

成分型単純群の分類完成

大阪教育大学 鈴木 寛

これは、成分型有限単純群の分類完成の報告、そのいくつかの部分の紹介、証明技術面での問題についてのノートである。

§ 1. 主定理と、標準部分群型問題

このノートで、群はすべて有限群、単純群は、非可換単純群を意味するものとし、用いる記号、用語はなるべく、鈴木通夫著“群論(上・下)”(岩波書店)、近藤武著“群論(I, II, III)”(岩波基礎数学講座)にあわせる事とした。上記二名著を御参照されたい。

定義 1. $\mathcal{C}$: 既知単純群全体の集合

$F^*(G)$: 有限群 G の一般フィッティング部分群

$(F^*(G) = E(G)F(G))$. ここで $F(G)$ はフィッティング部分群 $E(G)$ は、 G の、準単純 (後述) 連正規部分群全体で生成された G の部分群)

主定理. G を $\mathcal{K}$ に入らない、最小位数の単純群とする。すると、任意の位数 2 の元 x について、

$$F^*(C_G(x)/O(C_G(x)))$$

は、2-群。

注 1. 一般に、ある位数 2 の元 x について、

$F^*(C_G(x)/O(C_G(x)))$ が 2-群にならない群を、成分型 (component type) の群という。今 $\mathcal{K}$ が、単純群全体である事を証明しようとする時、 G を、その最小位数の反例であるとする。上の定理は、 G が、成分型ではないと主張している。

注 2. $F^*(C_G(x)/O(C_G(x)))$ が 2-群 にならないという事は、 $C_G(x)/O(C_G(x))$ に、連正規な、準単純部分群がある事を意味し、(定義 1 参照)、成分型とは、大体、ある位数 2 の元の中心化群の下の方に、単純群がある群のことである。

以後、主定理の証明について述べる。

定義2. G の部分群 L が、標準部分群 (standard subgroup) であるとは、次の三つの条件をみたすことである。

- ① $L = L'$, $L/Z(L)$ は単純群。(この性質をもつ群 L を 準単純 と呼ぶ)
- ② $K = C(L)$ とおくとき、 $|K|$ は 偶数であるが、任意の $g \in G - N(K)$ について $|K \cap K^g|$ は 2 で割れない。(このとき、 K は tightly embedded subgroup であると呼ばれる。)
- ③ $N(L) = N(K)$, $[L, L^g] \neq 1, \forall g \in G$ 。

定義3. G が 単純型 X であるとは、 G が、標準部分群 L を持ち、 $L/Z(L) \cong X$ なることである。

定義4. G が 型 X であるとは、 G が、標準部分群 $L \cong X$ を 持つことである。

定理1. (標準部分群型定理) G が、単純型 X ($X \in \mathcal{X}$) であって、 $F^*(G)$ が、単純群であるなら、 $F^*(G) \in \mathcal{X}$ 。
すなわち、ある $H \in \mathcal{X}$ で、 $H \leq G \leq \text{Aut } H$ 。

定理2. (M. Aschbacher, R. Foote) 主定理は、定理1. より、みちびかれる。

したがって、目標は、定理1. を、証明することになった。

注3. 定理1. において G が単純と仮定し、かつ、定理2. が成立すればよいが、定理2. の証明に用いられる $\mathcal{U}$ -予想、 $\mathcal{B}$ -予想 (これらも、定理1. からみちびかれる "定理" である) をも、一度にかたづける為には、 G を、もう少し一般に、つまり、 $F^*(G)$ が、単純と仮定して証明する必要がある。ただし、すべての型 X について、この強い形で、定理1. を証明しなくては、いけないわけではない。

注4. 定義2. からわかるように、標準部分群を持つ群は、成分型である。

定理1. を証明するためには、 $\mathcal{K}$ の各元 X について、次を証明すればよい。

定理1'. G を、単純型 X とし、 $F^*(G)$ は単純とする。さらに G は、次の条件をみたすものとする。

- ① G の真部分群の剰余群 H が、ある $Y \in \mathcal{H}$ について、単純 Y 型なら、 H の任意の組成因子は $\mathcal{H}$ の元であるか、または、可換群である。
- ② L を、 X 型の標準部分群としたとき、 $C(L)$ の 2-シロー群は、巡回群である。
- ③ G は、性質 $B(G)$ をみたす。
- (④ G は、単純群である。)
- このとき、 $F^*(G) \in \mathcal{H}$ 。

