

Character Products of Association Schemes

信州大学・理学部 花木 章秀 (Akihide Hanaki)

Department of Mathematical Sciences,

Faculty of Science, Shinshu University

アソシエーションスキームは代数的組合せ論の主要な研究対象であるが、その一般論については、まだそれほど多くのことは分かっていない。ここでは有限群の指標理論をまねて、その指標の積を考える。有限群の群環は Hopf 代数なので、その指標の積は常に指標になる。しかしアソシエーションスキームの隣接代数は一般に Hopf 代数ではないので、その指標の積は指標になるとは限らない。ここでは、考える指標の一方が本質的に有限群の指標である場合には、その積がまた指標になることを示す。

1 記号と定義

記号は Zieschang [3] のものを用いる。

X を有限集合とする。 $g \in X \times X$ に対して、その隣接行列 σ_g とは、行、列共に X で添字の付けられた正方行列で、その (x, y) -成分は $(x, y) \in g$ のとき 1 で、そうでないとき 0 と定めたものである。 G を $X \times X$ の空でないいくつかの部分集合の集まりとする。 (X, G) がアソシエーションスキームであるとは

- (1) $\sum_{g \in G} \sigma_g$ はすべての成分が 1 の行列。(すなわち $X \times X = \bigcup_{g \in G} g$ は $X \times X$ の分割。)
- (2) $1 := \{(x, x) \mid x \in X\} \in G$ (σ_1 は単位行列。)
- (3) $g \in G$ ならば $g^* := \{(y, x) \mid (x, y) \in g\} \in G$ (σ_{g^*} は σ_g の転置行列。)
- (4) $f, g, h \in G$ に対して、ある非負整数 p_{fg}^h があって $\sigma_f \sigma_g = \sum_{h \in G} p_{fg}^h \sigma_h$ 。

が成り立つこととする。単に G をアソシエーションスキームともいうことにする。 $g \in G$ に対して $n_g := p_{gg}^1$ とおいて、これを g の分岐指数という。任意の $g \in G$ に対して $n_g = 1$ であるとき (X, G) を thin であるという。このとき G は本質的に有限群とすることができる。

定義より

$$\mathbb{C}G := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C}\sigma_g$$

は行列環をなす。これを G の $\mathbb{C}$ 上の隣接代数という。 $\mathbb{C}$ 上の隣接代数は常に半単純であることが知られている。

$S \subset G$ に対して $\sigma_S := \sum_{g \in S} \sigma_g$, $n_S := \sum_{g \in S} n_g$ とおく。 $S \subset G$ が G の閉部分集合であるとは $n_S^{-1} \sigma_S$ が $\mathbb{C}G$ のべき等元であることとする。また S が正規閉部分集合であるとは $n_S^{-1} \sigma_S$ が $\mathbb{C}G$ の中心的べき等元であることとする。 G の閉部分集合 H に対して剰余スキーム $(X/H, G//H)$ が定義されるが、定義がやや複雑なため、これは [3] を参照して頂きたい。 $G//H = \{g^H \mid g \in G\}$ と表されることに注意しておく。剰余スキーム $(X/H, G//H)$ が thin であるとき H を強正則であるという。強正則ならば正則である。強正則閉部分集合全体の共通部分は、また強正則で、これを thin residue といい $O^\theta(G)$ と表す。すなわち $O^\theta(G)$ は剰余スキームが有限群となるような閉部分集合のうち最小のものである。 $G//O^\theta(G)$ は有限群なので、その交換子群 $D(G//O^\theta(G))$ が考えられる。 $D(G//O^\theta(G))$ の G への逆像を $D(G)$ と表すことにする。すなわち $D(G)$ は剰余スキームがアーベル群となるような閉部分集合のうち最小のものである。

