

正規分布関数の展開式と近似式の検討

電気試験所 戸田 英雄

慶應大学(工) 竹内寿一郎

§ 1. 正規分布関数の展開式

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} ; \quad \Phi(t) = \int_{-\infty}^t \phi(u) du$$

$$Q(t) = 1 - \Phi(t) = \int_t^{\infty} \phi(u) du \quad \text{と定義する.}$$

(1) Maclaurin 展開 (1)

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{k! 2^k (2k+1)} \quad (t \geq 0)$$

(2) Maclaurin 展開 (2)

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \phi(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} \quad (t \geq 0)$$

(3) 漸近展開

$$Q(t) = \frac{\phi(t)}{t} \left\{ 1 - \frac{1}{t^2} + \frac{1 \cdot 3}{t^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{t^6} + \cdots + (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{t^{2k}} + \cdots \right\} \quad (t > 0)$$

(4) Laplace の連分数展開

$$Q(t) = \phi(t) \left\{ \frac{1}{t} + \frac{1}{t} + \frac{2}{t} + \dots + \frac{k}{t} + \dots \right\} \quad (t > 0)$$

(5) Shenton の連分数展開

$$\bar{\Phi}(t) = \frac{1}{2} + \phi(t) \left\{ \frac{t}{1} - \frac{t^2}{3} + \frac{2t^2}{5} - \frac{3t^2}{7} + \dots + (-1)^k \frac{k t^2}{2k+1} + \dots \right\} \quad (t \geq 0)$$

(6) - 松の式 (1) — 漸近展開と Maclaurin 展開

$$\bar{\Phi}(t) = \frac{1}{2} + \frac{(2N-1)!!}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k-2N+1}}{2^k k! (2k-2N+1)} - \phi(t) \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{t^{2k+1}} \quad (t \geq 0) \quad (\text{注})$$

(7) - 松の式 (2) — 漸近展開と連分数展開

$$Q(t) = \frac{1}{2} \phi(t) \frac{(2N-1)!!}{(-t^2)^N} \theta_N(t) + \phi(t) \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{t^{2k+1}} \quad (t > 0) \quad (\text{注})$$

:= ?

$$\theta_N(t) = \frac{1}{\frac{t^2}{2}} + \frac{N + \frac{1}{2}}{1} + \frac{1}{\frac{t^2}{2}} + \frac{N + \frac{3}{2}}{1} + \frac{2}{\frac{t^2}{2}} + \frac{N + \frac{5}{2}}{1} + \dots + \frac{k}{\frac{t^2}{2}} + \frac{N + \frac{1}{2}(2k+1)}{1} + \dots$$

(8) Williams - 山内の式

$$\bar{\Phi}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \exp \left\{ \frac{2}{\pi} t^2 \right\} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k t^{2k} a_{2k}^* \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (t \geq 0)$$

:= ?

a_{2k}^* , $k=1, 2, \dots, 21$ の値は次頁に掲げる.

(注) $(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)(2k-5) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \quad (k=1, 2, 3, \dots)$

