

例外リー群の実現について

信州大理

横田 一郎

(Ichiro Yorota)

G_2 :

$$(0) \quad G_2^C = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(\mathfrak{C}^C) \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y) \}.$$

$$(1) \quad G_2 = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(\mathfrak{C}) \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y) \}.$$

$$(2) \quad G_{2(2)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(\mathfrak{C}') \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y) \} \\ \simeq \text{SO}(4) \times \mathbb{R}^8.$$

F_4 :

$$(0) \quad F_4^C = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(\mathfrak{J}^C) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \}.$$

$$(1) \quad F_4 = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(\mathfrak{J}) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \}.$$

$$(2) \quad F_{4(4)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(\mathfrak{J}') \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \} \\ \simeq (\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(3))/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^{28}.$$

$$(3) \quad F_{4(-20)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(\mathfrak{J}_1) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \} \\ \simeq \text{Spin}(9) \times \mathbb{R}^{16}.$$

E_6 :

$$(0) \quad E_6^C = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(\mathfrak{J}^C) \mid \det \alpha X = \det X \}.$$

$$(1) \quad E_6 = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(\mathfrak{J}^C) \mid \det \alpha X = \det X, \langle \alpha X, \alpha Y \rangle = \langle X, Y \rangle \}.$$

$$(2) \quad E_{6(6)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(\mathfrak{J}') \mid \det \alpha X = \det X \} \\ \simeq \text{Sp}(4)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^{42}.$$

$$(3) \quad E_{6(2)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(\mathcal{J}^C) \mid \det \alpha X = \det X, \langle \alpha X, \alpha Y \rangle_Y = \langle X, Y \rangle_Y \} \\ \simeq (\text{Sp}(1) \times \text{SU}(6))/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^{40}.$$

$$(4) \quad E_{6(-14)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(\mathcal{J}^C) \mid \det \alpha X = \det X, \langle \alpha X, \alpha Y \rangle_\sigma = \langle X, Y \rangle_\sigma \} \\ \simeq (\text{U}(1) \times \text{Spin}(10))/\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{R}^{32}.$$

$$(5) \quad E_{6(-26)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(\mathcal{J}) \mid \det \alpha X = \det X \} \\ \simeq F_4 \times \mathbb{R}^{26}.$$

E_7 :

$$(0) \quad E_7^C = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(\mathcal{P}^C) \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q \}.$$

$$(1) \quad E_7 = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(\mathcal{P}^C) \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q, \langle \alpha P, \alpha Q \rangle = \langle P, Q \rangle \}.$$

$$(2) \quad E_{7(7)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(\mathcal{P}') \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q \} \\ \simeq \text{SU}(8)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^{70}.$$

$$(3) \quad E_{7(-5)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(\mathcal{P}^C) \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q, \langle \alpha P, \alpha Q \rangle_\sigma = \langle P, Q \rangle_\sigma \} \\ \simeq (\text{SU}(2) \times \text{Spin}(12))/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^{64}.$$

$$(4) \quad E_{7(-25)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(\mathcal{P}) \mid \alpha(P \times Q)\alpha^{-1} = \alpha P \times \alpha Q \} \\ \simeq (\text{U}(1) \times E_6)/\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{R}^{54}.$$

E_8 :

$$(0) \quad E_8^C = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(\mathcal{P}_8^C) \mid \alpha[R_1, R_2] = [\alpha R_1, \alpha R_2] \}.$$

$$(1) \quad E_8 = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(\mathcal{P}_8^C) \mid \alpha[R_1, R_2] = [\alpha R_1, \alpha R_2], \langle \alpha R_1, \alpha R_2 \rangle = \langle R_1, R_2 \rangle \}.$$

$$(2) \quad E_{8(8)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(\mathcal{P}_8') \mid \alpha[R_1, R_2] = [\alpha R_1, \alpha R_2] \} \\ \simeq \text{Ss}(16) \times \mathbb{R}^{128}.$$

$$(3) \quad E_{8(-24)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(\mathcal{P}_8^C) \mid \alpha[R_1, R_2] = [\alpha R_1, \alpha R_2], \langle \alpha R_1, \alpha R_2 \rangle_U = \langle R_1, R_2 \rangle_U \} \\ \simeq (\text{SU}(2) \times E_7)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^{112}.$$

表の各(0)の群は単連結複素単純リ-群であり, 各(1)の群は単連結コンパクト単純リ-群であり, (2)以下の群は連結な非コンパクト単純リ-群でその下にその群の極分解を与えている.

