

On Strongly Invertible Knots

大阪市大 理 作間 誠^(*)

Makoto SAKUMA

向き付けられた 3 球面 S^3 上の knot K に対し、次の条件を満足する S^3 上の ori.-pres. involution $\bar{h}$ が存在する時、 K は strongly invertible であると言う。

(1) $\bar{h}(K) = K$

(2) $\text{Fix } \bar{h}$ は K と二点で交わる circle。

この報告では、strongly invertible knot に対して或る多項式不変量を定義し、それと equivariant prime decomposition 及び equivariant cobordism との関係を論ずる。その不変量は Alexander polynomial とは独立で、特に、自明な Alexander polynomial を持つ knot に対しても、一般には消えない。

§1. Strongly invertible knot は "沢山" ある。

このセクションでは strongly invertible knot に関してこれまでに知られている結果を述べる。

(*) 日本学術振興会奨励研究員

S^3 上の ori.-pres. homeo. で K の向きを逆転するものが
 有る時、 K を invertible という。勿論、strongly in-
 vertible なら invertible である。逆は、hyperbolic knot
 に関しては正しい ([8, 1]) が、一般の knot に関しては
 正しくない ([1, 6, 20])。Fox [3] は、non-invertible
 knot は存在するか？という問題を提出したが、それは
 Trotter [18] がある種の pretzel knot の non-invertibility
 を証明する事により解決した。しかし、一般的な判定法
 は '70年代終りの Kawauchi [8], Hartley [7], Bonahon-
 Siebenmann [2] 等の仕事まで待たなくてはならなかった。
 10 crossings までの knot の invertibility は Hartley [7] に
 依り、完全に決定された。それによると、9 crossings まで
 の knot で non-invertible なのは 817, 932, 933 のみ、又、
 10 crossings では 165個の prime knot があるが、その内
 non-invertible なのは丁度 $1/5$ の 33個である。結局、
 10 crossings までの prime knot 249個の内、non-in-
 vertible なのは 36個で全体の約 14% だけであり、
 残りの 213個の knot は strongly invertible である。

Sakai [14] に依り証明された次の定理も、strongly
 invertible knot が "沢山" ある事を言っている。

(又、これが knot の non-invertibility の判定の難がさ

を物語っている。)

定理 (Sakai [14]) 任意の Alexander polynomial は strongly invertible knot の Alexander polynomial として実現できる。

§2. Strongly invertible knot と θ -curve

以下 strongly invertible knot K を、その strong. invertibility を与える S^3 上の involution h と対にして、 (K, h) で表わす。Waldhausen [19] に依り、 h は S^3 の standard rotation と同値である。

定義 1 (K_1, h_1) と (K_2, h_2) が同値であるとは、 S^3 上の ori. pres. homeo f で次の条件を満たすものが有る時をいう。[この時、 $(K_1, h_1) \cong (K_2, h_2)$ と表わす。]

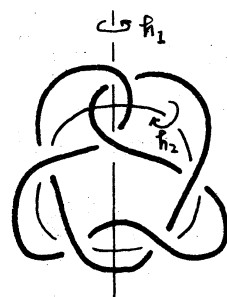
$$(1) \quad f(K_1) = K_2$$

$$(2) \quad f \circ h_1 \circ f^{-1} = h_2$$

註 (1) 右の図でわかる様に、

$K_1 \cong K_2$ であっても、 $(K_1, h_1) \cong (K_2, h_2)$

となるとは限らない。



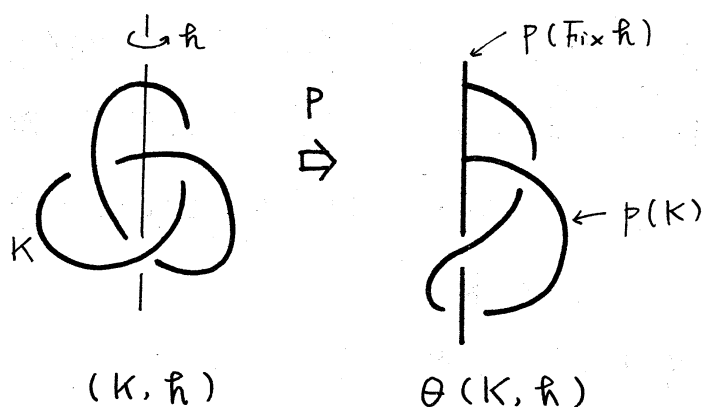
(2) Knot K を固定した時、その strong invertibility を与える involution は 高々 有限個 である。

