

長波極限の2次元ベータ平面乱流におけるエネルギー Spektrルの非等方的な分布について

京大院理・地球惑星科学専攻 齋藤 泉, 石岡 圭一

Izumi Saito, Keiichi Ishioka

Division of Earth and Planetary Sciences, Graduate School of Science,
Kyoto University

1 はじめに

2次元 β 平面乱流では、 β 効果によりエネルギーカスケードが非等方的になり、流れ場が東西方向に引き伸ばされた構造を持つ傾向がある (Rhines 効果) [1]. これに対応して2次元波数空間ではエネルギーが緯度方向の波数軸の周りに集まり、垂鈴型のエネルギーの低密度領域が生じる [2]. Rhines 効果の指標となるのが Rhines 数 $Rh (= U/(\beta L^2))$, L , U は特徴的な長さと速さ, β は Coriolis パラメータの緯度方向の微分) である. Rh が小さい程非線型性が弱くなり、非等方性が顕著になる. Balk は、1991 年に自らが発見した [3] 保存量「ゾノストロフィー」の保存性を用いて、Rhines 効果を説明した [4]. ゾノストロフィーは近似的な保存量であり、非線型性が弱い (即ち Rh が小さい) 程良く保存する.

Rhines 効果においては $L_D \gg L$ (L_D は Rossby の変形半径) であることを前提としている. 一方 $L_D \ll L$ の場合については、いくつかの先行研究 [5, 6] があるものの、非線型性の強さに応じたエネルギーカスケードの非等方性を系統的に調べた研究はこれまで無かった. この場合には非線型性の強さが無次元数 $\gamma^{-1} = U/(\beta L_D^2)$ で評価され、 γ は Rhines 数と異なり L に依存しない. 乱流の時間発展とともに L が変化しても非線型性の強さが変化しないので、 γ の初期値を様々に変えた実験をしなければ、非線型性の強さとエネルギーカスケードの非等方性の関係についての総合的な知見は得られない. また、 $L_D \ll L$ の場合にゾノストロフィーがとる漸近形についても、先行研究 [3, 7] で提示された表式は不十分であった.

本稿はまず2~5節で、 $L_D/L \rightarrow 0$ の極限 (長波極限) の2次元 β 平面乱流において残されていた上記の問題に取り組んだ研究 Saito and Ishioka (2013)[8] について紹介する. この研究では、長波極限における2次元 β 平面乱流の時間発展が様々な非線型性の強さについて数値実験により調べられた. また実験で得られる結果の解釈のために、長波極限におけるゾノストロフィーの漸近形の正しい表式が導出され、その保存性が調べられた. この研究で発見された長波極限におけるゾノストロフィーの漸近形は、後に Connaughton らによって「セミアクション」と名付けられた [9]. 6節では補足的説明として、ゾノストロフィーの表式と由来について、波動乱流の方程式を用いて説明する.

2 長波極限における準地衡方程式

以下に示す準地衡渦度方程式を支配方程式とする, 2次元 β 平面乱流を考える.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 \psi - \frac{1}{L_D^2} \psi \right) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

ここで ψ は流線関数, x, y はそれぞれ経度方向, 緯度方向の座標, t は時間, ∇^2 は2次元 Laplace 演算子である. ∇^2 が L^{-2} でスケーリングできるので, 長波極限 ($L_D/L \rightarrow 0$) においては, 第一項の演算子を次のように展開できる.

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - L_D^{-2}) &= -L_D^{-2}(1 - L_D^2 \nabla^2) \\ &= -L_D^{-2}(1 + (L_D^2 \nabla^2) + (L_D^2 \nabla^2)^2 + \dots)^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

式(1)の両辺に $(1 + (L_D^2 \nabla^2) + (L_D^2 \nabla^2)^2 + \dots)$ を作用させると, 適当な Galilei 変換の後に主要部として次式が得られる.

$$-\frac{1}{L_D^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta L_D^2 \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

ψ が LU でスケーリングできるので, 線型項(式(3)の左辺第2項)の非線型項に対する比は次の無次元数で評価される.

$$\gamma = \frac{\beta L_D^2}{U} \quad (4)$$

長さを L , ψ を LU , t を $L^3/(L_D^2 U)$ で無次元化すると, 式(3)は以下の形に書き直せる.

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

(変数及び演算子は全て無次元化されていることに注意). この式を長波極限の準地衡渦度方程式と呼ぶことにする.