以下これらの群の定義を与えよう. ただし紙面の都合上 G_2, F_4, E_6 型に限り E_7, E_8 型については省略した. また一般的に記号の約束をしておく.

- (i) V を $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上のベクトル空間のとき, $\text{Iso}_K(V)$ を K -線型同型写像全体のなす群を表わす.
- (ii) V を $\mathbb{R}$ -ベクトル空間とするとき, $V^{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u, v \in V\}$ とその複素化ベクトル空間とし, $V^{\mathbb{C}}$ における複素共役写像を τ で表わす:
- $$\tau(u + iv) = u - iv.$$
- (iii) σ を群 G の対合的 ($\sigma^2 = 1$) 自己同型写像とあるとき, σ に関する G の不動点部分群を G^{σ} で表わす: $G^{\sigma} = \{g \in G \mid \sigma g = g\}$. 特に σ が元 $a \in G$ より導かれる内部自己同型写像であるとき, G^{σ} を G^a で表わす:
- $$G^a = \{g \in G \mid ag = ga\}.$$

G_2

1.1. $\mathbb{C} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}e$ ($\mathbb{H}$ は四元数体) によって積と

$$(a + be)(c + de) = (ac - \bar{d}b) + (\bar{b}c + da)e$$

で与えた(非可換, 非結合的) $\mathbb{R}$ -多元環 $\mathbb{C}$ を Cayley (division) algebra とする.

$\mathbb{C}$ 内積 (x, y) , 共役 $\bar{x}$ と定められ

$$(a + be, c + de) = (a, c) + (b, d),$$

$$\overline{a + be} = \bar{a} - be$$

で与える。また $\mathcal{C}' = H \oplus He$ による積と

$$(a + be)(c + de) = (ac + \bar{d}b) + (bc + da)e$$

で与える (非可換, 非結合的, 非 division) R -多元環 $\mathcal{C}'$ を split Cayley algebra とする。 $\mathcal{C}'$ にも内積 (x, y) , 共役元 $\bar{x}$ が $\mathcal{C}$ と同様に

$$(a + be, c + de) = (a, c) - (b, d)$$

$$\overline{a + be} = \bar{a} - be$$

で与えられる。

$$1.2. \quad G_2 = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(\mathcal{C}) \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y) \}$$

は G_2 -型 単連結 コンパクト 単純リ-群 である。

$$1.3. \quad \text{写像 } \gamma : \mathcal{C} = H \oplus He \rightarrow \mathcal{C} \text{ と}$$

$$\gamma(a + be) = a - be$$

で定義すると $\gamma \in G_2, \gamma^2 = 1$ である。この群準同型写像 $\psi : \text{Sp}(1) \times$

$$\text{Sp}(1) \rightarrow (G_2)^\gamma,$$

$$\psi(p, q)(a + be) = qa\bar{q} + (p\bar{b}q)e, \quad a + be \in H \oplus He = \mathcal{C}$$

は群同型

$$(G_2)^\gamma \cong (\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1))/Z_2, \quad Z_2 = \{ (1, 1), (-1, -1) \}$$

と誘導する。なおこの群は $\text{SO}(4)$ と同型である。次に群

$$G_2(2) = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(\mathcal{C}') \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y) \}$$

は G_2 -型 連結 非コンパクト 単純リ-群 であり、その極分解は

$$G_{2(2)} \cong SO(4) \times R^6$$

で与えられる. ($G_{2(2)}$ の極大コンパクト部分群 $SO(4)$ は上記の

$(G_2)^Y \cong SO(4)$ に対応している. すなわち $\gamma: \mathbb{C}' = H \oplus He \rightarrow \mathbb{C}'$ を

$\gamma(a + be) = a - be$ で定義すると $\gamma \in G_{2(2)}$ であり, 上記と同様になる

と $(G_{2(2)})^Y \cong SO(4)$ となっている. このような現象は以下で群で起こる

となっているので再記しないことにする).

$$1.3. \quad G_2^C = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(\mathbb{C}^C) \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y) \}$$

