

弱順序極小構造上での定義可能な関数について

近畿大学・工学部 田中 広志

Hiroshi Tanaka

Faculty of Engineering, Kinki University

概要

アーベル群の順序極小構造拡張において, definable で有界かつ閉な集合の definable 連続写像での像は, また definable で有界かつ閉であることが知られている。このノートでは, この結果の弱順序極小構造版について, いくつかの得られた結果について記述する。

1 はじめに

まず, 数理論理学を展開していく上で必要ないくつかの言葉, 記号を定義していくが, 正確な定義については [6] または [3] に譲る。

論理記号 $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ (でない), $\forall, \exists$, 等号記号 $=$, 変数記号 $x, y, \dots$, 定数記号, 関数記号, 関係記号の集合を言語という。通常, 論理記号, 等号記号, 変数記号は明示せず $L = \{0, +, <\}$ などと書く。

言語 L の有限記号列の中で意味のあるものを L -論理式という。例えば, 言語 $L = \{\cdot\}$ で「 $\forall z(x \cdot z = y \cdot z \rightarrow x = y)$ 」は L -論理式で, 「 $x \rightarrow \vee \wedge y \wedge$ 」は L -論理式ではない。また L -論理式の中で, 特に自由変数を含まないものを L -閉論理式という。 L -論理式を表す記号として通常 $\varphi, \psi, \varphi(x), \psi(x)$ などを使う (x は自由変数の列)。

集合 M が, 言語 L の定数記号 c に対して M の特定の元 c^M , m 変数関数記号 F には m 変数関数 $F^M : M^m \rightarrow M$, n 変数関係記号 R には $R^M \subseteq M^n$ が定まっているとき, M は L -構造であるという。 c^M を定数記号 c の M における解釈とよぶ。同様に, F^M は関数記号 F の M における解釈, R^M は関係記号 R の M における解釈とよぶ。

M を L -構造とする。 L -閉論理式 φ において, φ が M において成り立つとき $M \models \varphi$ と書き, 逆に成り立たないとき $M \not\models \varphi$ と書く。また, T を L -閉論理式の集合とする。 T のすべての L -閉論理式が M で成り立つとき, M は T のモデルであるといい, $M \models T$

2000 Mathematics Subject Classification. 03C64.

Key Words and Phrases. Weakly o-minimal, cell decomposition and strongly continuous.

と書く。このとき、次の定理が知られている。

定理 1 (Gödel の完全性定理 [5]). L は言語とし, T を L -閉論理式の集合とする。このとき次は同値である。

1. T は無矛盾である。
2. T はモデルを持つ。

A を L -構造 M の部分集合とする。言語 L に A の元を定数記号として付け加えた言語を $L(A)$ と書く。 $X \subseteq M^n$ がある $L(A)$ -論理式の解集合になっているとき, **definable** であるという。

以後, 言語 L は特には明示せず, 単に構造, 論理式, 閉論理式と書くことにする。

2 弱順序極小構造

構造 $M = (M, <, \dots)$ を端点を持たない全順序構造とする。

M の部分集合 A が, 任意の $a, b \in A$ に対して, $(a, b) \subseteq A$ をみたすとき, A は M の凸集合であるという。さらに $\sup A, \inf A \in M \cup \{-\infty, +\infty\}$ のとき, A は M の区間であるという。構造 M の任意の definable 集合 $D \subseteq M$ が, 区間 (または凸集合) の有限和で表せるとき, M は順序極小構造 (または弱順序極小構造) であるとよぶ。理論 T の任意のモデルが順序極小 (または弱順序極小) になるとき, T は順序極小理論 (または弱順序極小理論) とよぶ。順序極小構造の理論は, 順序極小理論になることが知られている。しかしながら, 弱順序極小構造の理論は, 必ずしも弱順序極小理論になるとは限らないことが知られている ([4])。順序極小構造と弱順序極小構造に関する文献としては, [1], [2], または [7] などがある。

このノートでは, 以後の構造 M はすべて弱順序極小構造とする。

3 セル分解を許す弱順序極小構造

$C, D \subseteq M$ とする。任意の $c \in C, d \in D$ に対して $c < d$ のとき, $C < D$ と書く。空でない集合の対 $\langle C, D \rangle$ が, $C < D$ かつ $C \cup D = M$ でさらに D が最小元を持たないとき, M の切断であるという。特に C, D が definable のとき, **definable 切断** という。 M の definable 切断全体を $\overline{M}$ によって表す。任意の $a \in M$ に対して, definable 切断 $\langle (-\infty, a], (a, +\infty) \rangle$ を考えることにより, $M \subseteq \overline{M}$ とみなす。さらに $\langle C_1, D_1 \rangle < \langle C_2, D_2 \rangle$ を $C_1 \subsetneq C_2$ と定義することにより, $(M, <)$ を $(\overline{M}, <)$ の部分構造とみなす。

