma_i} V_{ij}^{(1)} V_{jj}^{(1)} + V_{ij}^{(2)} \right) + \varepsilon^3 \left\{ \sum_{\alpha \neq j} \sum_{\beta \neq j} \frac{1}{(\sigma_j - \sigma_\alpha)(\sigma_j - \sigma_\beta)} V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha\beta}^{(1)} V_{\beta j}^{(1)} - \sum_{\alpha \neq j} \frac{1}{(\sigma_j - \sigma_\alpha)^2} (V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha j}^{(1)} V_{jj}^{(1)} + \frac{1}{2} V_{ij}^{(1)} V_{j\alpha}^{(1)} V_{\alpha j}^{(1)}) - \frac{1}{\sigma_j - \sigma_i} \sum_{\alpha \neq j} \frac{1}{\sigma_j - \sigma_\alpha} (V_{ij}^{(1)} V_{j\alpha}^{(1)} V_{\alpha j}^{(1)} + V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha j}^{(1)} V_{jj}^{(1)}) + \frac{1}{(\sigma_j - \sigma_i)^2} V_{ij}^{(1)} V_{jj}^{(1)^2} + \sum_{\alpha \neq j} \frac{1}{\sigma_j - \sigma_\alpha} (V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha j}^{(2)} + V_{i\alpha}^{(2)} V_{\alpha j}^{(1)}) - \frac{1}{\sigma_j - \sigma_i} (V_{ij}^{(1)} V_{jj}^{(2)} + V_{ij}^{(2)} V_{jj}^{(1)}) + V_{ij}^{(3)} \right\} \right] E_j + O(\varepsilon^4),$$

($i \neq j$)

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad C_{ii} = & E_i + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_\alpha)^2} V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha i}^{(1)} \right) E_i \\
 & + \varepsilon^3 \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq i} \sum_{\beta \neq i} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_\alpha)^2 (\lambda_i - \lambda_\beta)} (V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha\beta}^{(1)} V_{\beta i}^{(1)} + V_{i\beta}^{(1)} V_{\beta\alpha}^{(1)} V_{\alpha i}^{(1)}) \right. \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_\alpha)^3} (V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha i}^{(1)} V_{i\alpha}^{(1)} + V_{i\alpha}^{(1)} V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha i}^{(1)}) \\
 & \left. - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_\alpha)^2} (V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha i}^{(2)} + V_{i\alpha}^{(2)} V_{\alpha i}^{(1)}) \right\} E_i + O(\varepsilon^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad E_i L_i E_i' = & \lambda_i I_{k_i} + \varepsilon V_{ii}^{(1)} + \varepsilon^2 (V_{ii}^{(2)} + \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_\alpha} V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha i}^{(1)}) \\
 & + \varepsilon^3 \left\{ V_{ii}^{(3)} + \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_\alpha} (V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha i}^{(2)} + V_{i\alpha}^{(2)} V_{\alpha i}^{(1)}) \right. \\
 & - \frac{1}{2} V_{ii}^{(1)} \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_\alpha)^2} V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha i}^{(1)} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_\alpha)^2} V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha i}^{(1)} V_{ii}^{(1)} \\
 & \left. + \sum_{\alpha \neq i} \sum_{\beta \neq i} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_\alpha)(\lambda_i - \lambda_\beta)} V_{i\alpha}^{(1)} V_{\alpha\beta}^{(1)} V_{\beta i}^{(1)} \right\} + O(\varepsilon^4),
 \end{aligned}$$

と表わすことができる。

(Remark)

i) Γ が simple の場合 (2.2) における Γ の固有ベクトル E_i は $E_i' = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$, すなわち $E = I$ にとることができる。(2.5).

(2.6) は $V_{ij}^{(2)} = V_{ij}^{(3)} = 0$ とおくと Sugita [7] の結果と一致する。

ii) 固有値の摂動公式のみを考えるならば (2.2) における E は任意の直交行列でよいのであるから $E = I$ とすることができる。このとき S の第 $k_1 + \dots + k_{i-1} + j$ 番目の固有値は (2.7) の第 j 番目の固有値であり, これは Fujikoshi [3] の固有値の摂動公式と一致する。