$(-1)!! = 1$

又、この式において $N=0$ のとき、最後の項は 0 と定義する。

a_{11}^*	=9.56122	35045	18238	13741	94247	43897	20490	3743_{10}^{-3}
a_{12}^*	=4.24051	48289	34914	72494	47149	46485	63675	3385_{10}^{-4}
a_{13}^*	=4.25035	56183	07533	53356	47673	21879	93769	0650_{10}^{-5}
a_{10}^*	=2.19459	53440	34335	08282	05167	81299	14573	5289_{10}^{-6}
a_{12}^*	=1.18981	32821	81724	26100	95428	25732	97848	7065_{10}^{-7}
a_{11}^*	=5.21098	51555	09560	81738	95884	99598	07292	4144_{10}^{-9}
a_{16}^*	=2.10430	10718	05297	23379	41574	22475	14960	7684_{10}^{-10}
a_{18}^*	=7.55736	50578	90662	84348	21062	34852	64006	6502_{10}^{-12}
a_{19}^*	=2.48449	93291	25691	27006	96083	26974	82389	5898_{10}^{-13}
a_{22}^*	=7.47859	52182	71905	96009	15692	54115	87190	1117_{10}^{-15}
a_{11}^*	=2.08146	41619	50670	32177	97950	79475	67989	4209_{10}^{-16}
a_{20}^*	=5.38099	62973	86137	69439	99676	91397	23894	4479_{10}^{-18}
a_{28}^*	=1.29919	69318	61818	29537	84394	29869	44288	2451_{10}^{-19}
a_{31}^*	=2.94183	20327	16143	72876	91115	54466	64936	8038_{10}^{-21}
a_{32}^*	=6.27178	41655	04243	83759	98635	05895	64315	1572_{10}^{-23}
a_{31}^*	=1.26317	32145	13080	56037	63638	32897	37344	1728_{10}^{-24}
a_{10}^*	=2.41079	86991	64016	46245	01623	71435	71794	3134_{10}^{-26}
a_{32}^*	=4.37192	11503	61595	41505	47037	22299	85605	7366_{10}^{-28}
a_{40}^*	=7.55217	53535	99606	22727	19136	87861	95729	0221_{10}^{-30}
a_{42}^*	=1.24547	59362	07347	31660	00617	98340	57916	9192_{10}^{-31}
a_{44}^*	=1.96495	14135	79575	48962	37259	60951	74394	0025_{10}^{-33}
a_{46}^*	=2.97122	78834	63570	95839	83607	63584	25103	2029_{10}^{-35}
a_{48}^*	=4.31356	49816	62018	38183	50897	99953	54416	7861_{10}^{-37}
a_{50}^*	=6.02203	43400	55728	40638	11538	25591	62026	4281_{10}^{-39}
a_{52}^*	=8.09645	92901	26672	23382	73205	23168	93926	0415_{10}^{-41}
a_{54}^*	=1.04974	65216	90834	15189	02420	86890	57108	5962_{10}^{-42}
a_{56}^*	=1.31420	22132	15706	13486	19451	77013	05411	5178_{10}^{-44}
a_{58}^*	=1.59053	14835	50406	16525	75226	79017	45021	6033_{10}^{-46}
a_{60}^*	=1.86296	64180	65770	72391	04583	91413	79996	4415_{10}^{-48}
a_{62}^*	=2.11397	79864	23582	00711	56759	88426	97971	4987_{10}^{-50}

(9) 連分数展開 — Laplace の式の変形 ($N=0$ の - 松の式 (4))

$$Q(t) = \phi(t) \left\{ \frac{t}{\frac{t^2}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{1}{\frac{t^2}{2}} + \frac{\frac{3}{2}}{1} + \frac{2}{\frac{t^2}{2}} + \dots + \frac{k}{\frac{t^2}{2}} + \frac{\frac{1}{2}(k+1)}{1} + \dots \right\} \quad (t > 0)$$

(10) Laplace の式の Contraction

$$Q(t) = \phi(t) \left\{ \frac{t}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+5} + \frac{12}{t^2+9} - \dots - \frac{(2k-3)(2k-2)}{t^2+4k-3} - \dots \right\} \quad (t > 0)$$

§ 2. 正規分布関数の近似式

(1) Hastings の最良近似式 (1)

$$x = \frac{1}{1 + p_k t} \quad \text{とおいて}$$

$$Q(t) = \phi(t) \{a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k\} \quad (0 \leq t < \infty)$$

	k=3	k=4	k=5
p_k	0.33267	0.27009 1	0.23164 19
a_1	0.43618 36	0.18061 683	0.31938 1530
a_2	-0.12016 76	0.76520 183	-0.35656 3782
a_3	0.93729 80	-0.76168 893	1.78147 7937
a_4		1.06918 444	-1.82125 5978
a_5			1.33027 4429

(2) Hastings の最良近似式 (2)

$$Q(t) = \frac{1}{2} \{1 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k\}^{-2^{(k-2)}} \quad (0 \leq t < \infty)$$

	k=4	k=5	k=6
b_1	0.19685 4	0.09979 271	0.04986 73470
b_2	0.11519 4	0.04432 014	0.02114 10061
b_3	0.00034 4	0.09699 203	0.00327 76263
b_4	0.01952 7	-0.00009 862	0.00003 80036
b_5		0.00058 155	0.00004 88906
b_6			0.00000 53830