(Kojima [9])

(3) Hyperbolic knot K は その様な involution は 高々 二つ である (cf. [1, 16])

(K, h) を strongly invertible knot とする時、
 $p: S^3 \rightarrow S^3/h \cong S^3$ を projection とする。

定義 2 $p(\text{Fix } h) \cup p(K)$ を $\theta(K, h)$ で
 表わし、 (K, h) に付随した θ -curve と呼ぶ。



Knot K の性質は、次の様に $\theta(K, h)$ の性質に
 反映する。(証明は [15] と同様の方法で出来る。)

定理 1(1) (Marumoto [11]) $K: \text{trivial} \Leftrightarrow \theta(K, h): \text{trivial}$ (2) $K: \text{prime} \Leftrightarrow \theta(K, h): \text{irreducible}$ 但し、 θ -curve θ が irreducible であるとは、

θ が local knot を持たなく、かつ prime (ie θ は non-trivial で、又 θ と 3 点で交わる任意の 2-sphere は一方で $\bigcirc$ を bound する) である事とする。

§ 3. Strongly invertible knot の同変一意分解

まず、二つの strongly invertible knots (K_i, h_i) ($i=1,2$) の equivariant connected sum $(K_1, h_1) \# (K_2, h_2)$ を定義する。各 i ($i=1,2$) に對し、 $Z_i \in \text{Fix } h_i \cap K_i$ の点、 $B_i \subset Z_i$ の equivariant regular nbd. とし、 $f: (\partial B_1, \partial B_1 \cap K_1) \rightarrow (\partial B_2, \partial B_2 \cap K_2)$ を ori.-rev. equivariant homeomorphism とする。この時 $\{(S^3, K_1) - (\dot{B}_1, \dot{B}_1 \cap K_1)\} \cup_f \{(S^3, K_2) - (\dot{B}_2, \dot{B}_2 \cap K_2)\}$ は $(S^3, K_1 \# K_2)$ を与え、その上には、 $K_1 \# K_2$ の strong invertibility を与える involution $h = (h_1|_{S^3 - \dot{B}_1}) \cup (h_2|_{S^3 - \dot{B}_2})$ がある。この pair $(K_1 \# K_2, h)$ を $(K_1, h_1) \# (K_2, h_2)$ と定める。しかし、この定義には次の ambiguity がある。

(1) $Z_i \in \text{Fix } h_i \cap K_i \cong S^0$ ($i=1,2$) の並び方。

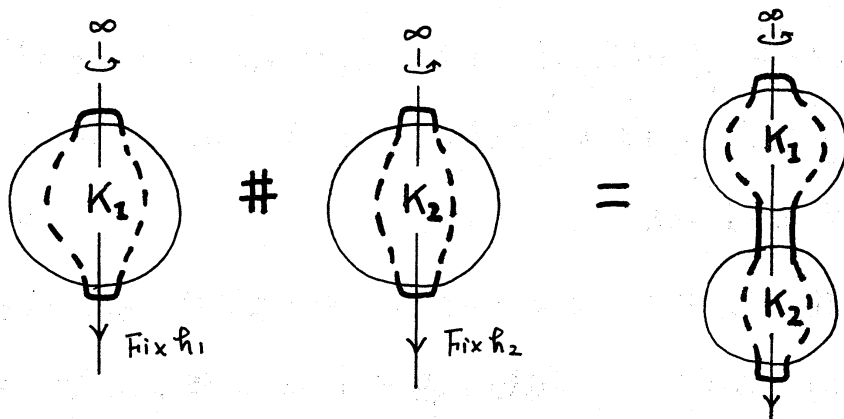
(2) Equivariant homeo. f の取り方。 (f の equivariant isotopy class rel $\partial B_1 \cap K_1$ は f の $\partial B_1 \cap \text{Fix } h_1$ 及び $\partial B_1 \cap K_2$ への制限で定まる。しかし、出来上がる connected sum の equivalence class は $f|_{\partial B_1 \cap K_1}$ には依らない。))

従って、equivariant connected sum を定義するには、例えば次の様な情報を (K, h) に付加しておく必要がある。

(1) $\text{Fix } h$ の向き $[\text{Fix } h]$

(2) $\text{Fix } h$ 上の "base point" ∞ ($\infty \notin K$) .