iii) (2.7) において E_i は, 右辺の対称行列を対角化する直交行列とすれば L_i は対角行列となる。

§ 3. Wishart 行列の固有ベクトルについて

nS を Wishart 分布 $W_p(n, \Gamma)$. $\Gamma = \text{diag}[\gamma_1 I_{q_1}, \gamma_2 I_{q_2}, \dots, \gamma_k I_{q_k}]$
 $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_k > 0$ に従う正値対称行列とする。 S の第 i 番目の固有値に対応する固有ベクトル C_i は, $C_i' C_j = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, p$)
 をみたすようにとり $C_n = [C_1, C_2, \dots, C_p] = [C_{ij}]$, $C_{ij}: q_i \times q_j$
 行列とあく。さらに

$$(3.1) \quad S = \Gamma + \frac{1}{n} V \quad V: p \text{ 次対称行列}$$

とあくことにより, 補助定理より固有ベクトルの擾動展開

$$(3.2) \quad C_{ij} = \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} V_{ij} + \frac{1}{n} \left(\sum_{\alpha \neq j} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_\alpha} V_{i\alpha} V_{\alpha j} - \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i} V_{ij} V_{jj} \right) \right. \\
 + \frac{1}{n\sqrt{n}} \left\{ \sum_{\alpha \neq j} \sum_{\beta \neq j} \frac{1}{(\gamma_j - \gamma_\alpha)(\gamma_j - \gamma_\beta)} V_{i\alpha} V_{\alpha\beta} V_{\beta j} - \sum_{\alpha \neq j} \frac{1}{(\gamma_j - \gamma_\alpha)^2} (V_{i\alpha} V_{\alpha j} V_{jj} + \frac{1}{2} V_{ij} V_{jj} V_{jj}) \right. \\
 \left. \left. - \frac{1}{\gamma_j - \gamma_i} \sum_{\alpha \neq j} \frac{1}{\gamma_j - \gamma_\alpha} (V_{i\alpha} V_{jj} V_{\alpha j} + V_{i\alpha} V_{\alpha j} V_{jj}) + \frac{1}{(\gamma_j - \gamma_i)^2} V_{ij} V_{jj}^2 \right\} \right] E_j + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$(3.3) \quad C_{ii} = E_i + \frac{1}{n} \left(-\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_\alpha)^2} V_{i\alpha} V_{\alpha i} \right) E_i \\
 + \frac{1}{n\sqrt{n}} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq i} \sum_{\beta \neq i} \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_\alpha)^2 (\gamma_i - \gamma_\beta)} (V_{i\alpha} V_{\alpha\beta} V_{\beta i} + V_{i\beta} V_{\beta\alpha} V_{\alpha i}) \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_\alpha)^3} (V_{i\alpha} V_{\alpha i} V_{ii} + V_{ii} V_{i\alpha} V_{\alpha i}) \right\} E_i + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

および固有値の擾動公式

$$(3.4) \quad E_i L_i E_i' = \gamma_i I + \frac{1}{n} V_{ii} + \frac{1}{n} \left(\sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{\gamma_i - \gamma_\alpha} V_{i\alpha} V_{\alpha i} \right) \\
 + \frac{1}{n\sqrt{n}} \left\{ -\frac{1}{2} V_{ii} \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_\alpha)^2} V_{i\alpha} V_{\alpha i} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_\alpha)^2} V_{i\alpha} V_{\alpha i} V_{ii} \right. \\
 \left. + \sum_{\alpha \neq i} \sum_{\beta \neq i} \frac{1}{(\gamma_i - \gamma_\alpha)(\gamma_i - \gamma_\beta)} V_{i\alpha} V_{\alpha\beta} V_{\beta i} \right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

をえる。

ここで E_i を (3.4) の右辺の対称行列を対角化する直交行

列と考えれば, L は対角行列したがって L , E は各々 (3.4) の右辺の固有値, 固有ベクトルと考えることができる。さらに (3.4) の右辺の分布の漸近展開は, Fujikoshi [3] によってえられており, その結果から, 任意の直交行列 Q に対して, $E \sim Q$ の分布は E の分布と等しくしたがって E は, *Wishart distribution* であることがわかる。実際固有ベクトルの漸近展開をえるためには, (3.2), (3.3) の結果より *characteristic function* を求めて反転する必要がある。しかし上記結果からわかるように各項が *Wishart distribution* E に *depend* していることから, E を与えた条件付でないと思われ難いと思われる。そこで, ここでは (3.2) (3.3) の結果から漸近分布の形で定理を述べることにする。

定理 1.