は G_2 -型単連結複素単純リー群であり, その極分解は

$$G_2^C \cong G_2 \times R^{14}$$

で与えられる.

$$F_4$$

2.1. $J = J(3, \mathbb{C}) = \{ X \in M(3, \mathbb{C}) \mid X^* = X \}$ において, 積 $X \circ Y$ を

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

で与え, R -代数を (exceptional) Jordan algebra という. J に内積

(X, Y) と $\text{tr}(X, Y, Z)$ をそれぞれ

$$(X, Y) = \text{tr}(X \circ Y), \quad \text{tr}(X, Y, Z) = (X, Y \circ Z)$$

で与える. さらに J に Freudenthal's product $X \times Y$, (X, Y, Z) と行列式

$\det X$ をそれぞれ

$$X \times Y = \frac{1}{2}(2X \circ Y - \text{tr}(X)Y - \text{tr}(Y)X + (\text{tr}(X)\text{tr}(Y) - (X, Y))E),$$

$$(X, Y, Z) = (X, Y \times Z), \quad \det X = \frac{1}{3}(X, X, X)$$

(E は単位行列) で定義する. 積 $X \times Y$ と J は Freudenthal algebra とこのことなる.

$$\begin{aligned}
 2.2. \quad F_4 &= \{ \alpha \in \text{Iso}_R(J) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \} \\
 &= \{ \alpha \in \text{Iso}_R(J) \mid \text{tr}(\alpha X, \alpha Y, \alpha Z) = \text{tr}(X, Y, Z), (\alpha X, \alpha Y) = (X, Y) \} \\
 &= \{ \alpha \in \text{Iso}_R(J) \mid \det \alpha X = \det X, (\alpha X, \alpha Y) = (X, Y) \} \\
 &= \{ \alpha \in \text{Iso}_R(J) \mid \det \alpha X = \det X, \alpha E = E \} \\
 &= \{ \alpha \in \text{Iso}_R(J) \mid \alpha(X \times Y) = \alpha X \times \alpha Y \}
 \end{aligned}$$

は F_4 -型 単連結 コンパクト 単純 リ-群 である. 群 F_4 は 次の 同-視 で G_2 と 部分群 と 1 と 含んで いる. $\alpha \in G_2$ に対して 写像 $\alpha: J \rightarrow J$ と

$$\alpha \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \alpha x_3 & \overline{\alpha x_2} \\ \overline{\alpha x_3} & \xi_2 & \alpha x_1 \\ \alpha x_2 & \overline{\alpha x_1} & \xi_3 \end{pmatrix}$$

で 定義 する と $\alpha \in F_4$ である.

2.3. $\gamma \in G_2$ は F_4 の 元 と 考へ る. 群 $(F_4)^\gamma$ を 決定 する ため に Freudenthal algebra J の 上の 1 つ の 定義 を 与 え よう. $J = J_H \oplus H^3$ (ここに $J_H = J(3, H) = \{ X \in M(3, H) \mid X^* = X \}$ で Freudenthal 積 $X \times Y$ は J の よう に 与 え ら れ る algebra, $H^3 = \{ (a_1, a_2, a_3) \text{ 横ベクトル} \mid a_i \in H \}$ である) によつて Freudenthal 積を

$$(X + a) \times (Y + b) = (X \times Y - \frac{1}{2}(a^*b + b^*a)) - \frac{1}{2}(aY + bX)$$

で 与 え る. このとき γ は

$$\gamma(X + a) = X - a$$

に対応してゐる。さて群同型写像 $\psi: \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(3) \rightarrow (\mathbb{F}_4)^Y$,

$$\psi(p, A)(X + a) = AXA^* + paA^*, \quad X + a \in J_H \oplus H^3 = J$$

は群同型

$$(\mathbb{F}_4)^Y \cong (\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(3))/Z_2, \quad Z_2 = \{ (1, E), (-1, -E) \}$$

を誘導する。

split Cayley algebra $\mathbb{C}'$ を用いて $J' = \{ X \in M(3, \mathbb{C}') \mid X^* = X \}$ とする。