3 保存量

準地衡渦度方程式(5)は2つの保存量を持つ. 長さ 2π の二重周期境界の領域を考え, Fourier 変換

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x, y, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx dy \quad (6)$$

($\mathbf{k} = (k, l)$ は2次元波数ベクトル, k と l はそれぞれ x と y に対応する波数, 実数条件より $\hat{\psi}_{\mathbf{k}} = \hat{\psi}_{-\mathbf{k}}^*$)により ψ のスペクトル係数を定義すると, 2つの量はそれぞれ次で表される.

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad \Omega = \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 \varepsilon_{\mathbf{k}} \quad (7)$$

ここで $\varepsilon_{\mathbf{k}} (= \frac{1}{2} |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2)$ は2次元エネルギー・スペクトルである. 物理的には E がポテンシャルエネルギーに, Ω が運動エネルギーに対応する. しかし, L_D/L が有限の場合の全エネル

ギーとポテンシャルエンストロフィーがそれぞれ長波極限 ($L_D/L \rightarrow 0$) における E と Ω に対応するので, ここでは E をエネルギー, Ω をエンストロフィーと呼ぶことにする. エンストロフィーの保存により, エネルギーは小さい波数の方へカスケードし, 運動の長さのスケールは時間と共に大きくなる.

式 (5) はまた近似的な保存量, ゾノストロフィー (Z) を持つ. 準地衡渦度方程式 (1) に対するゾノストロフィーの完全な表式は, Balk により発見された [3]. (ゾノストロフィーの表式とその由来について, 6 節に記す.) 長波極限におけるゾノストロフィーの漸近形の表式は過去の研究で提示されているが [7], 本研究では後の実験結果を解釈するために, より適当な表式として以下を見出した.

$$Z = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \quad (8)$$

ここで係数 $f_{\mathbf{k}}$ は以下で定義される.

$$f_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 1/|k| & (\theta < 60^\circ \text{ and } |\mathbf{k}| \neq 0) \\ 1/(2|k|) & (\theta = 60^\circ \text{ and } |\mathbf{k}| \neq 0) \\ 0 & (\theta > 60^\circ \text{ or } |\mathbf{k}| = 0) \end{cases} \quad (9)$$

ただし

$$\theta = \tan^{-1}(|l/k|) \quad (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ) \quad (10)$$

とする (この漸近形 Z は後に Connaughton らによってセミアクションと名付けられた [9] が, 以後 5 節までは, Saito and Ishioka (2013) [8] にならいゾノストロフィーと呼ぶことにする). エンストロフィーの保存によってエネルギーが小さい波数領域にカスケードするとき, Z が保存するならば, より多くのエネルギーが 2 次元波数空間上で以下の領域に集まる.

$$\theta > 60^\circ \quad (11)$$

Balk と Zakharov は $L_D \ll L$ におけるゾノストロフィーの係数の分布を用いて, このような集積が起こることを予言した [10].

4 数値実験

ゾノストロフィーの保存がエネルギーのカスケードに与える影響を調べるために, 式 (5) の右辺に高階粘性を加えた式を数値積分する. 領域は x, y 方向に長さ 2π の 2 重周期境界とし, 空間方向にはスペクトル法 (256×256 , 切断波数 85) を, 時間方向には 4 次 Runge-Kutta 法 ($\Delta t = 2 \times 10^{-7}$) を用いる. 初期値は 1 次元エネルギー Spektral が波数 20 にピークを持ち, 2 乗平均速度が 1 になるようなランダムな ψ の場とし, 強制は加えずに $t = 0.4$ まで積分する. 様々な非線型性の強さに応じた時間発展を調べるために, $\gamma = 0, 0.25, 1, 5, 20$ の 5 つの場合について実験を行う.

最終状態における 2 次元エネルギー Spektral の角度分布を図 1 に示した. ただし各 γ について, 初期値のランダムな分布を変化させて合計 41 の実験を行い, それらのアンサンブル平均をとっている. 横軸は式 (10) で定義される角度 θ で, 縦軸はその角度範囲に

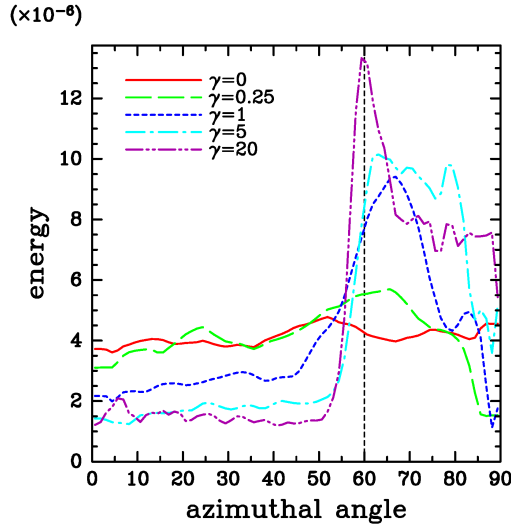


図 1: 最終状態 ($t = 0.4$) における 2 次元エネルギースペクトルの角度分布.