(3) 山内の最良近似式 (1)

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \exp\left\{-\frac{2}{\pi} t^2\right\} (1 + 0.008692 t^4) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (0 \leq t < \infty)$$

(4) 山内の最良近似式 (2)

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \exp\left\{-\frac{2}{\pi} t^2\right\} \cdot \left\{1 + t^4 \left(0.0055t + \frac{0.0551}{t^2 + 14.4}\right)\right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (0 \leq t < \infty)$$

(5) Hart の最良有理関数近似式 (1) (注: 25頁)

$$Q(t) = \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_l t^l}$$

(6) Hart の最良有理関数近似式 (2) (注)

$$Q(t) = \phi(t) \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_l t^l}$$

(7) Ibbetson の式 (1)

$$\frac{t}{2} = x \quad ; \quad x^2 = y \quad \text{とて}$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + x (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n)$$

($0 \leq t \leq 2$)

$a_0 = 0.79788 \ 45605 \ 93$	$a_5 = -0.01919 \ 82920 \ 04$
$a_1 = -0.53192 \ 30073 \ 00$	$a_6 = 0.00519 \ 87750 \ 19$
$a_2 = 0.31915 \ 29326 \ 94$	$a_7 = -0.00107 \ 52040 \ 47$
$a_3 = -0.15196 \ 87513 \ 64$	$a_8 = 0.00012 \ 48189 \ 87$
$a_4 = 0.05905 \ 40356 \ 42$	

(8) Ibbetson の式 (2)

$$\frac{t}{2} = x, \quad x - 2 = z \quad \text{とて}$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n)$$

($2 \leq t \leq 6$)

$b_0 = 0.99993 \ 66575 \ 24$	$b_8 = -0.00203 \ 42548 \ 74$
$b_1 = 0.00053 \ 53108 \ 49$	$b_9 = -0.00079 \ 46208 \ 20$
$b_2 = -0.00214 \ 12687 \ 41$	$b_{10} = 0.00139 \ 06042 \ 84$
$b_3 = 0.00535 \ 35791 \ 08$	$b_{11} = -0.00067 \ 69049 \ 86$
$b_4 = -0.00927 \ 94533 \ 41$	$b_{12} = -0.00001 \ 95381 \ 32$
$b_5 = 0.01163 \ 04473 \ 19$	$b_{13} = 0.00015 \ 25292 \ 90$
$b_6 = -0.01055 \ 76250 \ 06$	$b_{14} = -0.00004 \ 52556 \ 59$
$b_7 = 0.00654 \ 97912 \ 14$	

(9) Williams の式 (1)

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \exp\left\{-\frac{2}{\pi} t^2\right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (t \geq 0)$$

(注) Hart は (6), (7) の形の最良有理関数近似式を考へ、 n, l の値, 又近似範囲などをいろいろ変えて、59 もの多くの近似式をつくらた。精度も絶対誤差で $10^{-1} \sim 10^{-22}$, $Q(t)$ に対する相対誤差で $10^{-1} \sim 10^{-16}$ の広範囲にわたっている。

(10) Williams の式 (2)

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \exp\left\{-\frac{2}{\pi}t\right\} \left\{1 - \frac{2(\pi-3)}{3\pi^2}t^4\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (t \geq 0)$$

(11) Roger G. Hart の式

$$Q(t) = \frac{\phi(t)}{t + 0.8 e^{-0.4t}} \quad (t > 0.8)$$

(12) Birnbaum の式

$$Q(t) = \phi(t) \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{4+t^2} - t) \quad (t > 1.4)$$

(13) 数値積分 —— Gauss の数値積分

$$\Phi(t) = \frac{t}{2} \sum_{i=1}^n \phi\left(\frac{t}{2}a_i + \frac{t}{2}\right)b_i$$

a_i, b_i は Gauss の数値積分における分点と重みである。

§ 3. 正規分布関数の展開式と近似式の検討

(1) 各展開式の比較

t の小さいところでよい式 (5), (6), (1), (2).