nS は *Wishart* 分布 $W_p(n, \Gamma)$ に従い, 共分散行列 Γ は, 重根をもつものとする。 S の固有ベクトル C には, $C_i' C_j = \delta_{ij}$ をみたすとする。このとき (3.2) (3.3) より $\sqrt{n} C_{ij}$ (にき) の極限分布は E_{ij} を与えたとき, 平均 0 の正規分布でその (a, b) -element の分散は $\frac{\delta_{ab} - \delta_{ab}^2}{(\delta_{ab} - \delta_{ab}^2)^2}$ で共分散は 0, また $\sqrt{n} C_{ij}$ の (a, b) -element と $\sqrt{n} C_{j'}$ の (a', b') element の間の条件付共分散は, $\frac{-\delta_{ab} \delta_{a'b'}}{(\delta_{ab} - \delta_{ab}^2)^2} e_{aa'}^{(i)} e_{bb'}^{(j)}$, $E = (e_{aa}^{(i)})$ となりそれ以外の条件付共分散はすべて 0。

$-2n(C_{ii} - E_{ii})$ の極限分布は条件付分布で与えられ互いに独立な singular を含めた Wishart 行列の一次結合

$$(3.5) \quad \sum_{j \neq i}^p [\eta_j \eta_i / (\eta_j - \eta_i)^2] S_{jj}^{(i)} E_{ii}, \quad S_{jj}^{(i)} : W_{E_{ii}}(q, I)$$

と表わすことができる。 Γ が simple の場合 Sugiyama [7] の結果と一致する。

次に Wishart 行列 nS に対して S の固有ベクトル C_i が対応する固有値 λ_i によって $C_i' C_i = \lambda_i$ ($i=1, \dots, p$) と正規化される場合を考える。この場合にも固有ベクトル $C_n = [C_{ij}]$ の摂動展開は可能でそれは、

$$(3.6) \quad C_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{\eta_j}}{\eta_j - \eta_i} V_{ij} E_j + \frac{1}{n} \left\{ \frac{\sqrt{\eta_j}}{\eta_j - \eta_i} \sum_{j \neq k} \frac{1}{\eta_j - \eta_k} V_{kj} V_{kj} \right. \\ \left. - \frac{\eta_i + \eta_j}{2\sqrt{\eta_j}(\eta_j - \eta_i)^2} V_{ij} V_{jj} \right\} E_j + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

$$(3.7) \quad C_{ii} = \eta_i^{1/2} E_{ii} + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{2\sqrt{\eta_i}} V_{ii} E_{ii} + \frac{1}{n} \left\{ -\frac{1}{8\eta_i \sqrt{\eta_i}} V_{ii}^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\eta_j}{\sqrt{\eta_i}(\eta_i - \eta_j)^2} V_{ij} V_{ji} \right\} E_{ii} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

と表わすことができる。

この場合にも上記結果から各項が *Near distribution* E_{ii} に depend しており E_{ii} も与えたときの条件付でない漸近展開を求めるとはむづかしい。(3.6), (3.7) からすぐに漸近分布に関して次の定理がえられる。

定理 2.

nS を Wishart 分布 $W_p(n, \Gamma)$ 従う正値対称行列とし、

Γ は重根を含むとする。 S の第 i 番目の固有値 λ_i に対応する固有ベクトル C_i は $C_i' C_i = \lambda_i$ ($i=1, 2, \dots, p$) と正規化されるものとする。 $C_n = [C_1, C_2, \dots, C_p] = [C_{ij}]$, $C_{ij} : p_i \times p_j$ 行列」とするとき,

$\sqrt{n} C_{ij}$ の極限分布は E_{ij} を与えたとき平均 0 の正規分布に従う。その条件付分散は $\lambda_i \lambda_j^2 / (\lambda_i - \lambda_j)^2$, 共分散は 0, $\sqrt{n} C_{ij}$ の (a, b) -element と $\sqrt{n} C_{j' i'}$ ($i \neq j'$) の (a', b') -element との間の条件付共分散は $-(\lambda_i \lambda_j)^{3/2} / (\lambda_i - \lambda_j)^2 e_{a a'}^{(i)} e_{b b'}^{(j)}$, $E_i = [e_{a b}^{(i)}]$ となる。さらに $\sqrt{n} (C_i - \lambda_i^{-1/2} E_i)$ の極限分布は E_i を与えたとき平均 0 の正規分布で (a, b) -element, (a', b') -element の条件付共分散は

$$\frac{1}{4} \lambda_j e_{a a'}^{(i)} e_{b b'}^{(j)} \quad (a \neq a'), \quad \frac{1}{2} \lambda_i e_{a a}^{(i)} e_{b b'}^{(j)} + \frac{1}{4} \lambda_j \sum_{a \neq a'} e_{a a}^{(i)} e_{b b'}^{(j)} \quad (a = a')$$