含まれるエネルギーの量を表す. $\gamma = 0$ のときスペクトルは等方的で, $\gamma = 0.25$ のときは $\theta = 90^\circ$ の周りに低密度の領域が生じる. $\gamma = 1, 5, 20$ と増えていく (つまり非線型性が弱くなる) につれて, より多くのエネルギーが $\theta > 60^\circ$ の領域に集まる. このようなエネルギーの集積は先行研究により予言されていた [10] が, 本研究により実際に起こることが確かめられた. 最も大きい $\gamma = 20$ のときには, エネルギーが $\theta = 60^\circ$ 周辺に集中している. この集中は先行研究の結果と整合的である [6]. 以上の結果は, 準地衡渦度方程式 (1) において $L_D \gg L$ の場合とは対照的である. その場合, 第 1 節でも述べたように, 非線型性が弱い (Rhines 数が小さい) とエネルギーは $k = 0$ 付近 (図 1 で $\theta = 90^\circ$ 周辺), 即ち物理空間において東西方向に引き伸ばされた流れ場に対応する波数領域に集中する.

各 γ におけるゾノストロフィーの時間発展を図 2 に示した. (ただしこれらの時間発展は図 1 のようにアンサンブル平均を取らず, それぞれ一つの実験結果だけを示している). $\gamma = 0, 0.25, 1$ に対してはゾノストロフィーは大きく変動するが, $\gamma = 5, 20$ と大きくなると良く保存するようになる. この結果は, γ が大きい, 即ち非線型性が弱い程良く保存されるという, ゾノストロフィーの特徴を反映している. 図 1 で見たように, γ が大きくゾノストロフィーが良く保存する程, エネルギーカスケードに現れる非等方性が顕著になる.

5 議論

海洋において観測される Rossby 波の第一傾圧モードの波長は数百 ~ 千 km であり, Rossby の内部変形半径 (中緯度で数十 km) よりも 10 倍以上長い. これらの波について, その波数ベクトルが東西方向から (北又は南向きに) $50^\circ \sim 80^\circ$ ずれることが Glazman と Weichman により報告されている [11]. 傾圧 Rossby 波に対応する海面高度の偏差が数 cm [12] であることより典型的な速さは $U \sim 1$ (cm/s) と見積もられ, また Glazman と Weichman の論文の Table 1 より βL_D^2 (L_D はここでは内部変形半径を表す) は北緯 25° で 5.8 (cm/s) である [11]. 即ち $\gamma \sim 5$ と評価でき, 図 1 の結果より, ゾノストロフィーの保存が観測され

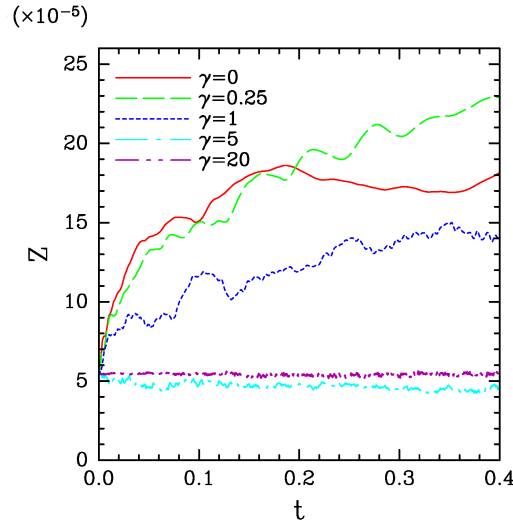


図 2: ゾノストロフィーの時間発展.

