

氏 名	やま だ き み こ 山 田 紀 美 子
学 位 の 種 類	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2721 号
学位授与の日付	平成 16 年 1 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	A sequence of blowing-ups connecting moduli of sheaves and the Donaldson Polynomial under change of polarization (相異なる偏極に対するモジュライ空間たちをつなぐブローアップの列とその ドナルドソン多項式への応用)
論文調査委員	(主 査) 教 授 丸 山 正 樹 教 授 森 脇 淳 助教授 並 河 良 典

論 文 内 容 の 要 旨

射影的代数多様体 X とその上の豊富な直線束 H の組を考える。 X 上の接続層 E が安定あるいは半安定という概念は H の取り方に依っている。 H を固定したとき、同じ不変量 (階数, Chern 類) を持つ半安定層の S -同値類の集合はモジュライスキームを構成し、それは射影的スキームである。モジュライが代数幾何学的、微分幾何学的に基礎多様体についての重要な情報を提供すること、またモジュライそのものが豊かな幾何学的研究対象であることが知られている。従って、 H を取り替えたときモジュライがどのように変化するか、あるいはそれらの関係をどのように記述できるかは、深い数学的内容を孕んだ問題であり、多くの研究者を引きつけてきた。

上記の問題は、基礎多様体の構造に深く関わっていること、高次元、高階数のとき一般的な設定で半安定層の具体的な特定が困難極まりないことなどから、曲線という自明な場合を除いて最も簡単な代数曲面上の階数 2 の場合のみに研究が集中してきた。微分幾何学的には「豊富な直線束」は Riemann 計量 g に置き換えられ、この場合にもモジュライは g の取り方に依っている。Donaldson は微分幾何学的な視点から、代数曲面上、Riemann 計算が g 、階数 2、Chern 類が c_1, c_2 の場合、 g が充分一般であり、 c_2 が c_1 に比して大きければ、モジュライ $M_g(c_1, c_2)$ は自然な次元を持ち、その特異点軌跡が十分小さいことを証明した。これが一連の研究の出発点であり、その後 Matsuki-Wentworth, Ellingsrud-Göttsche, Friedman-Qin 等は、豊富な直線束 H_1, H_2 を取ったとき、モジュライ $M_{H_1}(c_1, c_2)$ と $M_{H_2}(c_1, c_2)$ の関係を調べた。Matsuki-Wentworth は豊富な直線束の数値的同値類のなす空間に c_1, c_2 などで決まる「壁」が定義できて、壁で仕切られた同じ部屋の中で H_1, H_2 を取れば、モジュライは変わらないが、壁を通り越すとき $M_{H_1}(c_1, c_2)$ と $M_{H_2}(c_1, c_2)$ がフリップで結ばれるという基本原理を発見した。実際、彼らは $M_{H_1}(c_1, c_2)$ と $M_{H_2}(c_1, c_2)$ が双有理同値であるとき、それらを結ぶ双有理射の列を構成した。Ellingsrud-Göttsche および Friedman-Qin は、初等変換という手法を使って、 X の小平次元が 0 で

$$P = \{E \in M_{H_1}(c_1, c_2) \mid E \text{ は } H_2 \text{ に関して半安定でない}\}$$

が非特異な場合に $M_{H_1}(c_1, c_2)$ と $M_{H_2}(c_1, c_2)$ はモジュライの情報から具体的に構成できる blowing-up と blowing-down で結べることを示した。

申請者の最初の主要結果は、上記の小平次元と P についての仮定が不用であることを主張している。すなわち

X は非特異な射影的代数曲面とする。豊富な直線束 H に関して半安定層で、階数 2、Chern 類が c_1, c_2 のもののモジュライを $M_H(c_1, c_2)$ で表す。 $M_{H_1}(c_1, c_2)$ と $M_{H_2}(c_1, c_2)$ が双有理同値であるとき、それらは有限個の blowing-up と blowing-down で結べる。しかも、それらの center はモジュライについての情報から具体的に書ける。

半安定層のモジュライの微分幾何学的な応用の最も有効なものは、Donaldson 不変量、あるいは Donaldson 多項式であろう。これはモジュライ $M_g(c_1, c_2)$ を使って定義されるが、Riemann 計量 g に依る量である。豊富な直線束は Riemann 計量を定義するが、すべての Riemann 計量が豊富な直線束に対応しているわけではない。J. Li はモジュライ $M_H(c_1, c_2)$ を使っ

て代数幾何学的に Donaldson 多項式に対応する $\gamma_H(c_2)$ を定義した。 $\gamma_H(c_2)$ は定義変数域が Donaldson 多項式のそれより狭いのが一般的であるが、 c_2 が充分大きければ、Donaldson 多項式を $\gamma_H(c_2)$ の定義変数域に制限したものであることが知られている。従って、Donaldson 多項式が Riemann 計量からの独立性についての結果から、 X が単連結かつ $p_g(X) > 0$ ならば $\gamma_H(c_2)$ が H に依らないことが導かれる。

Donaldson 多項式の具体的な計算は困難であり、これまで成功したのは大部分が代数幾何学的方法によるものである。従って、上記の事実の代数幾何学的な機構の解明が重要であり、多くの研究者の興味を引いてきた。申請者は、前半の結果に基づいて、豊富な直線束 H_1, H_2 が隣の部屋にある時に、差 $\gamma_{H_1}(c_2) - \gamma_{H_2}(c_2)$ をモジュライを繋ぐ blowing-up の center の情報を使って具体的に記述することに成功した。この具体的な記述を詳しく解析することにより、かなり強い条件の下ではあるが $\gamma_H(c_2)$ の H からの独立性の証明をした。定理の成立のために付けられた条件は、相当強いと考えられるが、これまで知られている結果を含むものであり、例えば K3 曲面では自動的に充たされるものである。