t の大きいところでよい式 (7), (10), (9), (4), (3)

その他 (8)

以上の式についての比較は次頁の表を参照。

各展開式の比較の表 ($k=5^*$ または 6) 表における数字は絶対誤差 $10^{-E} E$

展開式 $\backslash t$	1	2	3	4	5
(5)* Shenton の連分数	16 13 11 9 8 7 6 5 4 3 2				
(6)* 一松の式 (1) $N = [\frac{t+1}{2}]$	16 13 11 9 8 7 6 5 4 3 2				
(1)* Maclaurin 展開 (1)	16 13 11 9 8 7 6 5 4 3 2				
(2)* Maclaurin 展開 (2)	16 13 11 9 8 7 6 5 4 3 2				
(10) Laplace の式の Contraction	2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16				
(7)* 一松の式 (2) $N = [\frac{t}{5}]$	2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16				
(9) 連分数展開 (Laplace 変形)	2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16				
(4) Laplace の連分数	2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16				
(3) 漸近展開		2 3 4 5 6 7 8 9 10 11			
(8) Williams 山内の式	16 13 11 9 8 7 6 5 4 3 2				

(2) 一松の式 (1), (2) における N の選び方について

t と項数 k を固定して最小の誤差を与える N を求めた。

但し t と k はあらかじめ誤差曲線の傾向をみて適当な値を定められた。

最小誤差を与える N の表

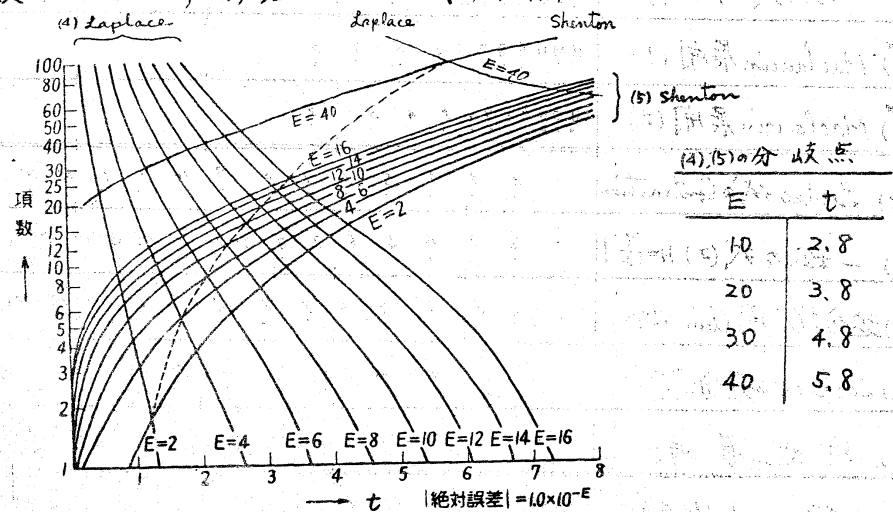
$t \backslash$	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
一松の式 (1)	2	3	4	5	7	9	12	14	17
一松の式 (2)	2	4	5	7	8	11	13	16	18

以上の結果より $N = [\frac{t}{5}]$ は妥当な値であると結論される。

($[]$ はガウス記号で $\frac{t}{5}$ をこえない最大の整数をいみする。)

(3) Laplace と Shenton の連分数展開

正規分布関数の値を高精度で計算するには、連分数計算による方法が便利であることがわか、 π 。次のグラフは、連分数の項数 n 、誤差 10^{-E} の間の関係を示している。

