

ある種の共役類について

埼玉大 教育 稲垣信夫

§ 1 序

Avinoam Mann は *On subgroups of finite Groups II* (J. Alg. 22, 1972, P233-P240) の中で可解群 G の部分群 H と, G の Sylow systems との間の関係づきに着目して種々の部分群を導入した。以下そこで導入された部分群を定義する。 $\mathcal{S} \in G$ の Sylow system とするとき, $H \cap \mathcal{S}$ が H の Sylow system となる場合に Sylow system $\mathcal{S}$ は H の中で reducible という。 $\mathcal{M}_0 \in H$ の中で reducible な G のすべての Sylow systems の集合とする。 G は共役を作る方法で G のすべての Sylow systems 上で transitive であるが, 上の $\mathcal{M}_0$ を含む最少の imprimitivity の集合を $\mathcal{M}$ とおき, これを $\mathcal{M}_0$ を含む最少の block とよぶことにする。そのとき $\mathcal{M}$ の stabilizer $\in Q(H)$ とかく。 $\mathcal{M}$ と $Q(H)$ の間には次の関係が知られている 即ち $\mathcal{M}$ は $Q(H)$ の中で reducible な G のすべて

の Sylow systems の集合である. また M_0 の stabilizer を $L(H)$ とかく

つぎに G の部分群 H と K が G の中で共役であるということ
を以下で定義する. ちるゆゑ H の中で reducible な G の Sylow
systems の集合全体が K のそれと一致する場合である. この
定義は R. Carter におつてゐる. A. Mann は この共役類の
中に最大元が唯一つ存在することを示した. これを $M(H)$ と
かく. そのとき上に定義した $L(H)$ は $N_G(M(H))$ である.

$Q(H)$ については A. Mann によつて多くのことが知られ
てゐるが, $M(H)$, $L(H)$ についてはあまりよく判つてゐない.

A. Mann は M_0 が block となるための必要十分条件
を strong subnormalizer の存在定理から得てゐる. (System
normalizers and subnormalizers. Proc. Lond. Math. Soc.
(3) 20 (1970) P123-P143) この小論では上の
 $M(H)$ を用いて別の型の必要十分条件をのべる.

§2. 定理について

定義 $G \supset H$ が G の中で abnormal とは $\langle H, H^g \rangle \neq 1$

定義 $G \supset H$ が G の中で pronormal とは H と H^g に対
して $H^g = H^t$ とする適当な元 t が $\langle H, H^g \rangle$ の中にとれる
こと.

定理 $G \supset H$, m_0 は上記のものとする. そのとき以下は同値である.

1° m_0 が block を作っている.

2° $M(H)$ は abnormal

3° $M(H)$ は pronormal

さらにこのとき $L(H) = Q(H) = M(H) \geq H$.

証明の概略

1° $\rightarrow$ 2° m_0 が block を作っているとするとき m_0 は $Q(H)$ の中で reducible な G の Sylow systems の全体と一致するから $Q(H) \leq M(H)$. 一方 $Q(H) = \{g \mid m_0^g = m_0\} = L(H) \geq M(H)$ より $Q(H) = M(H)$ である. ところで $Q(H)$ が abnormal は知られているから $M(H)$ は abnormal となる.

2° $\rightarrow$ 3° abnormal なる pronormal は定義より明白.

3° $\rightarrow$ 1° $M(H)$ が pronormal となるのは " $M(H) \sim M(H)^g$ " より適切な x が $\langle M(H), M(H)^g \rangle$ の中より取れて $M(H)^x = M(H)^g$ であるから $g \in \pm N_G(M(H))$ によって $G = \langle M(H), M(H)^g \rangle N_G(M(H))$ G がこのような型に書ける事実より A. Mann の定理を用いて $N_G(M(H)) \geq Q(M(H))$ である. 一方 $Q(M(H))$ の定義より $N_G(M(H)) \leq Q(M(H))$ であるから $N_G(M(H)) = Q(M(H))$ である. また $M(H)$ の定義より $Q(M(H)) = Q(H)$ であるから $Q(H)$

(1)

$\triangleright M(H)$ とする. ここで $Q(H)$ は reducible な Sylow system
 の集合 $\mathcal{M}$ とすれば 上記より $\mathcal{M}$ は $M(H)$ は reducible
 とするから $\mathcal{M} \leq \mathcal{M}_0$. 一方 $\mathcal{M} \geq \mathcal{M}_0$. より $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$. とす
 る block を作る.