

Jet bundle and Bäcklund map

筑波大 物理 小寺 武康
柴田 良一

今までによく知られている非線型発展方程式に対する、
逆散乱法をさぐり、Bäcklund 変換について、以下の通りに
Jet bundle 上の写像として定義する。

Pirani et al. にしたがって、Bäcklund map を、定義
する。

$$\phi: J^h(M, N_1) \times N_2 \longrightarrow J^1(M, N_2)$$

ここで、実際の問題のため、

M : 独立変数の作る空間、その座標を

$$\{x^1, x^2, \dots, x^a, \dots, x^m\}$$

N_1 : 古い従属変数の作る空間、その座標を

$$\{z^1, z^2, \dots, z^{a'}, \dots, z^{n'}\}$$

N_2 : 新しい従属変数の作る空間、その座標を

$$\{y^1, y^2, \dots, y^A, \dots, y^{n'}\}$$

一般には、 $n \neq n'$

前に導入した. ϕ は, 以下の性質をもつ

1)

$$\begin{array}{ccc} J^R(M, N_1) \times N_2 & \xrightarrow{\phi} & J^1(M, N_2) \\ & \searrow \text{pr}_2 & \downarrow \beta \\ & & N_2 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{ccc} J^R(M, N_1) \times N_2 & \xrightarrow{\phi} & J^1(M, N_2) \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \alpha \\ J^R(M, N_1) & \xrightarrow{\alpha} & M \end{array}$$

これらの図が可換である. $\alpha = \tau$

$$\alpha: J^R(M, N_1) \longrightarrow M$$

$$\beta: J^R(M, N_1) \longrightarrow N_1$$

非線型発展方程式は, この ϕ に対する, 可積分条件である.

$\Omega^R(M, N_1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^\mu = dz^\mu - z_a^\mu dx^a \\ \theta_a^\mu = dz_a^\mu - z_{ab}^\mu dx^b \\ \dots \\ \theta_{a^1 \dots a^{R-1}}^\mu = dz_{a^1 \dots a^{R-1}}^\mu - z_{a^1 \dots a^{R-1} b}^\mu dx^b \end{array} \right.$$

から生成される ideal とする。 $\Omega^R(M, N_1)$ を $J^R(M, N_1)$ 上の contact module と呼ぶ。

さらに、次の写像を定義する。

$$\pi_m^L : J^L(M, N_1) \longrightarrow J^m(M, N_1)$$

$$\widetilde{\pi}_m^L := \pi_m^L \times \text{id}_{N_2}$$

$$: J^L(M, N_1) \times N_2 \longrightarrow J^m(M, N_1) \times N_2$$

これより、

$$\widetilde{\Omega}^{L, \phi} := \text{pr}_1^* \Omega^L(M, N_1) + \widetilde{\pi}_m^{L*} \phi^* \Omega^1(M, N_2)$$

ϕ に対する可積分条件を述べた。非線型発展方程式は、

$$\pi_m^{R+1*} \phi^* d\Omega^1(M, N_2) \subset I(\widetilde{\Omega}^{R+1, \phi})$$

で与えられる。

この条件を具体的に、座標を入れて書くと、

$$\Omega^1(M, N_2) = \{ \theta^A = dy^A - y_a^A dx^a \}$$

$$\phi^* \Omega^1(M, N_2) = \{ \phi^* \theta^A$$

$$= dy^A - \phi_a^A(x^a; z^u, z_a^u, \dots; y^A) dx^a \}$$

したがって

$$\phi^* d\Omega^1(M, N_2) = d\phi^* \Omega^1(M, N_2)$$

$$= -d\phi_a^A(x^a; z^u, z_a^u, \dots; y^A) dx^a$$

$$\equiv \widetilde{D}_c^{(R+1)} \phi_b^A dx^b \wedge dx^c$$

$$\text{mod } (I(\widetilde{\Omega}^{R+1, \phi}))$$

ここで

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_c^{(R+1)} &= \frac{\partial}{\partial x^c} + z_c^\mu \frac{\partial}{\partial z^\mu} + z_{ac}^\mu \frac{\partial}{\partial z_a^\mu} + \cdots \\ &\quad + z_{a_1 \dots a^R c}^\mu \frac{\partial}{\partial z_{a_1 \dots a^R}^\mu} + \phi_c^A \frac{\partial}{\partial y^A}\end{aligned}$$