注5. ① は、定理 1. で、最小位数の反例をとることから、仮定できるもの、② は、 $C(L)$ の 2-シロー群が巡回群でない場合が、一般に、M. Aschbacher, G. Seitz によって証明されたため、③ は、 G の位数 2 の元の中心化群の奇数位数の正規部分群に関する性質であるが、詳述はさける、④ は、いつでも、仮定できるわけではなく、例えば、標数 2 の体上のシバリー群のほとんどの場合に、仮定できる。(注3, 参照)

§ 2. 個々の単純型における定理 1' の証明.

定理 1' の証明には、奥に多くの数学者が携わってきたが

その一部を列举すると、

- 階数の大きな奇標数のシバリー群 J. Walter
- 階数の大きな標数2のシバリー群 G. Seitz
- 交代群 R. Solomon, M. Harris
- 散在型 R. Solomon, L. Finkelstein et al.
- 階数の小さな標数2のシバリー群

五味・山田・宮本 et al.

以下は、1979年夏、カリフォルニア大学サンタクルツ校で開かれたシンポジウム当時、残されていた(プレプリント以上のものがなかったもの)型と、それを証明した(その型の場合に、定理1'を証明した)人の名である。

I. 標数2のシバリー群

$L_3(4)$	Aschbacher, Seitz
$\widehat{U}_6(2)$	Hunt?
$\widehat{\Omega}_8^+(2)$	江川
$\widehat{^2E}_6(2)$	Stroth
$F_4(2)$	Seitz?
${}^2F_4(2)'$	Aschbacher
${}^2F_4(2^{2m+1})$	宮本
$G_2(4)$	Aschbacher, Seitz
$\Omega_8^-(2)$	Alward

II. 奇標数のシバリー群

$U_3(3)$	Harris
$L_4(3)$	鈴木(寛)
$U_4(3)$	Aschbacher
$G_2(3)$	山田

III. 散在型

$\hat{F}_2$	Griess ?
F_3	Syskin
$\hat{M}(22)$	江川

注6. 上の表で、疑問符のついているものは、筆者が確認できなかったもので、その他にも、 $\Omega_6^-(3)$, $P\Omega_7(3)$, $P\Omega_8^+(3)$ は、証明した人の名を確認できなかったが、現時点では、すべて証明されているとの事である。(Gorensteinよりの、間接的情報による。)

§ 3. 定理1' の証明とその方針

定理1' の証明のあらすじを考える。

L を、 X 型の標準部分群とする。 $C(L)$ は、 L が標準部分群であることにより、定義2. の条件②をみたす。

従って、特に、 $C(L)$ の 2-シロー群 R は、単位群ではなく、定理 1' の仮定 ② により、巡回群としてよい。 α を R の位数 2 の元とすると、定義 2. の条件 ③ と、 R が $C(L)$ のシロー群で、巡回群であることから、 $C(\alpha) \leq N(L)$ が、みちびかれる。これにより、 $F^*(C(\alpha)/O(C(\alpha))) \cong R * L$ が得られ、 $C(\alpha)/O(C(\alpha))$ の構造を知ることができる。

次に、 $C(\alpha)$ の性質から G の性質を調べ、 $F^*(G)$ が何であるかを定めるのであるが、 $F^*(G)$ が単純 という条件は、実際には用いにくいので、普通 $O(G)=1$ 、つまり、奇数位数の G の正規部分群は単位群に限るとのみ仮定し（これも省くこともあるが、この仮定は、全くテクニカルな仮定である）証明をすすめる。この場合、 $F^*(G)$ が、単純群となる場合の他に、 $\alpha \in Z(G)$ で、 $L = E(G)$ なる場合と、 $F^*(G) \cong L \times L$ となる二つの場合が起こる。前者は、 Z^* -定理、後者は、product fusion なるものを調べて扱うことが多いが、特に、後者を扱うのが、定理 1' の証明が一般に長くなる一つの原因である。

$C_G(\alpha)$ の、どの性質に注目するかは、いつも問題であるが、最終的に、 $F^*(G)$ を決定しやすい情報を見つけ出すとしか、言えないようである。