J のときと同様に $X \circ Y, X \times Y, (X, Y)$ を定義すると

$$\begin{aligned} F_{4(4)} &= \{ \alpha \in \text{Iso}_R(J') \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \} = (\mathbb{F}_4 \text{ と同様}) \dots \\ &= \{ \alpha \in \text{Iso}_R(J') \mid \alpha(X \times Y) = \alpha X \times \alpha Y \} \end{aligned}$$

は $\mathbb{F}_4$ -型連結非コンパクト単純リ-群であり、その極分解は

$$F_{4(4)} \cong (\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(3))/Z_2 \times \mathbb{R}^{28}$$

で与えられる。

2.4. 写像 $\sigma: J \rightarrow J$ と

$$\sigma \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & -x_3 & -\bar{x}_2 \\ -\bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ -x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$$

で定義すると $\sigma \in F_4, \sigma^2 = 1$ となる。このとき群同型

$$(\mathbb{F}_4)^\sigma \cong \text{Spin}(9)$$

を得る。ここに $\text{Spin}(9) \cong \text{SO}(V^9)$, $V^9 = \{ X \in J \mid E_1 \circ X = 0, \text{tr}(X) = 0 \} =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x \\ 0 & \bar{x} & -\xi \end{pmatrix} \mid \xi \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{C} \right\} \text{ の 普通被覆群 である。ただし}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とする.} \quad \text{なお, この群 } (F_4)^\sigma \text{ は } E_1 \text{ における } F_4 \text{ の}$$

第 4 部分群 $(F_4)_{E_1}$ に一致していることに注意しておく:

$$(F_4)^\sigma = (F_4)_{E_1} = \{ \alpha \in F_4 \mid \alpha E_1 = E_1 \}.$$

Jordan algebra J に内積 $(X, Y)_\sigma$ をこの σ を用いて

$$(X, Y)_\sigma = (X, \sigma Y)$$

で定義するとき

$$F_{4(-20)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(J) \mid \det \alpha X = \det X, (\alpha X, \alpha Y)_\sigma = (X, Y)_\sigma \}$$

は F_4 -型連結非コンパクト単純リー群であり, その極分解は

$$F_{4(-20)} \simeq \text{Spin}(9) \times \mathbb{R}^{16}$$

で与えられる.

(注意

$$J_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & -\bar{x}_2 \\ -\bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \mid \xi_i \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{に積 } X \circ Y, X \times Y$$

等々 J, J' のときと同様に定義するとき,

$$F_{4(-20)} = \{ \alpha \in \text{Iso}(J_1) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \} = \dots$$

として, $F_4, F_{4(4)}$ と同様に定義し取り扱うこともできる).

$$2.5. \quad F_4^{\mathbb{C}} = \{ \alpha \in \text{Iso}_{\mathbb{C}}(J^{\mathbb{C}}) \mid \alpha(X \circ Y) = \alpha X \circ \alpha Y \} = \dots$$

$$= \{ \alpha \in \text{Iso}_{\mathbb{C}}(J^{\mathbb{C}}) \mid \alpha(X \times Y) = \alpha X \times \alpha Y \}$$

は F_4 -型単連結複素単純リー群であり, その極分解は

$$F_4^C \cong F_4 \times R^{52}$$

で与えられる。

$$E_6$$

3.1. Jordan algebra J の複素化 Jordan algebra $J^C = \{ X + iY \mid X, Y \in J \}$

において J と同様 $X \circ Y, (X, Y), X \times Y, (X, Y, Z), \det X$ 等を定義する。

また J^C の Hermite 内積 $\langle X, Y \rangle$ は

$$\langle X, Y \rangle = (\tau X, Y)$$

で定義する。

$$3.2. \quad E_6 = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(J^C) \mid \det \alpha X = \det X, \langle \alpha X, \alpha Y \rangle = \langle X, Y \rangle \}$$

$$= \{ \alpha \in \text{Iso}_C(J^C) \mid (\alpha X, \alpha Y, \alpha Z) = (X, Y, Z), \langle \alpha X, \alpha Y \rangle = \langle X, Y \rangle \}$$

$$= \{ \alpha \in \text{Iso}_C(J^C) \mid \tau \alpha \tau (X \times Y) = \alpha X \times \alpha Y, \langle \alpha X, \alpha Y \rangle = \langle X, Y \rangle \}$$