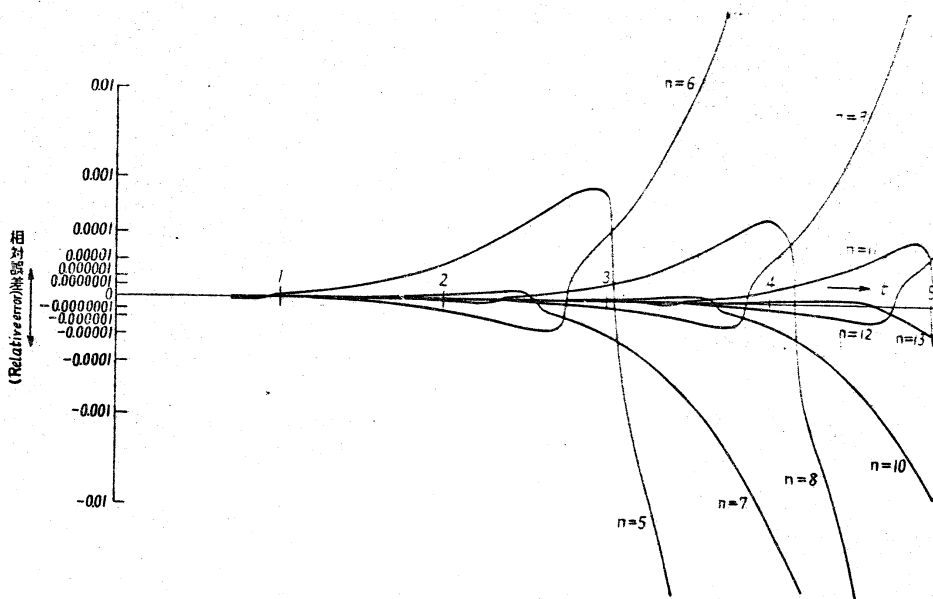


(4) 最良近似式の比較

近 似 式	最大絶対誤差
Hastingsの最良近似式(1) $k=3$	1.2×10^{-5}
$k=4$	1.2×10^{-6}
$k=5$	7.5×10^{-8}
Hastingsの最良近似式(2) $k=4$	2.5×10^{-6}
$k=5$	8.5×10^{-6}
$k=6$	1.5×10^{-7}
小内の最良近似式(1)	1.0×10^{-4}
" (2)	2.0×10^{-5}
Ibbetsonの近似式(1) $0 \leq t \leq 2$	3.2×10^{-10}
" (2) $2 \leq t \leq 6$	1.1×10^{-9}

(5) その他の近似式について

Williams の式 (1), (2) は最大絶対誤差が 3.5×10^{-3} , 4×10^{-4} であり t が極端に小さいか又は大きいところ ($t < 1$, $t > 3$) で精度がよい。Roger G. Hart 及び Einbaum の式は t が 2 ないし 3 以上でないと使えない。正規分布関数のようなわりあい素直な関数には数値積分がかなり有効である。ガウスの n 点数値積分を用いたときの $Q(t)$ に対する相対誤差のグラフは次図の通りである。



Gauss の数値積分

$n=12$ のときの絶対誤差は $t=3$ で 1.9×10^{-16} , $t=4$ で 2×10^{-13} , $t=5$ で 1×10^{-11} となっている。

§ 4. 正規分布関数のパーセント点の近似式

$$Q = \int_{t_Q}^{\infty} \phi(u) du$$

を満たすパーセント点 t_Q の近似式について考える。

(1) Hastings の最良近似式 (1)

$$x = \sqrt{\log_e \frac{1}{Q^2}} \text{ とおいて. } (0 < Q \leq 0.5)$$

$$t_Q = x - \frac{a_0 + a_1 x}{1 + b_1 x + b_2 x^2}$$

$$a_0 = 2.30753$$

$$b_1 = 0.99229$$

$$a_1 = 0.27061$$

$$b_2 = 0.04481$$

$$|E| < 2.8 \times 10^{-3} \text{ (絶対誤差)}$$

(2) Hastings の最良近似式 (2)

前項と同じ x を用いて

$$t_Q = x - \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2}{1 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3}$$

$$c_0 = 2.515517$$

$$d_1 = 1.432788$$

$$c_1 = 0.802853$$

$$d_2 = 0.189269$$

$$c_2 = 0.010328$$

$$d_3 = 0.001308$$

$$|E| < 4.4 \times 10^{-4}$$

(3) 山内の最良近似式

$$y = -\log_e 4Q(1-Q) \text{ とおいて } (0 \leq y \leq 10)$$

$$t_Q = \left[y(2.0611786 - \frac{5.7262204}{y+11.640595}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|E_R| < 4.9 \times 10^{-4} \text{ (相対誤差)}$$