この情報付きの strongly invertible knot $\{(K, h), [\text{Fix } h], \infty\}$ の connected sum を次の図の様に定義できる。



このセクションでは以下 (K, h) には上の情報が付いているものとする。 Strongly invertible knot の列 $\{(K_i, h_i)\}_{i=1}^n$ に対して $\#_{i=1}^n (K_i, h_i) = (((K_1, h_1) \# (K_2, h_2)) \# (K_3, h_3)) \# \dots \# (K_n, h_n)$ と定義する。この和は非可換である事に注意されたい。

(K, h) が上の意味で non-trivial strongly invertible knot

二つの和に表わせたり時、 (K, h) は prime であると言う。

(K, h) が prime であるための必要十分条件は $\theta(K, h)$ が prime である事であり、それは定理 1 により次と同値である。

(1) K : prime, 又は

(2) $K = R \# R$ (R : prime) と表わせ、 h はその factor を入れ替える involution。(これを以下 $D(R)$ で表わす。)

この時、次の一意分解定理が成り立つ。

定理 2 (1) 任意の strongly invertible knot (K, h) は prime decomposition $\#_{i=1}^m (K_i, h_i)$ を持つ。又、この時、和は

$(\#_{i=1}^r (K_i, h_i)) \# (\#_{j=1}^s D(R_j))$ (K_i, R_j : prime) の形に直せる。

(2) $(\#_{i=1}^{r'} (K'_i, h'_i)) \# (\#_{j=1}^{s'} D(R'_j))$ をもう一つの prime decomposition とすると次が成り立つ。

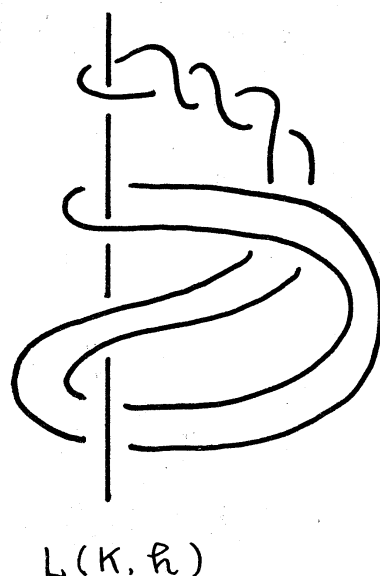
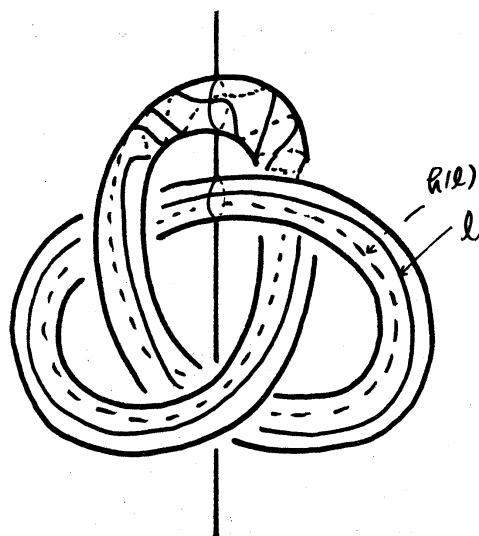
(i) $r = r'$, $(K_i, h_i) \cong (K'_i, h'_i)$ ($1 \leq i \leq r$)

(ii) $s = s'$, 順番と適当に入れ替えれば $R_j \cong R'_j$.

