

実二次体に付随した Maass wave forms に 関する一注意

京大・教養 加藤 信一 (Shin-ichi Kato)

古典的な wave forms が, ある種の函数等式を満たす
Dirichlet 級数に対応する保型形式として Maass [M] に
よって定義・研究されたものであることは周知である。
例えば実二次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ (D は判別式) の量指標
つき zeta 函数

$$(1) \quad \zeta_K(s; n, \rho) = \sum_{\substack{\mu \in (\mathcal{O} \setminus \{0\}) / E_+(\sqrt{D}) \\ \mu \equiv \rho \pmod{\sqrt{D}}}} (\text{sgn } N(\mu))^k \left| \frac{\mu}{\mu'} \right|^{nc_i} \frac{1}{|N(\mu)|^s}$$

$$\left(\begin{array}{l} k=0 \text{ 又は } 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \rho \in \mathcal{O} = K \text{ の整数環,} \\ E_+(\sqrt{D}) \text{ は 従正単数 } \equiv 1 \pmod{\sqrt{D}} \text{ 全体の群,} \\ c = \pi / \log \varepsilon, \quad \varepsilon > 1 \text{ は } K \text{ の基本単数.} \end{array} \right)$$

に対応するものが、標題の "実二次体に伴随した wave forms" ψ ,

$$(2) \quad g(z+i; n, \rho) = l_0 \delta(n, \rho) y^{\frac{1}{2}} \\ + \sum_{\substack{\mu \in (\mathcal{O} \setminus \{0\}) / E_+(\sqrt{D}) \\ \mu \equiv \rho \pmod{\sqrt{D}}}} \left| \frac{\mu}{\mu'} \right|^{nci} y^{\frac{1}{2}} K_{nci} \left(\frac{2\pi(N(\mu)y)}{D} \right) e^{2\pi i \frac{N(\mu)}{D} x} \\ (z = x + iy, y > 0)$$

で与えられる。こゝで $E_+(\sqrt{D}) = \langle \varepsilon_0 \rangle$, $\varepsilon_0 > 1$ としたとき, $l_0 = \log \varepsilon_0$; $\delta(n, \rho) = 1$ ($n=0$ か $\rho \equiv 0 \pmod{\sqrt{D}}$ のとき), $= 0$ (それ以外); また $K_{nci}(\cdot)$ は変形 Bessel 函数である。この $g(z+i; n, \rho)$ は "保型性" を持ち, 上半平面上の Laplacian $\Delta = -y^2 (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ の, 固有値 $\frac{1}{4} + n^2$ の固有函数である。(それ以外, 詳しくは [M].)

さて, これより以前, Hecke [H] はより "素朴" に zeta 函数 (1) (の $n=0$ の場合) に対し "theta 函数"

$$(3) \quad \psi_{\pm}(z+i; n, \rho) = \sum_{\substack{\mu \in (\mathcal{O} \setminus \{0\}) / E_+(\sqrt{D}) \\ \mu \equiv \rho \pmod{\sqrt{D}}, \pm N(\mu) > 0}} |\mu|^{2nci} e^{2\pi i \frac{N(\mu)}{D} z_{\pm}}$$

($z_{\pm} \in H_{\pm}$, 上(下)半平面) を考え, z の "変換公式" を計算した ($n=0$ の場合). 勿論 (3) z の自身は "保型性" を持たないが, 超函数 (hyperfunction, 単はすじわがわるおりに distribution)

$$\mathcal{V}(x; n, \rho) = \mathcal{V}_+(x+i0, n, \rho) + \mathcal{V}_-(x-i0; n, \rho) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を考えれば, これは "保型的" になる. 例えば

$$\mathcal{V}\left(-\frac{1}{x}; n, \rho\right) = \frac{|x|}{\sqrt{D}} \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{O} \\ \beta \bmod \sqrt{D}}}^{(1+2\pi i)} e^{2\pi i \frac{\text{Tr}(\rho'\beta)}{D}} \mathcal{V}(x; n, \rho) \quad (x \neq 0).$$

これより, 実射影直線 $P^1(\mathbb{R})$ (局所座標を v, w ; $w = -\frac{1}{v}$) 上の実解析的直線束の超函数切断を

$$\begin{cases} v \longmapsto \mathcal{V}(v; n, \rho) \\ w \longmapsto \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{\beta \bmod \sqrt{D}} e^{2\pi i \text{Tr}(\rho'\beta)/D} \mathcal{V}(w; n, \rho) \end{cases}$$

で包めよう; 言い換えては, 超函数直誘導表現

$$\mathcal{B}\text{-Ind}_P^G(n; i) = \left\{ f \in \mathcal{B}(G); f(g \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}) = |a|^{-1-2\pi i} \times f(g) \right\}$$

($G = SL_2(\mathbb{R})$, $P =$ 上三角行列全体 $\subset G$) の
 "標準的" 元 $\oplus_{n,p}$ を定める。そしてこの Poisson
 積分 (上記誘導表現の空間から, Laplacian の固有
 空間 $\cap$ の G -準同型)

$$\int_K \oplus_{n,p} (gK) dK \quad \left(\begin{array}{l} K = SO(2) \\ dK = \text{正規化された} \\ \text{Haar 測度} \end{array} \right)$$

: $g \pmod{K}$ の函数

を計算すると, $G/K \simeq H_+$ の同値のもとに, (2) の
 $g(z; n, p)$ が定数倍を除いて得られるのである。

(計算については [K] を参照されたい。)

[M] H. Maass, Math. Ann. 121 (1949) 141-183

[H] E. Hecke, J. Reine Angew. Math. 157
 (1927) 159-170 (Werke 25)

[K] S. Kato, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 34
 (1987) (to appear)