(4) 戸田の最良近似式 (1)

前項と同じ y を用いて

$$t_Q = \left[y \left(a_0 + a_1 y + \frac{a_2}{a_3 + a_1 y} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|E_R| < 1.5 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.37029\,934_{10}+1 & a_2 &= 0.19561\,294_{10}+1 \\ a_1 &= -0.29489\,901_{10}-1 & a_3 &= -0.91722\,758 \end{aligned}$$

(5) 戸田の最良近似式 (2)

前項と同じ y を用いて

$$t_Q = [y (b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots + b_n y^n)]^{\frac{1}{2}}$$

$$|E_R| < 1.2 \times 10^{-8}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= 0.15707\,96288_{10}+1 & b_6 &= -0.10452\,74970_{10}-5 \\ b_1 &= 0.37069\,87906_{10}-1 & b_7 &= 0.83609\,37017_{10}-7 \\ b_2 &= -0.83643\,53589_{10}-3 & b_8 &= -0.32310\,81277_{10}-8 \\ b_3 &= -0.22509\,47176_{10}-3 & b_9 &= 0.36577\,63036_{10}-10 \\ b_4 &= 0.68412\,18299_{10}-5 & b_{10} &= 0.69362\,33982_{10}-12 \\ b_5 &= 0.58242\,38515_{10}-5 \end{aligned}$$

(6) 連分数を用いた反復法

$$t_0 = [-2 \log_e \sqrt{2\pi} Q]^{\frac{1}{2}} \quad \text{と} \quad \text{おいて}$$

$$t_k = [-2 \log_e \sqrt{2\pi} Q / \left\{ \frac{1}{|t_{k-1}|} + \frac{1}{|t_{k-1}|} + \frac{2}{|t_{k-1}|} + \dots + \frac{k}{|t_{k-1}|} \right\}]^{\frac{1}{2}}$$

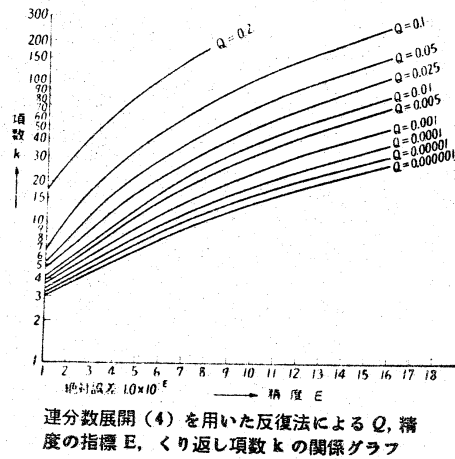
$$k=1, 2, 3, \dots$$

収束するまで反復する。真値 t^* について

$$t_{k-1} < t^* < t_k \quad \text{又は} \quad t_{k-1} > t^* > t_k$$

を満足することが確かめられている。

次のグラフは Laplace の連分数展開式について反復法を試みた結果 Q , 精度 10^{-8} , くり返し項数 k の間の関係を示すものである。



§ 5. 高精度計算と連分数

正規分布関数値を求めるにあたり，2種々の計算法を試みた結果，連分数による計算は収束のよさ及び桁落ちの少ないことから考え，かなり有効な手段であることがわかった。高精度計算を行なう上にも，除算に計算時間がかかるということをもろをいって最もよい方法である。次頁に掲げるのは FACOM 230 20/30 を使った FORTRAN で計算した $Q(t)$ の値である。連分数展開式(4)，(5)を $t=4$ のところで使いわけた。一松の式(1)で計算した値とかなり一致している。桁落ちと計算誤差のため有効40桁一致しないが， $Q(t)$ を計算する場合 Laplace の連分数展開を用いると桁落ちが少なくなることがわかる。