る波数ベクトルのずれに寄与している可能性がある。ただ本研究の実験は非常に理想化された設定で行われているため、この可能性を確かめるためにはより詳細な数値計算及び観測が必要である。

6 ゾノストロフィーの表式と由来について

保存量ゾノストロフィーの表式とその由来について説明する。この保存量はもともと波動乱流の分野において発見された。波動乱流の分野でスペクトルの統計的な時間発展を記述する「kinetic equation」を考えることで、ゾノストロフィーの表式の由来が説明される。準地衡渦度方程式 (1) に対応する kinetic equation の導出と、ゾノストロフィーの保存性についての説明は、Connaughton らの論文に詳しく説明されている [9]。

kinetic equation は次の手順によって導出される。流線関数のスペクトル係数 $\hat{\psi}_{\mathbf{k}}$ を考える (ただしここでは、Fourier 変換は無限領域で行うものとする)。以下の変換式により $a_{\mathbf{k}}$ を定義する。

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{|\mathbf{k}|^2 + L_D^{-2}}{\sqrt{|\mathbf{k}|}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \quad (12)$$

乱雑位相近似 (相互作用の最低次では $a_{\mathbf{k}}$ の位相はランダム) のもとで、以下のアクションスペクトル $n_{\mathbf{k}}$ を定義する。

$$\langle a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^* \rangle = n_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (13)$$

ここで角括弧はアンサンブル平均を表す。弱非線型の近似のもとで、支配方程式 (1) の波数空間における表式を摂動展開し、乱雑位相近似を用いて乱流クロージャーをほどこすと、 $n_{\mathbf{k}}$ の時間発展を記述する以下の kinetic equation が得られる。

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \int_{k_1, k_2 > 0} (\mathcal{R}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} - \mathcal{R}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}} - \mathcal{R}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}\mathbf{k}_1}) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \quad (14)$$

ただし

$$\mathcal{R}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = 2\pi|V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}|^2\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2})(n_{\mathbf{k}_1}n_{\mathbf{k}_2} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}_1} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}_2}) \quad (15)$$

また $\omega_{\mathbf{k}}$ は Rossby 波の振動数

$$\omega_{\mathbf{k}} = -\frac{\beta k}{|\mathbf{k}|^2 + L_D^{-2}} \quad (16)$$

であり, $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ は適当な形を持つ相互作用係数である. 式 (15) のデルタ関数の表式は, kinetic equation (14) において, 非線型相互作用が以下の三波共鳴の条件式を満たす波数の組に限られていることを意味している.

$$\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 = 0, \quad \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2} = 0 \quad (17)$$

次に保存性の条件とゾノストロフィーについて説明する. ある係数 $\varphi_{\mathbf{k}}$ を持つ以下の量 Φ を考える.

$$\Phi = \int_{k>0} \varphi_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \quad (18)$$

式 (14) を用いると, Φ の時間微分は以下のように計算される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \int_{k>0} \varphi_{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} \right) d\mathbf{k} = \iiint_{k, k_1, k_2 > 0} (\varphi_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} - \varphi_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}\mathbf{k}_1}) d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \\ &= \iiint_{k, k_1, k_2 > 0} \mathcal{R}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} (\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}_1} - \varphi_{\mathbf{k}_2}) d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \end{aligned} \quad (19)$$

$(\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}_1} - \varphi_{\mathbf{k}_2})$ の因子をくくり出すことができたのは, 上段右辺の第2項目と3項目の積分変数を入れ替えたことによる. $\mathcal{R}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ の表式の中に三波共鳴の条件式が含まれていることに注意すると, Φ が保存するためには, 三波共鳴の条件式 (17) が成り立つときに, 係数 $\varphi_{\mathbf{k}}$ が以下の式を満たせばよいことが分かる.

$$\varphi_{\mathbf{k}} - \varphi_{\mathbf{k}_1} - \varphi_{\mathbf{k}_2} = 0 \quad (20)$$

この保存性の条件を満たす $\varphi_{\mathbf{k}}$ には, 自明なものとして振動数 $\omega_{\mathbf{k}}$ と x 方向波数 k がある. 式 (18) においてこれら2つを係数に持つ量は, それぞれエネルギーとエンストロフィーに対応する. 一方で Balk は, 以下で表される $\eta_{\mathbf{k}}$ も保存性の条件を満たすことを発見した [3].

$$\eta_{\mathbf{k}} = \arctan \left[\frac{l - k\sqrt{3}}{L_D |\mathbf{k}|^2} \right] - \arctan \left[\frac{l + k\sqrt{3}}{L_D |\mathbf{k}|^2} \right] \quad (21)$$

この $\eta_{\mathbf{k}}$ を係数に持つ量の保存を考えることで Rhines 効果を説明することができる [4] ので, この量は Nazarenko と Quinn によってゾノストロフィーと名付けられた [13]. ゾノストロフィーは, もとの準地衡渦度方程式 (1) においては近似的にしか保存せず, その保存性は弱非線型になるほど良くなる [3].