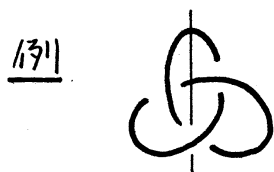
この定理の証明は、 θ -curve の unique prime decomposition を証明する事により成される。

§ 4. ある双項式不変量

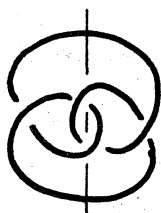
Strongly invertible knot (K, h) に対し, $N(K)$ を K の equivariant regular nbd., $l \in N(K)$ の preferred longitude で $h(l) \cap l = \emptyset$ とするものをとす。この時 $L(K, h) = p(\text{Fix } h) \cup p(l) \subset S^3/h \cong S^3$ とおく。



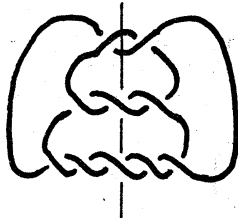
$L(K, h)$ は linking number が 0 の 2-component link であるので, Kojima-Yamasaki [10] (cf. [5]) の η -function が定義できる。($S^3 - p(\text{Fix } h)$ の infinite cyclic cover $\cong S^1 \times D^2$ への $p(l)$ の lift 達の " $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -linking number") これを (K, h) の η -polynomial と呼び $\eta_{(K, h)}(t)$ で表わす。



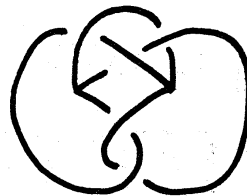
$$-t^{-2} + 2 - t^2$$



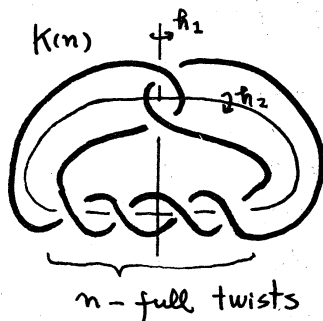
$$-t^3 + t^{-2} + t^{-1} - 2 + t + t^2 - t^3$$



$$-2t^{-2} + 4 - 2t^2$$



$\theta(K, h) = \text{Kinoshita's } \theta\text{-curve []}$



$$\eta_{(K(n), h_1)}(t) = \left[\frac{n}{2}\right] t^{-3} - n t^{-2} - \left[\frac{n}{2}\right] t^{-1} + 2n \\ - \left[\frac{n}{2}\right] t - n t^2 + \left[\frac{n}{2}\right] t^3$$

$$\eta_{(K(n), h_2)}(t) = -t^{-(2n+1)} + t^{-2n} + t^{2n} - t^{(2n+1)}$$

(特 $\hookrightarrow (K(n), h_1) \neq (K(n), h_2)$)

定理 3. (1) $\eta_{(K, h)}(t)$ は次の条件を満足する。

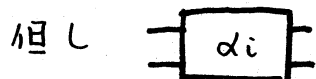
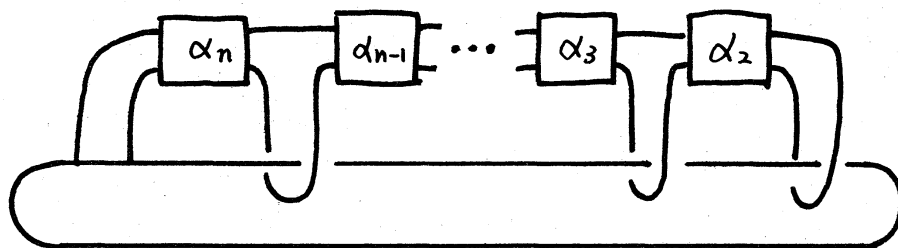
$$\begin{cases} \eta_{(K, h)}(t) = \eta_{(K, h)}(t^{-1}) \\ \eta_{(K, h)}(1) = \eta_{(K, h)}(-1) = 0 \end{cases}$$

(2) 逆に、上の条件を満足する整数係数 Laurent polynomial は或る strongly invertible knot の η -polynomial になる。

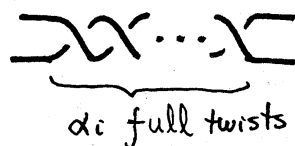
証明 (1) 対称性と $\eta_{(K, h)}(1) = 0$ は η -function の一般的性質である (cf. [10])。 $\eta_{(K, h)}(-1)$ は、 $\eta_{(K, h)}(t)$ を $\mathbb{Z}\langle t | t^2 = 1 \rangle$ で見た時の t の係数が $p(1)$ の $(S^3, p(\text{Fix } h))$ の double cover