APPROX. OF $Q(X)$ BY LAPLACE AND SHENTON METHOD

X	$Q(X)$
0.10000000E+000	0.4601721627229710185345953817608179169856E+000
0.10000000E+001	0.1586552539314570514147674543679620775225E+000
0.20000000E+001	0.2275013194817920720028263716653343747190E-001
0.30000000E+001	0.1349898031630094526651814767594977377400E-002
0.40000000E+001	0.31671241833119921253770756722150596190000E-004
0.50000000E+001	0.2866515718791939116737523328746453538572E-006
0.60000000E+001	0.9865876450376981407008641323980420186735E-009
0.70000000E+001	0.1279812543885835004383623690780832998057E-011
0.80000000E+001	0.6220960574271784123515995172588188422582E-015
0.90000000E+001	0.1128588405953840647735502075968747257999E-018

HITOTSUMATSU の式 (1) による計算

$P(0.1000)$	$= +4.601721627229710185345953817608179169856E-01$
$P(1.0000)$	$= +1.586552539314570514147674543679620775220E-01$
$P(2.0000)$	$= +2.275013194817920720028263716653343747050E-02$
$P(3.0000)$	$= +1.349898031630094526651814767594977379000E-03$
$P(4.0000)$	$= +3.1671241833119921253770756722151298000000E-05$
$P(5.0000)$	$= +2.8665157187919391167375233287464650000000E-07$
$P(6.0000)$	$= +9.8658764503769814070086413240350000000000E-10$
$P(7.0000)$	$= +1.2798125438858350043836236980000000000000E-12$
$P(8.0000)$	$= +6.2209605742717841235160700000000000000000E-16$
$P(9.0000)$	$= +1.1285884059538406477355000000000000000000E-19$

[参考文献]

- 1) Abramowitz, M. and Stegun, I.A. : Handbook of Mathematical Functions 1964 (National Bureau of Standards) pp. 925-990.
- 2) Bayly, B. de F. : "Gauss' quadratic formula with twelve ordinates," Biometrika Vol. 30 (1938-9) pp. 193-194.
- 3) Birnbaum, Z.W. : "An inequality for Mill's ratio" Annals of Mathematical Statistics Vol. 13.(1942) pp. 245-246.
- 4) Feller, W. : An Introduction to Probability Theory and Its Application 1950 (John Wiley and Sons) pp. 166.
- 5) Hastings, C. Jr. : Approximations for Digital Computers. 1955 (Princeton University Press)
- 6) Hitotsumatsu, S. : "On the numerical computation of incomplete gamma function," Comm. Math. Univ. St. Paul. Vol. 15 (1967) pp. 91-108.
- 7) Hart, R.G. : "A formula for the approximation of definite integrals of the normal distribution function," Mathematics of Computation (Mathematical Tables and other Aids to Computation) Vol. 11 (1957) pp. 265.
- 8) Ibbetson, D. : "ALGOLITHM 209 GAUSS," Communications of ACM Vol. 6, No. 10, (1963) pp. 616.
- 9) National Bureau of Standards : Table of Normal Probability Functions. 1953 (U.S. Government Printing Office)
- 10) Shenton, L.R. : "Inequalities for the normal integral including a new continued fraction," Biometrika Vol. 41 (1954) pp. 177-189
- 11) Toda, H. : "An optimal rational approximation for normal deviates for digital computers," Bul. Electrotech. Lab. Vol. 31. No. 12 (1967) pp. 1259-1270.
- 12) Williams, J.D. : "An approximation to the probability integral," Annals of Mathematical Statistics Vol. 17 (1946) pp. 363-365
- 13) 山内二郎 : "正規分布に関する近似関数" 第5回プログラミングシンポジウム報告集 (1964) pp. N 107-114.
- 14) 山内二郎 : "正規分布の百分率点の有理関数近似" 第6回プログラミングシンポジウム報告集 (1965) pp. D 15-17.
- 15) 山内二郎, 森口繁一, 一松信 : 電子計算機のための数値計算法 : II 1967 (培風館)
- 16) 渋谷政昭 : 連分教と機械計算 第3回 PC セミナーテキスト 1957 (日本科学技術連盟)
- 17) Hart, J.F. : Computer Approximations. 1968 (John Wiley & Sons) pp. 136-140.