

S^1 上の群作用の位相的エントロピーについて

早大 教育学部 渡辺展也

Nobuya Watanabe

葉層構造のエントロピーの定義が Ghys, Langevin, Walczak によって [G-L-W] で与えられた。葉層構造が suspension で得られている場合は、それは群作用のエントロピーと関係している。ここでは 曲面の基本群の S^1 への作用について、エントロピーと作用のオイラー数との関係を調べた。

Σ_g を向きづけ可能閉曲面で ジーナスが g 個のものとする。 Σ_g の基本群を Γ^g とする。 Γ^g の生成集合 Γ_0^g を

$$\Gamma_0^g = \{ \alpha_i, \beta_i, \alpha_i^{-1}, \beta_i^{-1} ; 1 \leq i \leq g \}$$

とする。ここで Γ_0^g は Γ^g の次のように表現するとする。

$$\Gamma^g = \langle \alpha_i, \beta_i, 1 \leq i \leq g ; \prod_{i=1}^g \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} \rangle$$

G^+ を $\mathbb{R}^1$ の向きを保つ同相写像のなす群とする。準同型写像 $\phi: \Gamma^g \rightarrow G^+$ に対して、 $\chi(\phi)$ を ϕ に付随した S^1 -bundle の Euler 数とする。すると Milnor [Mi] と Wood [Wo] によって $|\chi(\phi)| \leq |\chi(\Sigma_g)|$ という不等式が成り立つ。

次に $gr(\Gamma^g, \Gamma_0^g)$ を Γ^g の Γ_0^g に関する指數的成長度とする。

$h(\phi, \Gamma_0^g)$ を ϕ の Γ_0^g に関する位相的エントロピーとする。

定理は次の2つである。

定理1 $\phi: \Gamma^g \rightarrow G^+$ を準同型写像とする。 $\chi(\phi) \neq 0$ なら $h(\phi, \Gamma_0^g) > 0$ 。

定理2 $\phi: \Gamma^g \rightarrow G^+$ を準同型写像とする。 $|\chi(\phi)| = |\chi(\Sigma_g)|$ なら, $h(\phi, \Gamma_0^g) = g_r(\Gamma^g, \Gamma_0^g)$ 。

1 準備 Γ を有限生成群とし Γ_0 を Γ の対称生成集合とする。 (X, d) を compact 距離空間とし $\phi: \Gamma \rightarrow \text{Homeo}(X)$ を準同型とする。 Γ は Γ_0 に関する語ノルム $\|\cdot\|$ とする。

$$B_n(\Gamma, \Gamma_0) = \{ \gamma \in \Gamma; \|\gamma\| \leq n \}$$
 とおく。

X の新しい距離 d_n を次で定義する。 $d_n(x, y) = \max_{\gamma \in B_n} d(\phi(\gamma)x, \phi(\gamma)y)$ 。次に n を自然数 ε を正の数とする。 $E \subset X$ が (n, ε) -separated set とは, 任意の $x, y \in E$ ($x \neq y$) に対して $d_n(x, y) > \varepsilon$ となるときをいう。

$t(n, \varepsilon) = \max \{ \#E \mid E \text{ は } (n, \varepsilon)\text{-separated set} \}$ とおく。すると ϕ の Γ_0 に関するトポロジカルエントロピーが次で定義される。

$$h(\phi, \Gamma_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log t(n, \varepsilon)。$$

命題1 $\phi, \psi: \Gamma \rightarrow \text{Homeo}(X)$ を準同型とする。もし連続な全射 $f: X \rightarrow X$ があって $f \circ \phi = \psi \circ f$ なら $h(\phi) \geq h(\psi)$ 。

$\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Homeo}(S^1)$ に対しては位相的エントロピーは常に

0だが, 同じようにして次の証明される。

命題2 $\phi: \mathcal{P} \rightarrow \text{Homeo}(S^1)$ を準同型とする。すると

$$h(\phi, \mathcal{P}_0) \leq g_r(\mathcal{P}, \mathcal{P}_0) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \# B_n(\mathcal{P}, \mathcal{P}_0).$$

次に K を一次元多様体として $\phi: \mathcal{P} \rightarrow \text{Homeo}(K)$ を準同型とする。 $z \in K$ の軌道が resilient 軌道 であるとは, $x_1, x_2 \in \mathcal{P}$ が存在して $\phi(x_1)z \neq z$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_2^n x_1)z = z$ となること。

命題3 ([G-L-W]) もし resilient 軌道が存在するならば ϕ の位相的エントロピーは正。

2. 定理1の証明 定理1の証明には, 次の命題を使う。

命題4 ([Ma-1]) 次の同値。 $\phi: \mathcal{P} \rightarrow G^+$ を準同型とする。

(1) $\phi^*(e_R) \neq 0$

(2) ϕ の極小集合 M と $x \in \mathcal{P}$ があって $\phi(x)|_M \neq \text{id}$, $\phi(x)$ は M に固定点を持つ。ここで e_R は G^+ の有界オイラー類。