となる。このように固有ベクトルの正規化の仕方により、漸近分布の order が変わることがわかる。

次に 2 つの Wishart 行列の固有ベクトルについて考えてゆく。 S_1, S_2 は互いに独立で各々 Wishart 分布 $W_p(n_1, \Gamma), W_p(n_2, I)$ に従う正値対称行列とする。ここに $n_1 = n p_1, n_2 = n p_2, n_1 + n_2 = n$, $\Gamma = \text{diag}[\lambda_1 I_{p_1}, \lambda_2 I_{p_2}, \dots, \lambda_k I_{p_k}]$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > 0$) とする。 $S_2^{-1} S_1$ の第 i 番目の固有値 λ_i に対応する固有ベクトル C_i は, $C_i' C_i = 1$ とし $C_n = [C_1, C_2, \dots, C_p] = [C_{ij}] : C_{ij} : p_i \times p_j$ 行列」とする。この場合, §2 で求めた補助定理は $S_2^{-1} S_1$ が対称でないことから適用できない。しかし 1 項までは, 漸近

分布の形で求めることができる。すなわち *diagonal block*

$C_{ii} : \ell_i \times \ell_i$ 行列 ($i=1, \dots, k$) の第 1 項の極限分布は *Haar*

distribution E_i で、次の項は $\frac{1}{\sqrt{n}}$ の項が表われそれは

$$(3.8) \quad -2\rho_2^{1/2}\sqrt{n}(C_{ii}-E_i) = E_i \begin{bmatrix} 0, e_1^{(i)'} U_{ii} e_2^{(i)}, \dots, e_1^{(i)'} U_{ii} e_{\ell_i}^{(i)} \\ e_2^{(i)'} U_{ii} e_1^{(i)}, 0, \dots, e_2^{(i)'} U_{ii} e_{\ell_i}^{(i)} \\ e_{\ell_i}^{(i)'} U_{ii} e_1^{(i)}, e_{\ell_i}^{(i)'} U_{ii} e_2^{(i)}, \dots, 0 \end{bmatrix}$$

と表わすことができる。

ここに $E_i = [e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{\ell_i}^{(i)}]$ ($i=1, \dots, k$), U_{ii} は $U = \frac{1}{\sqrt{n_1}}(S_2 - n_2 I)$

で定義される *random matrix* U を $U = [U_{ij}]$, $U_{ij} : \ell_i \times \ell_j$ 行列と

分割したときの *diagonal block* とする。また C_{ij} ($i \neq j$) に対し

ては

$$(3.9) \quad \sqrt{n} C_{ij} = \frac{1}{\pi_j - \pi_i} (\rho_1^{-1/2} (\pi_i \pi_j)^{1/2} V_{ij} - \rho_2^{-1/2} \pi_j U_{ij}) E_j \quad (i \neq j)$$

と表わすことができる。ここに $V = [V_{ij}]_{i,j=1,\dots,k} = \frac{1}{\sqrt{n_1}} (\Gamma^{-1/2} S_1 \Gamma^{-1/2}$

$-n_1 I)$ とする。(3.8), (3.9) より E_i を与えたときの漸近分布

は平均 0 の正規分布となることがわかる。 Γ が *simple* の場合

Sugiura [7] によって漸近展開および (3.8) に対応する漸近分

布が求められているが (3.8) に対応する対角要素 C_{ii} の第 1 項

は 1 で次に *order* $\frac{1}{n}$ の項が表われ、 Γ が重根をもつと (3.8) より

order が変わってくることをわかる。

References

- [1] Anderson, T. W. (1963). Asymptotic theory for principal component analysis. *Ann. Math. Statist.* 34, 122-148.
- [2] Fujikoshi, Y. (1975). 多変量解析におけるある種の検定統計量の漸近展開. *数理研講究録* 231, 12-25.
- [3] Fujikoshi, Y. (1975). Wishart 行列および多変量 F 行列の固有根の分布の漸近展開 - 重根のある場合. *日本数学会講演要旨*. (49-52).
- [4] Girshik, M. A. (1939). On the sampling theory of roots of determinantal equations. *Ann. Math. Statist.* 10 203-224.
- [5] Lawley, D. N. (1956). Tests of significance for the latent roots of covariance and correlation matrices. *Biometrika* 43 128-136.
- [6] Lawley, D. N. (1959). Tests of significance in canonical analysis. *Biometrika* 46 59-66.
- [7] Sugiyama, N. (1975). Wishart 行列の固有ベクトルの漸近展開. *数理研講究録* 231. 1-11.
- [8] Wigner, E. P. (1959). *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. Academic Press New York and London.