L	$\Omega_8^+(2)$	${}^2F_4(2^{2m+1})$	${}^2F_4(2)'$
	(三井川)	(宮本)	(Aschbacher)
E(G)	L	L	L
	L × L	L × L	L × L
	$\Omega_8^+(4)$	$F_4(2^{2m+1})$	$F_4(2)$
	M(22)	現在は $G \neq O^3(G)$ まで	

上の表は、標数2型の場合のいくつかの例であるが、 $E(G)$ として現われるのもほとんど、標数2型のシバリー群であるためLの、したがって $C(t)$ の、放物型部分群 H_i 達を考え、その $O_2(H_i)$ の正規化群を調べて、 G の放物型部分群 H_i を得、 H_i 同志の関係から、 G の (B, N) -対を構成する方法が、しばしば、用いられるようである。

奇標数のシバリー群の場合も、 $E(G)$ として得られるものは、殆ど、奇標数のシバリー群であるが、放物型部分群が、2-局所部分群（2-群の正規化群）ではないので、今のところ、これを扱う方法は得られていない。これに対して、 G の classical involution と呼ばれる 位数2の元（ t とは異なる）に目をつき、その中心化群を求めて、 G を決定する方法は、一般的に用いることの可能な方法である。

次の二つは、この方法に関係した定理である。

定義5. $\mathcal{M}$ を、次の様な群全体の集合とする。すなわち、 $H/O(H) \cong SL(2,3)$ であるか、または、 $H=H'$ 、 $H/Z^*(H)$ は、奇数標数の単純シバリー群で $Z^*(H)$ は偶数位数を持ち、 $H/Z^*(H) \cong PSL(2n, p^r)$, $PSU(2n, p^r)$ なる場合は、更に、 $|Z^*(H)|_2 = |M(H/Z^*(H))|_2$ であるとする。ここで $M(H/Z^*(H))$ は、 $H/Z^*(H)$ の シュアーマルチプライアーをあらわすものとする。

定理3. z を単純群 G の位数2の元とし、 $C_G(z)$ は連正規な、 $\mathcal{M}$ に属する部分群で、 z を含むものをもつとする。この時、 G は、奇標数のシバリー群か、または M_{11} に同型である。

定理4. $W = \{1, z_1, z_2, z_3\} \cong E_4$ を 群 G の部分群とする。もし、 $C_G(W)$ が、連正規な、 $\mathcal{M}$ に属する部分群 L_1, L_2 で、 $z_1 \in L_1, z_2 \in L_2$ なるものをもてば、 G は、単純群ではない。

注7. 上の二つの定理は次の論文による。

M. E. Harris, Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over a field of odd order, To appear.

注8. 定理3. は Aschbacher による. Classical involution による. 奇標数シバリー群の特徴づけの拡張である。

注9. 定理4. は 定理3. の系で, $E(G) \cong L \times L$ なる場合に, 有効である。

§4. 型 $L_4(3)$ の場合

この節では, 実際に 型 $L_4(3)$ の場合, $E(G)$ 従って $F^*(G)$ としてどんな群があらわれ, また, 具体的に証明に用いられる部分群は, どんなものであるかを述べる。記号は前節のものをそのまま用いる。

$ R > 2$ の場合	二次形式	τ	m の元
$P\Omega_8^-(3)$	$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$	$SL(2,3)$

$ R =2$ の場合	二次形式	π	$\mathcal{G}_m$ の元
$L_4(9)$		体同型	<u>$SL(2,9)$</u>
$L_6(3)$		$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix} \times \text{クワッド型}$	$SL(2,3)$ <u>$SL(4,3)$</u>
$U_6(3)$		体同型	$SL(2,3), \underline{SU(4,3)}$
$P\Omega_7(3)$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}$	$SL(2,3)$
$P\Omega_8^+(3)$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}$	<u>$SL(2,3)$</u>
$P\Omega_8^-(3)$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}$	$SL(2,3)$ <u>$Sp(4,3)$</u>

上の表の第一列は、 L , $L \times L$ 以外で、 $E(G)$ としてあらわれる群。第二・三列は、おのおのの場合、 π として何をとりかであり、最終列は、定理3. を用いる場合、適用できる連正規な部分群としてあらわれるもの、波線をつけたものは、実際に、証明に用いた群である。 $P\Omega_7(3)$ については、 G' の 2-シロー群が、 A_{12} -型であり、 $G' = E(G)$ をシロー群による特徴づけを用いて得た。