定理1の証明をする。 $\phi^*(e_R) \neq 0$ としてよい。 $S_x = \{x \in S^1; \phi(x)x \neq x\}$ とおく。命題4より ϕ の極小集合 M と $x \in \mathcal{P}$ があって $S_x \cap M \neq \emptyset$, $S_x \neq S^1$ となる。 $x \in S_x \cap M$ とする。 x を含む S^1 の連結成分 I は開区間である。 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x^n)x$ は I の端点となる。 $M \ni y$ となる。 ϕ の軌道は M で稠密なので, y の軌道は開区間と交わる。よって y は resilient 軌道である。

3 定理 2 の証明 Σ_g には負の定曲率の Riemann 計量が入る。
 すると Σ_g の universal covering は Poincare 円板 Δ と同一視され P^g は Δ に covering transformation として作用し、これは $\partial\Delta = S^1$ の作用を定める。この作用は Fuchsian 作用と呼ばれる。
 Goldman は $[G]$ で $\phi: P^g \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{Isom}^+(\Delta)$ が Fuchsian であるためには $\chi(\phi) = \chi(\Sigma_g)$ であることを示した。
 よって定理 2 を証明するには Fuchsian 作用 $\tilde{\phi}$ に対峙してあげればよい。なぜなら $\phi: P^g \rightarrow G^+$ を準同型で $|\chi(\phi)| = |\chi(\Sigma_g)|$ なるものがあると、松本氏 [Ma-2] により ϕ と $\tilde{\phi}$ は semi-conjugate する。すると $h(\tilde{\phi}, P_0^g) \leq h(\phi, P_0^g) \leq g_r(P^g, P_0^g)$ だからである。

$M_n = \#(B_n(P^g, P_0^g) - B_{n-1}(P^g, P_0^g))$ とおく。すると $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log M_n = g_r(P^g, P_0^g)$ となる。又、 $P^g \in \text{Fuchsian 群}$ $\phi(P^g)$ と同一視する。 P^g による S^1 の点の境界展開を考える。([B], [S])。各 $\gamma \in P_0^g$ に対して $C(\gamma) = \{z \in \Delta; |D\gamma(z)| = 1\}$ とおく。すると $\gamma C(\gamma) = C(\gamma^{-1})$ である。 $C(\gamma)$ ($\gamma \in P_0^g$) で囲まれる 4 角形 R は P^g の基本領域である。 P_0^g の元を $C(\gamma_1), \dots, C(\gamma_{4g})$ が反時計回りに R を囲むように $\gamma_1, \dots, \gamma_{4g}$ と名前をつける。 P_i と Q_i を反時計回りの順で $C(\gamma_i)$ の端点とする。 $f: \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$ を $f|_{[P_i, P_{i+1}]}(x) = \gamma_i x$ で定義する。 $x \in \partial\Delta$ の f -展開とは列 $x_f =$

$x_{i_0} x_{i_1} \dots, x_{i_j} \in \Gamma_0^g$ のことを $f^n(x) \in [P_{i_n}, P_{i_{n+1}})$ と表わしているもののことをいふ。 $\Sigma^+ = \{x_f : x \in \Delta\}$ とする。
 この対応は 1 対 1 である。 $F(\Sigma^+)$ を Σ^+ の元に対応する有限列の集合とする。 C-Series は [5] の中で 各 γ は $F(\Sigma^+)$ の中に 唯一の一番短かい代表元 ω_γ を持つことを示している。
 $\omega = e_1 e_2 \dots e_k \in F(\Sigma^+)$ に対して $Z(\omega) = \{x \in \partial\Delta ; x_f = e_1 e_2 \dots e_k \dots\}$ とおく。 γ と $Z(\omega)$ は区間となる。 $a_i \in [P_i, P_{i+1})$ の中点とし $\varepsilon = \frac{1}{3} \min_i |P_i, P_{i+1}|$ とおく。
 $E_n = \{\gamma^T a_{i_n} : \omega_\gamma = x_{i_0} \dots x_{i_n}, \gamma \in B_n - B_{n-1}\}$ とおく。 各 $\gamma \in B_n - B_{n-1}$ に対して, γ は $Z(\omega_\gamma) \in [P_{i_n}, P_{i_{n+1}})$ に写す。 ことを $\omega_\gamma = x_{i_0} \dots x_{i_n}$ 。 かつ E_n は (n, ε) -separated set である。 $t(n, \varepsilon) \geq \#E = M_n$ であるが定理 2 の証明が終了した。

参考文献

- [B] R. Bowen, Hausdorff dimension of quasi-circles, Publ. Math. I.H.E.S, 50 (1970), 11-25.
- [G-L-W] E. Ghys, R. Langevin and P. Walczak, Entropie geometrique des feuilletages, Acta Math. 168 (1988), 105-142.
- [Go] W.M. Goldman, Discontinuous groups and the Euler class, Thesis, Berkley.
- [Ma-1] S. Matsumoto, Numerical invariants for semiconjug

acy of homeomorphisms of the circle, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), 163-168.

[Ma-2] S. Matsumoto, Some remarks on foliated S^1 -bundle, Invent. Math. 90, (1987) 343-358.

[Mi] J. Milnor, On the existence of a connection with curvature zero, Comment. Math. Helv. 32 (1958), 215-223

[S] C. Series, Geometrical Markov coding of geodesics on surfaces of constant negative curvature, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 6 (1986), 601-625.

[Wo] J. Wood, Bundles with totally disconnected structure group, Comment. Math. Helv. 46 (1971), 257-273.