M (または $\overline{M}$) 上に, M (または $\overline{M}$) の开区間を基本開集合として位相を入れる。また

M^n (または $\overline{M}^n$) にはその積位相を入れる。 $A \subseteq M^n$ に対して、その位相空間論の意味での閉包を $\text{cl}(A)$ と表す。同様に $A \subseteq \overline{M}^n$ に対して、その位相空間論の意味での閉包を $\text{CL}(A)$ と表す。

n を自然数とし、 $A \subseteq M^n$ を definable とする。写像 $f: A \rightarrow \overline{M}$ において、集合 $\{\langle x, y \rangle \in A \times \overline{M} : y < f(x)\}$ が definable になるとき、 f は **definable** であるという。写像 $f: A \rightarrow \overline{M} \cup \{-\infty, \infty\}$ が **definable** とは、 f が A から $\overline{M}$ への definable 写像であるか、任意の $x \in A$ に対し $f(x) = \infty$ であるか、または任意の $x \in A$ に対し $f(x) = -\infty$ になるときをいう。

[8] に弱順序極小構造上でのセルの定義がある。

定義 2. 弱順序極小構造 $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ に対して、セルとその完備化を帰納的に定義する:

1. M の 1 点集合は **0-セル** とする。 $C \subseteq M$ が 0-セルのとき、その完備化を $\overline{C} := C$ と定める。
2. M の空でない definable 凸開集合は **1-セル** とする。 $C \subseteq M$ が 1-セルのとき、その完備化を $\overline{C} := \{x \in \overline{M} : \exists a, b \in C, a < x < b\}$ と定める。
3. $C \subseteq M^m$ が k -セルで $f: C \rightarrow M$ が definable で連続、さらに連続な拡張 $\overline{f}: \overline{C} \rightarrow \overline{M}$ をもつとき、グラフ $\Gamma(f)$ は k -セルとし、その完備化を $\overline{\Gamma(f)} := \Gamma(\overline{f})$ と定める。
4. $C \subseteq M^m$ が k -セルで $g, h: C \rightarrow \overline{M} \cup \{-\infty, \infty\}$ が definable で連続かつ連続な拡張 $\overline{g}, \overline{h}: \overline{C} \rightarrow \overline{M} \cup \{-\infty, \infty\}$ をもつとする。各 g, h は $M, \overline{M} \setminus M, \{\infty\}, \{-\infty\}$ のいずれかにすべての値を持つとする。任意の $x \in \overline{C}$ に対して $\overline{g}(x) < \overline{h}(x)$ とする。このとき、

$$(g, h)_C := \{\langle a, b \rangle \in C \times M : g(a) < b < h(a)\}$$

は $(k+1)$ -セルとし、その完備化を

$$\overline{(g, h)_C} := \{\langle a, b \rangle \in \overline{C} \times \overline{M} : \overline{g}(a) < b < \overline{h}(a)\}$$

と定める。

5. ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して、 $C \subseteq M^m$ が k -セルとなるとき、 C はセルとよぶ。

C を M^n のセルとする。definable 写像 $f: C \rightarrow \overline{M}$ が連続な拡張 $\overline{f}: \overline{C} \rightarrow \overline{M}$ をもつとき、 f は強連続であるという。

定義 3. $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ を弱順序極小構造、 $m \in \mathbb{N}$ 、 $X \subseteq M^m$ を空でない definable 集合とする。以下で、 X のセル分解を m に関して帰納的に定義する。

1. X を M の空でない definable 部分集合で, $\mathcal{D} = \{C_0, \dots, C_k\}$ をセルによる X の分割とする。このとき, $\mathcal{D}$ は X のセル分解であるという。
2. X を M^{m+1} の空でない definable 部分集合で, $\mathcal{D} = \{C_0, \dots, C_k\}$ をセルによる X の分割とし, $\pi : M^{m+1} \rightarrow M^m$ を最後の座標を除く射影とする。このとき, $\{\pi(C_0), \dots, \pi(C_k)\}$ が $\pi(X)$ のセル分解になるとき, $\mathcal{D}$ は X のセル分解であるという。

定義 4. $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ を弱順序極小構造, $m \in \mathbb{N}$, $X, Y \subseteq M^m$ を definable 集合, $X \neq \emptyset$ とする。また $\mathcal{D}$ を X のセル分解とする。このとき, 任意の $C \in \mathcal{D}$ に対して, $C \subseteq Y$ または $C \cap Y = \emptyset$ となるとき, $\mathcal{D}$ は Y を分割するという。

定義 5. $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ を弱順序極小構造とする。任意の $m, k \in \mathbb{N}$ と definable 集合 $X_1, \dots, X_k \subseteq M^m$ に対して, $X_1, \dots, X_k$ のすべてを分割するような M^m のセル分解が存在するとき, $\mathcal{M}$ はセル分解を許すという。