上の表の様に多くの群があらわれるのは、次の同型によるものであろう。 $L_4(3) \cong P\Omega_6^+(3)$

注10. 上の表にあらわれた群は、すべて、その自己同型群が、単純型 $U_4(3)$ でもある。

IN $C_G(t)$	IN G	IN $E(G)$	$E(G)$
$ R > 2$	$2^6 \Sigma_8$	$2^6 A_8$	$P\Omega_8^-(3)$
$ R = 2$	$2^5 \Sigma_5$	$2^4 \Sigma_5$	$L_4(3)$
$m(C(t)) = 5$	$2^5 \Sigma_6$	$2^4 \Sigma_6$	$L_4(9), L_6(3)$
$2^5 \Sigma_5$	$2^5 2^4 \Sigma_5$	$(2^4 \Sigma_5) \times (2^4 \Sigma_5)$	$L_4(3) \times L_4(3)$
$ R = 2$	$2^6 \Sigma_5$	$2^4 \Sigma_5$	$L_4(3)$
$m(C(t)) = 6$	$2^6 (Z_2 \times \Sigma_5)$	$2^6 A_7$	$P\Omega_7(3)$
$2^6 \Sigma_5$	$2^6 \Sigma_6$ (直既約)	$2^5 \Sigma_6$	
	$2^6 \Sigma_6$ (直可約)	$2^4 \Sigma_6$	$L_4(9), L_6(3)$
	$2^6 (Z_2 \times \Sigma_6)$	$2^6 A_8$	$P\Omega_8^+(3)$
	$2^6 2^4 \Sigma_5$	$(2 \times 4^4) \Sigma_6$ $(2^4 \Sigma_5) \times (2^4 \Sigma_5)$	$U_6(3)$ $L_4(3) \times L_4(3)$
	$2^6 2^5 \Sigma_5$	$(2 \times 4^4) \Sigma_6$ $(2^4 \Sigma_5) \times (2^4 \Sigma_5)$	$U_6(3)$ $L_4(3) \times L_4(3)$

上の表は、 G の 2-シロ-群、さらに $E(G)$ の 2-シロ-群を得るのに用いられた 2-局所部分群の表である、
実際の証明には上記のフラットフォームと呼ばれる基本了

ーベル群の正規化群の他に、カスプフォームと呼ばれるエクストラスペシャル型の 2-群の正規化群（これが最終的に定理 3. を適用できる位数 2 の元 z を中心に持つ）を考察する。まず、 $C_G(x)$ の 2-局所部分群（上の表 第一列の $2^4\Sigma_5$ や $2^6\Sigma_5$ ）をとり、その極大正規 2-群の正規化群としておこる群の可能性を考えると、上の表 第二列の可能性がある事がわかり、それぞれに場合分けし、カスプフォームと見比べて 2-群の正規化群を順次とって、 G の 2-シロー群を得る。次に、 $E(G)$ （フュージョンシンプルの部分）の 2-シロー群を、移送を用いて決める。殆どの場合 $x \notin E(G)$ である。最後に、 $E(G)$ の 2-シロー群の中で、共役関係を調べ、定理 3. を適用できる位数 2 の元の中心化群を決定し $E(G)$ を得る。

以上が、証明の大体の筋道であるが、小さな部分での x の他の元との共役関係は本質的である。

§ 5. おわりに

単純群分類の最後はすべて、局所解析的手法によってなされたようである。証明の局所的改訂の価値には疑問も多いが、最後に、筆者の単純な疑問の形でいくつかの問題を記す。

1. 標準部分型問題において、どこまでアルゴリズム化できるか。
2. 定理 1' の証明で、 $B(G)$ どころか、 U も仮定できるか、 $O(C_G(x))=1$ なる時、表現論は適用可能か。
3. 一般に、 $V \cdot A$, $V \cong E_2^n$, $C(V)=V$, $(VA)' \cap V \neq V$ のような 2-局所部分群 VA を持つ群 G が、単純になる条件は何か。§ 4. の最後の表で、二列目の 2-局所部分群からすく $x \notin G'$ かどうかはわかれば、例えは定理 1' の証明は $1/3$ 程度以下になるであろう。