$\cong S^3$ における逆像 $= l \cup h(l)$ の linking number $= 0$ に等しい事から出る。

(2) 次の図で表わされる θ -curve を $\theta(K, h)$ とし、strongly invertible knot の η -polynomial を $\eta(t)$ とおく。



但し



$$\text{すると、 } \eta(t) = A'''(t) + \alpha_2(t^{-2} + t^2) + \sum_{i=3}^n \alpha_i(t^{-i} - 2t^{-i+1} + t^{-i+2} + t^{i-2} - 2t^{i-1} + t^i)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{但し } A'''(t) \text{ は } \beta t^{-1} + \gamma + \beta t \quad (\beta, \gamma \in \mathbb{Z}) \text{ の形の式で} \\ \eta(1) = \eta(-1) = 0 \text{ とする式として特徴付けられる。} \end{array} \right)$$

従って $\{\alpha_i\}_{2 \leq i \leq n}$ を適当に選べば (1) の条件を満足する多項式をすべて実現出来る。

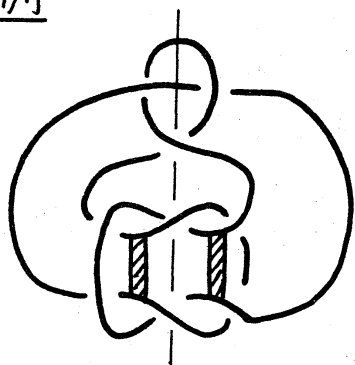
証 上の (2) の証明は本質的に Sakai [13] の議論と同じである。ここでは、任意の "Alexander polynomial" に對して、それを Alexander polynomial に持つ unknotting number 1 の knot が構成されているが、その knot は、上の例で $p(l)$ に對して 1-surgery (すなわち $p(\text{Fix } h)$) が作る knot に等しい。(cf. Proposition 4 of [4]).

§5. 同変コホモロジー

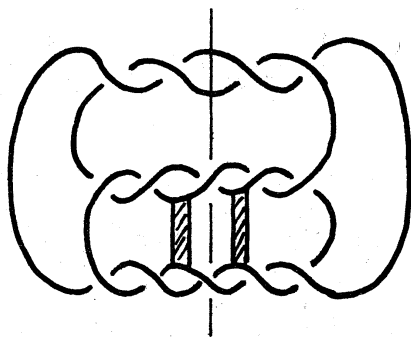
二つの strongly invertible knots (K_0, h_0) と (K_1, h_1) が equivariantly cobordant であるとは、次の条件を満足する $S^3 \times I$ 内の locally flat annulus A 及び $\nu(S^3 \times I, A)$ 上の P.L. (or smooth) involution h が存在する事とする。

$$(*) \quad \partial \{(S^3 \times I, A), h\} = (K_0, h_0) \times 0 \cup (K_1, h_1) \times 1$$

例



$$8_{10} \sim 3_1$$



$$K(p, -p, 2r) \sim 0$$

§3 で考えた情報付きの strongly invertible knot 全体から equivariantly cobordant なものを同一視して出来る集合 EC は 演算 $\#$ に関して (非可換) 群になるか、これに関して次が成り立つ。

定理 4. η -polynomial は 群 EC から abel 群 $\mathbb{Z}\langle + \rangle$ への 準同型写像を与える。すなわち、

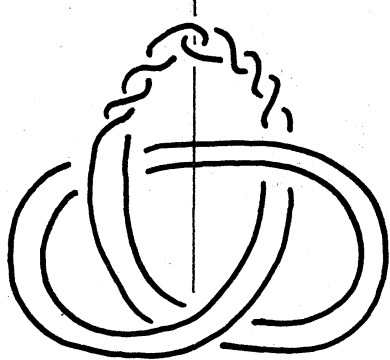
(1) $(K_0, h_0) \sim (K_1, h_1)$ (equivariantly cobordant)

$$\text{then } \eta_{(K_0, h_0)}(t) = \eta_{(K_1, h_1)}(t).$$

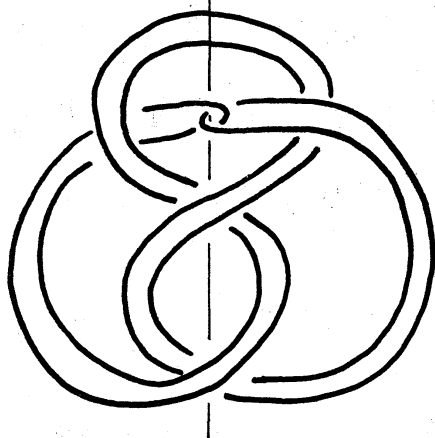
$$(2) \quad \eta_{(K_1, h_1) \# (K_2, h_2)}(t) = \eta_{(K_1, h_1)}(t) + \eta_{(K_2, h_2)}(t)$$