上記の結果では、 $M_{H_1}(c_1, c_2)$ と $M_{H_2}(c_1, c_2)$ が双有理であることを前提にしているが、モジュライの挙動は期待するほど穏やかなものとは限らない。実際、申請者は修士論文で、小平次元が正であるある曲面 X と $(c_1, c_2) \in \text{Pic}(X) \times \mathbb{Z}$

$$\sup_{H \text{ 豊富}} \dim M_H(c_1, c_2) = \infty$$

となるものがあることを示した。しかし、 c_2 が充分大きければ、よい性質を持った豊富な直線束の存在を示したのが、参考論文である。参考論文の主定理は以下の通りである。

定理 非特異、射影的代数曲面 X について、 $p_g(X) > 0$ と仮定する。 $4c_2 - c_1^2$ が X に対して充分大きければ、ある豊富な直線束 H_0 があって次を充たす。 $M_{H_0}(c_1, c_2)$ は既約であり、任意の豊富な直線束 H について $M_{H_1}(c_1, c_2) \cap M_{H_0}(c_1, c_2) \neq \emptyset$ である。

論文審査の結果の要旨

半安定層のモジュライは代数幾何学的、微分幾何学的に基礎多様体についての重要な情報を提供すること、またモジュライそのものが豊かな幾何学的研究対象であることから、多くの研究者の興味を引いている。微分幾何学的には、実 4 次元多様体の研究に革命的な視点と道具をもたらした Donaldson 不変量、あるいは Donaldson 多項式そのものには、このモジュライの存在と構造が核になっている。またその具体的な計算は一般に非常に困難であり、成功したものの大部分は代数幾何学的方法によるものである。

半安定層の定義は、基底多様体の偏極構造（代数幾何学的には豊富な直線束、微分幾何学的には Riemann 計量）に依っている。従って、半安定層のモジュライは偏極構造を固定してはじめて構成されるものである。偏極構造を変更したときモジュライがどのように変わるか、従って、特に Donaldson 多項式がどのように変化するかは、興味ある研究対象であり、応用上で極めて重要な問題である。これについては代数曲面上、階数 2 の場合に幾つかの先駆的業績がある。充分一般の偏極構造を取ったとき、モジュライの構造が期待した通りの次元を持ち、特異点の軌跡も大きくないというのは、Donaldson による基本的な成果である。

偏極構造 H を固定した代数曲面上、階数 2、Chern 類 c_1, c_2 を持つ半安定層のモジュライを $M_H(c_1, c_2)$ で表す。このとき $M_H(c_1, c_2)$ は射影的スキームになる。豊富な直線束の数値的同値類の集合は (c_1, c_2) によって定まる壁によって幾つかの部屋に分割される。Matsuki-Wentworth 等は偏極構造が同じ部屋に属するならば、モジュライは同じものになること、偏極構造 H_1, H_2 が隣接する部屋に属し $M_{H_1}(c_1, c_2)$ と $M_{H_2}(c_1, c_2)$ が双有理であるならば、その双有理写像はフリップになることを発見した。学位申請者 山田紀美子はここに現れるフリップをより具体的に、モジュライの具体的な情報を使って記述することを出発点とした。これについての先駆的研究は Ellingsrud-Göttsche および Friedman-Qin によるものがある。彼らは、初等変換という手法を使って、 X の小平次元が 0 で

$$P = \{E \in M_H(c_1, c_2) \mid E \text{ は } H' \text{ に関して半安定でない}\}$$

が非特異な場合に $M_{H_1}(c_1, c_2)$ と $M_{H_2}(c_1, c_2)$ はモジュライの情報から具体的に構成できる blowing-up と blowing-down で結べることを示した。この結果を小平次元と P についての条件なしに示すことは容易なことではない。例えば、 P の自然な

閉部分スキームの構造は何であろうか。被約な構造が自然なものとは言えず、被約な構造を採用すれば結論は成立しなくなる。従って、定理の定式化そのものに深い数学的洞察と独創性が要求される。また、証明においても複雑な構造を持った center での 2 つの blowing-up を比較することになり、先行した結果のように集合論的な比較ですまない困難さがある。申請者はこれまで培った数学的力量を駆使して、これらの困難をねじ伏せ、上記の Ellingsrud-Göttsche および Friedman-Qin による結果が、小平次元と P についての条件なしに成立することを証明した。

上の成果だけでも申請者の数学的独創性、力量を充分示しているが、本学位論文はさらにこの結果の有効な応用まで研究を進展させている。J. Li が定義した Donaldson 多項式の代数幾何学的対応物である $\gamma_H(c_2)$ に関するものである。まず前半の結果に基づいて、豊富な直線束 H_1, H_2 が隣の部屋にある時に、差 $\gamma_{H_1}(c_2) - \gamma_{H_2}(c_2)$ をモジュライを繋ぐ blowing-up の center の情報を使って具体的に記述することに成功した。これ自身が前半の結果の有効性を示すものであり、blowing-up の center が具体的に記述できているおかげで、多くの場合にその差を計算できる。これにより、 $\gamma_H(c_2)$ の H からの独立性について、K3 曲面上などのこれまで得られている結果を超えた成果を挙げることができた。

参考論文においては、半安定層のモジュライは、偏極構造を動かしたとき一般には制御困難な振る舞いをするが、代数曲面上で階数 2 の場合には、第 2 Chern 類を大きく取れば穏やかな挙動を示すことを示している。これは、この方面で中心的な課題とされる Qin の問題に、部分的ではあるが肯定的な解を与えたことになる。

以上のように、本学位論文は京都大学博士（理学）を授与するに充分な新しい知見を呈示しており、また申請者の高い独創性を示しているものである。