事実 6 ([7, Fact 2.5]). $\mathcal{M}$ をセル分解を許す弱順序極小構造とする。 $X \subseteq M^n$ は definable, $f : X \rightarrow \overline{M}$ は definable とする。このとき, X を分割する M^n のセル分解 $\mathcal{D}$ が存在して, 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して

1. $f|_D$ は $M, \overline{M} \setminus M$ のいずれかにすべての値を持つ。
2. $f|_D$ は強連続である。

$\mathcal{M} = (M, <, +, \dots)$ を順序アーベル群 $(M, <, +)$ の弱順序極小拡張とする。 $\mathcal{M}$ の任意の definable 切断 $\langle C, D \rangle$ に対して $\inf\{d - c : c \in C, d \in D\} = 0$ となるとき, $\mathcal{M}$ は非付値的であるという。このとき, 次が成り立つ。

事実 7 ([7, Corollary 2.16]). $\mathcal{M} = (M, <, +, \dots)$ を順序アーベル群 $(M, <, +)$ の弱順序極小拡張とする。このとき, 次は同値である。

1. $\mathcal{M}$ は非付値的である。
2. $\mathcal{M}$ はセル分解を許す。

$\mathcal{M}$ をセル分解を許す弱順序極小構造とする。任意のセル $C \subseteq M^m$ に対して, $\overline{M}$ で $\overline{C}$ を定義する m -関係記号 $\overline{R}_C$ を導入する。すなわち $a \in \overline{M}^m$ ならば $\overline{M} \models \overline{R}_C(a) \iff a \in \overline{C}$ とする。 $\overline{\mathcal{M}} := (\overline{M}, <, (\overline{R}_C : C \text{ はセル}))$ と定義する。このとき, 次が成り立つ。

事実 8 ([7]). $\mathcal{M}$ をセル分解を許す弱順序極小構造とする。このとき, $\overline{\mathcal{M}}$ は順序極小構造である。さらに $\overline{\mathcal{M}}$ の任意の定義可能な集合 $X \subseteq \overline{M}^m$ は, M^m のセルの完備化の有限ブール和で表せる。

次が得られた結果である。

命題 9. $\mathcal{M} = (M, <, +, \dots)$ を順序アーベル群 $(M, <, +)$ の弱順序極小拡張でセル分解を許すとする。 $X \subseteq M^n$ は definable, $f : X \rightarrow \overline{M}$ は definable とする。 X を分割する M^n のセル分解 $\mathcal{D}$ が存在して、任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して

1. $f|_D$ は $M, \overline{M} \setminus M$ のいずれかにすべての値を持つ,
2. $f|_D$ は強連続である,
3. $\overline{f|_D}(\overline{D})$ は有界である

とする。このとき、 f の連続な拡張 $\overline{f} : \text{CL}(X) \rightarrow \overline{M}$ が存在する。

系 10. $\mathcal{M} = (M, <, +, \dots)$ を順序アーベル群 $(M, <, +)$ の弱順序極小拡張でセル分解を許すとする。 $C \subseteq M^n$ をセルとし、 $f : C \rightarrow M$ または $f : C \rightarrow \overline{M} \setminus M$ とする。 f は definable かつ強連続、 $\overline{f}(\overline{C})$ は有界とする。このとき、任意のセル $D \subseteq C$ に対して、 $f|_D$ は強連続である。

系 10 は次のことより明らかではない。

注意 11. $\mathcal{M}$ をセル分解を許す弱順序極小構造とする。このとき次が成り立つ。

1. $C = D_1 \cup D_2$ かつ $\overline{C} \neq \overline{D_1} \cup \overline{D_2}$ となるセル C, D_1, D_2 が存在する。
2. $C \subseteq D$ かつ $\overline{C} \not\subseteq \overline{D}$ となるセル C, D が存在する。

参考文献

- [1] M. Coste, An introduction to o-minimal geometry, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).
- [2] L. van den Dries, Tame topology and o-minimal structures, Lecture notes series 248, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).
- [3] 田中一之 [編], ゲーデルと 20 世紀の論理学 2 完全性定理とモデル理論, 東京大学出版会, 2006.
- [4] D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 12, 5435–5483.
- [5] D. Marker, Model theory: An introduction, Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer-Verlag, 2002.
- [6] 坪井明人, モデルの理論, 河合出版, 1997.
- [7] R. Wencel, Weakly o-minimal non-valuational structures, Ann. Pure Appl. Logic

154 (2008), no. 3, 139–162.

- [8] On the strong cell decomposition property for weakly o-minimal structures, *MLQ Math. Log. Q.* 59 (2013), no. 6, 452–470.