$\eta_{\mathbf{k}}$ の長波極限 ($L_D |\mathbf{k}| \rightarrow 0$) における漸近形は以下ようになる [8].

$$\eta_{\mathbf{k}} = \zeta_{\mathbf{k}} - 2\sqrt{3}L_D k - 8\sqrt{3}L_D \xi_{\mathbf{k}} + O(|L_D |\mathbf{k}||^2) \quad (22)$$

ここで, $\xi_{\mathbf{k}}$ と $\zeta_{\mathbf{k}}$ はそれぞれ以下の表式を持つ.

$$\xi_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \frac{k^3}{l^2 - 3k^2} & (|l| \neq \sqrt{3}k) \\ -\frac{k}{3} & (l = \pm\sqrt{3}k) \end{cases} \quad (23)$$

$$\zeta_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 0 & (|l| > \sqrt{3}|k| \text{ or } (k, l) = (0, 0)) \\ -\pi & (|l| < \sqrt{3}|k| \text{ and } k > 0) \\ \pi & (|l| < \sqrt{3}|k| \text{ and } k < 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (|l| = \sqrt{3}|k| \text{ and } k > 0) \\ \frac{\pi}{2} & (|l| = \sqrt{3}|k| \text{ and } k < 0) \end{cases} \quad (24)$$

$\xi_{\mathbf{k}}$ と $\zeta_{\mathbf{k}}$ は, それぞれが保存性の条件を満たすことが証明されている [7, 8]. $\zeta_{\mathbf{k}}$ は波数空間上の領域によってゼロか非ゼロの定数をとる. これより Connaughton らは, 式 (18) において $\zeta_{\mathbf{k}}$ を係数に持つ量をセミアクシオンと名付けた [9]. 係数 $\zeta_{\mathbf{k}}$ を 2 次元エネルギースペクトルの係数の形にすると, 式 (9) の $f_{\mathbf{k}}$ が得られる.

参考文献

- [1] Rhines, P. B., “Waves and turbulence on a beta-plane,” J. Fluid Mech., 11 (1975), pp.401-41
- [2] Vallis, G. K. and Maltrud, M. E., “Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography,” J. Phys. Oceanogr. **23**, 1346 (1993)
- [3] Balk, A. M., “A new invariant for Rossby wave systems,” Phys. Lett. A, 155 (1991), pp.20-4
- [4] Balk, A. M., “Angular distribution of Rossby wave energy,” Phys. Lett. A, 345 (2005), pp.154-60
- [5] Okuno, A. and Masuda, A., “Effect of horizontal divergence on the geostrophic turbulence on a beta-plane: Suppression of the Rhines effect,” Phys. Fluids **15**, 56 (2003)
- [6] Connaughton, C., Nazarenko, S. and Quinn, B., “Feedback of zonal flows on wave turbulence driven by small-scale instability in the Charney-Hasegawa-Mima model,” Europhys. Lett. **96**, 25001 (2011)
- [7] Balk, A. M., Nazarenko, S. V., and Zakharov, V. E., “A new invariant for drift turbulence,” Phys. Lett. A **152**, 276 (1991)
- [8] Saito, I. and Ishioka, K., “Angular distribution of energy spectrum in two-dimensional beta-plane turbulence in the long-wave limit,” Phys. Fluids **25**, (2013), 076602

- [9] Connaughton, C., Nazarenko, S., and Quinn, B., "Rossby and drift wave turbulence and zonal flows: the Charney-Hasegawa-Mima model and its extensions," *submitted*
- [10] Balk, A. M. and Zakharov, V. E., "Cascade generation of zonal flows by the drift wave turbulence," *Phys. Lett. A* **373**, 4049 (2009).
- [11] Glazman, R. E. and Weichman, P. B., "Meridional component of oceanic Rossby wave propagation," *Dyn. Atmos. Oceans* **38**, 173 (2005)
- [12] Chelton, D. B. and Schlax, M. G., "Global observations of oceanic Rossby waves," *Science* **272**, 234 (1996)
- [13] Nazarenko, S. and Quinn, B., "Triple cascade behavior in quasigeostrophic and drift turbulence and generation of zonal jets," *Phys. Rev. Lett.*, **103** (2009), 118501