ここではアソシエーションスキームの表現とは、その隣接代数 $\mathbb{C}G$ の線形表現のこととする。 $\mathbb{C}G$ は行列環として定義されているので $\sigma_g \mapsto \sigma_g$ は表現である。これを G の標準表現といい、その指標を γ_G で表す。 γ_G の既約分解を

$$\gamma_G = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} m_\chi \chi$$

とし m_χ を χ の重複度という。

H が G の正規閉部分集合であるとき

$$\pi: \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}(G//H), \quad \sigma_g \mapsto \frac{n_g}{n_{g^H}} \sigma_{g^H}$$

は代数全準同型である [2]。これによって $G//H$ の既約指標は G の既約指標と見ることができて、更にその重複度も一致する。

2 指標の積

G を有限群とし χ, φ をその指標とする。有限群の指標に対しては、その積は単に値の積、すなわち $\chi\varphi(g) = \chi(g)\varphi(g)$ で定義すれば、それはまた指標になる。これは $\mathbb{C}G$ が、余積 $g \mapsto g \otimes g$ によって Hopf 代数であることによる。

アソシエーションスキーム G に対しては [1] にあるように、余積を

$$\Delta: CG \rightarrow CG \otimes CG, \quad \sigma_g \mapsto \frac{1}{n_g} \sigma_g \otimes \sigma_g$$

で定めるのが良いと思われるが、これは一般に代数準同型にはならない(よって CG は Hopf 代数にならない)。しかし、それでもこの余積を採用したとすると、指標の積は

$$\chi\varphi(\sigma_g) := \frac{1}{n_g} \chi(\sigma_g) \varphi(\sigma_g)$$

で定義するのが自然であるといえる。

具体例を見てみると、上のように定義した指標の積は一般に指標とはならないが、一方の指標が特別な場合には指標になることが確認できる。そこで

$$\Delta' := (\pi \otimes 1) \circ \Delta: CG \rightarrow \mathbb{C}(G//O^\theta(G)) \otimes CG, \quad \sigma_g \mapsto \sigma_{gH} \otimes \sigma_g$$

と定めれば Δ' は代数準同型となり、次の結果を得る。

Theorem 2.1. G をアソシエーションスキームとする。 χ を $G//O^\theta(G)$ の指標とし φ を G の指標とすると $\chi\varphi$ は G の指標である。特に $\chi \in \text{Irr}(G//D(G))$, $\varphi \in \text{Irr}(G)$ とすると $\chi\varphi \in \text{Irr}(G)$ であり $m_\varphi = m_{\chi\varphi}$ が成り立つ。

$G//D(G)$ はアーベル群なので $\text{Irr}(G//D(G))$ は自然にアーベル群の構造をもつ。この結果より $\text{Irr}(G//D(G))$ は $\text{Irr}(G)$ に作用し、同じ軌道に入る既約指標は同じ重複度をもつ。この事実はアソシエーションスキームの指標を計算する際に役に立つと思われる。

Theorem 2.1 を実際に利用するには $\text{Irr}(G//D(G))$ を特徴付ける必要があるが、これについては次の結果がある。

Theorem 2.2. $\chi \in \text{Irr}(G)$ に対して $\chi \in \text{Irr}(G//D(G))$ であることと $m_\chi = 1$ であることは同値である。

次に $\text{Irr}(G//O^\theta(G))$ の特徴付けも考えたいが、これについては今のところ出来ていない。一般に $\chi(1) \leq m_\chi$ が成り立ち、 $\chi \in \text{Irr}(G//O^\theta(G))$ ならば $\chi(1) = m_\chi$ である。この逆、すなわち $\chi(1) = m_\chi$ ならば $\chi \in \text{Irr}(G//O^\theta(G))$ が成り立つこと、を予想している。

References

- [1] Y. Doi, Bi-Frobenius algebras and group-like algebras, preprint.
- [2] A. Hanaki, Representations of association schemes and their factor schemes, *Graphs Comb.*, **19** (2003) 195–201.
- [3] P.-H. Zieschang, *An Algebraic Approach to Association Schemes*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1996.