証明 (1) $(K_0, h_0) \sim (K_1, h_1)$ なる $L(K_0, h_0)$ と $L(K_1, h_1)$ が cobordant である事かわかる。従って η -function の cobordism に関する不変性より (1) を得る。

例 次の knot は equivariantly slice じゃない。



$$\eta(t) = [6, 0, -4, 0, 1]$$



$$\eta(t) = [-6, 2, 4, -3, -1, 1]$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{もし } [a_0, a_1, \dots, a_n] \\ = a_0 + \sum_{i \geq 0} a_i (t^{-i} + t^i) \end{array} \right)$$

上の二つの knot の Alexander polynomial は共に 1 である事に注意!

しかし、この equivariant cobordism と通常の knot cobordism の間には大きな差がある。例えば、 b_1 knot は slice であるが、§4 の例 ($b_1 = K(2)$) からわかる様に、それは equivariant には slice でない。すなわち γ を EC から通常の knot cobordism group C への自然な写像とすると、 $\text{Ker } \gamma \neq \{1\}$ となる。最後に、次の問題を挙げておく。

問題 γ は全射か？ すなわち、任意の knot は strongly invertible knot に cobordant か？

References

- [1] C.M. Boileau: Noeuds rigidement inversibles. preprint.
- [2] F. Bonahon and L. Siebenmann: Algebraic knots. in preparation.
- [3] R.H. Fox: Some problems in knot theory. Topology of 3-manifolds, pp.168-176, Prentice-Hall, New York, 1962.
- [4] S. Furusawa and M. Sakuma: Dehn surgery on symmetric knots, to appear in Math. Sem. Notes, Kobe Univ.
- [5] D. Goldsmith: A linking invariant of classical link concordance. Lect. Notes in Math. 685, pp.135-170, Springer-Verlag, 1978.
- [6] R. Hartley: Knots and involution. Math. Z. 171 (1980), 175-185.
- [7] _____: Identifying non-invertible knots. Topology 22 (1982), 137-145.
- [8] A. Kawauchi: The invertibility problem on amphicheiral excellent knots. Proc. Japan Acad. 55 (1979), 399-402.

- [9] S. Kojima: Finiteness of symmetries of 3-manifolds. preprint
- [10] _____ and M. Yamasaki: Some new invariants of links.
Inv. Math. 54 (1979), 213-228.
- [11] Y. Marumoto: Relations between some conjectures in knot
theory. Math Sem. Notes, Kobe Univ. 5 (1977), 377-388.
- [12] R. Riley: An elliptic path from parabolic representations
to hyperbolic structures. Lect. Notes in Math. 722, pp.99-
133, Springer-Verlag, 1979.
- [13] T. Sakai: A remark on the Alexander polynomials of knots.
Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 5 (1977), 451-456.
- [14] _____: Polynomials of invertible knots. Math. Ann. 266
(1983), 229-232.
- [15] M. Sakuma: Periods of composite links. Math. Sem. Notes,
Kobe Univ. 9 (1981), 445-452.
- [16] _____: '83年までの古典的 knot theory. 代数幾何へ応用と
見込んだトポロジー. pp.35-140, 1983.
- [17] W.P. Thurston: Three dimensional manifolds, Kleinian groups
and hyperbolic geometry. Bull A.M.S. 6 (1982), 357-381.
- [18] H.F. Trotter: Noninvertible knots exist. Topology 2 (1964),
275-280.
- [19] F. Waldhausen: On irreducible 3-manifolds which are suffi-
ciently large. Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.
- [20] W. Whitten: Inverting double knots: Pacific J. Math. 97
(1981), 209-216.