したがって

$$\widetilde{D}_c^{(R+1)} \phi_b^A - \widetilde{D}_b^{(R+1)} \phi_c^A = 0$$

が可積分条件である。

以下 Bäcklund map の例を 2, 3 上げ、さらに保存則もこの場合の特別なものと見なされる。

Ex. 1. A. K. N. S. 系

$$M : (x^1, x^2)$$

$$N_1 : (\vartheta, r)$$

$$N_2 : (4_1, 4_2)$$

今、問題にしている非線型発展方程式の微分の最高次を、 $(R+1)$ とする。

$$\phi : J^R(M, N_1) \times N_2 \longrightarrow J^1(M, N_2)$$

$$(x^1, x^2; \vartheta, r, \vartheta_{x^1}, r_{x^1}, \dots, 4_1, 4_2)$$

$$\longmapsto (x^1, x^2, 4_1, 4_2, 4_{1,x^1}, 4_{1,x^2}, 4_{2,x^1}, 4_{2,x^2})$$

$$4_{1,x^1} dx^1 + 4_{1,x^2} dx^2 = (\vartheta 4_1 + \vartheta 4_2) dx^1$$

$$+ (A(\vartheta, r, \dots) 4_1 + B(\vartheta, r, \dots) 4_2) dx^2$$

$$4_{2,x^1} dx^1 + 4_{2,x^2} dx^2 = (r 4_1 - \vartheta 4_2) dx^1$$

$$+ (C(\vartheta, r, \dots) 4_1 - A(\vartheta, r, \dots) 4_2) dx^2$$

A, B, C を適当なものを. 選ぶことにし, 2. 非線形発展方程式が, 可積分条件として得られる。

Ex. 2. K-dV 方程式

$$u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$$

微分の最高は, 3次であるため, Backlund map

$$\phi: J^2(M, N_1) \times N_2 \longrightarrow J^2(M, N_2)$$

$$M = (x, t)$$

$$N_1 = (u)$$

$$N_2 = (v)$$

$$\phi: (x, t, u_x, u_t, \dots, u_{xx}, u_{xt}; v)$$

$$\longmapsto (x, t; v_x, v_t)$$

$$\begin{cases} \phi_x = v_x = -2u - v^2 \\ \phi_t = v_t = 8u^2 + 4uv^2 + 2u_{xx} - 4u_x v \end{cases}$$

$$\tilde{D}_t^3 \phi_x - \tilde{D}_x^3 \phi_t = 0$$

$$\Rightarrow u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$$

v の満たすべき方程式

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0$$

今まで、取り扱ってきた例では、新しい従属変数と古いものが、満足すべき方程式が、異なっていた。しかし、狭い意味での Bäcklund 変換は、同じ方程式を消すものである。この例を上げる。

Ex. 3

sine-Gordon 方程式

$$u_{xt} - \sin u = 0$$

$$\phi: J^1(M, N_1) \times N_2 \longrightarrow J^1(M, N_2)$$

$$M = (x, t), \quad N_1 = (u), \quad N_2 = (v)$$

$$:(x, t; u_x, u_t, v) \longmapsto (x, t; v_x, v_t)$$

$$\begin{cases} \phi_x = v_x = u_x + 2a \sin \frac{1}{2}(u+v) \\ \phi_t = v_t = -u_t + 2a^{-1} \sin \frac{1}{2}(v-u) \end{cases}$$

$$\tilde{D}_x^2 \phi_t - \tilde{D}_t^2 \phi_x = 0$$

$$\Rightarrow u_{xt} - \sin u = 0$$

v の満足すべき方程式は、

$$v_{xt} - \sin v = 0$$

最後の例として、保存則とはどのような写像の一種と考えられる。

Ex. 4

K-dV 方程式の保存則

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (\text{前と、} x, t \text{ の scale の変換する})$$

$$\phi: J^2(M, N_1) \times N_2 \longrightarrow J^1(M, N_2)$$

$$M = (x, t), \quad N_1 = (u), \quad N_2 = (v)$$

今までの例とは、 ϕ_x, ϕ_t へ、新しい従属変数が入っているが、含まれているものもある。

$$\theta_1 = dy - u dx + (3u^2 + u_{xx}) dt$$

$$\theta_2 = dy - \frac{1}{2} u^2 dx - (-u u_{xx} + \frac{1}{2} u x^2 - 2u^3) dt$$

の2通りの写像が考えられる。そこで、prolong する。

$$D_x(u_t + u u_x + u_{xxx}) = 0$$

$$\phi: J^3(M, N_1) \times N_2 \longrightarrow J^1(M, N_2)$$

$$\theta_3 = dy - (\frac{1}{6} u x^2 - \frac{1}{3} u^3) dx$$

$$- (-\frac{1}{3} u_x u_{xxx} + \frac{1}{6} u_{xt}^2 + u^2 u_{xx} - 2u u_x^2 + \frac{3}{2} u^4) dt$$

と、1通りの写像が得られる。そこで、prolong する。

次に、次のように得られる。

参考文献

Harrison and Estabrook, J. Math. Phys. 12 (1971) 653

Pirani, Robinson and Shadrwick

'Local Jet Bundle Formulation of Bäcklund

Transformations' Math. Phys. Studies. Vol. 1