は E_6 -型単連結コンパクト単純リー群である。

3.3. え $\alpha \in F_4$ とその複素化写像 $\alpha^C: J^C \rightarrow J^C$ は同一視することにより

よって群 E_6 は F_4 を部分群として含む。そして次がなりたつ。

$$F_4 \cong (E_6)^\tau = \{ \alpha \in E_6 \mid \tau \alpha = \alpha \tau \}$$

$$= \{ \alpha \in E_6 \mid (\alpha X, \alpha Y) = (X, Y) \}$$

$$= \{ \alpha \in E_6 \mid \alpha E = E \}.$$

次に

$$E_{6(-26)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(J) \mid \det \alpha X = \det X \}$$

$$= \{ \alpha \in \text{Iso}_R(J) \mid (\alpha X, \alpha Y, \alpha Z) = (X, Y, Z) \}$$

は E_6 -型連結非コンパクト単純リー群であり, その極分解は

$$E_{6(-26)} \simeq F_4 \times R^{26}$$

で与えられる

(お話し (群 $E_{6(-26)}$ と 群 $F_4, F_{4(-20)}$ と Cayley 平面射影幾何との関係)

$$\mathbb{CP}_2 = \{ A \in J \mid A \times A = 0, A \neq 0 \} / \sim$$

($A \sim B$ の定義は, $B = \lambda A$ となる $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在するとき $A \sim B$ とする)

$$(\simeq \{ A \in J \mid A^2 = A, \text{tr}(A) = 1 \})$$

を Cayley 射影平面という. 元 $A \in \mathbb{CP}_2$ を点といい, また $L \in \mathbb{CP}_2$ を直線という. 点 A と直線 L に対して

$$(L, A) = 0 \iff \text{点 } A \text{ は直線 } L \text{ 上にある}$$

と定義すると, $\mathbb{CP}_2$ は平面射影幾何をつくる (ただし Desargues の公理を満たさない). 実際, 相異なる 2 点 A, B を通る直線は $A \times B$ であり, また相異なる 2 直線 L, M の交点は $L \times M$ である. 3 点 A, B, C が一直線上にある条件は, 点 A が直線 $B \times C$ 上にあること, すなわち

$$(A, B, C) = (A, B \times C) = 0$$

である. (したがって, 量 (A, B, C) を不変にする変換は $\mathbb{CP}_2$ の射影変換を含むことになる. 実際, 群 $E_{6(-26)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_{\mathbb{R}}(J) \mid (\alpha X, \alpha Y, \alpha Z) = (X, Y, Z) \}$ は $\mathbb{CP}_2$ の射影変換群になっている. さて $\mathbb{CP}_2$ において恒等写像 1 と上記の対合 σ ($\sigma: \mathbb{CP}_2 \rightarrow \mathbb{CP}_2$ とする) は 極変換 (polarity) を与えており, それらに対応する 2 次曲線がそれぞれ

$$(X, X) = 0 \quad (\text{虚の2次曲線})$$

$$(X, X)_\sigma = 0 \quad (\text{実の2次曲線})$$

である。群 $E_{6(-26)}$ において、これらの2つの2次曲線 $(X, X) = 0$, $(X, X)_\sigma = 0$ を不変にする部分群が F_4 , $F_{4(-20)}$ である。すなわち、 F_4 , $F_{4(-20)}$ はそれぞれ楕円型、双曲線型非ユークリッド幾何学に対応している群である。以上の観点から、 $\mathbb{C}$ の代わりに実数体 $\mathbb{R}$ で考察すると

$$E_{6(-26)} \rightarrow \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), \quad F_4 \rightarrow \mathrm{SO}(3), \quad F_{4(-20)} \rightarrow \mathrm{SO}(2, 1)$$

のように対応していると考えられる。)

3.4. $\gamma \in G_2 \subset F_4$ を E_6 の元と考える。群 $(E_6)^\gamma$ を決定するために次の準備をする。四元数体 H の標準基 $1, i, j, k$ の代わりにここでは $1, e_1, e_2, e_3$ を用いることとし、 $\mathbb{R}$ -線型写像 $k: H \rightarrow M(2, \mathbb{C})$ と

$$k((x_0 + x_1 e_1) + e_2(x_2 + x_3 e_1)) = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & -x_2 + ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

で与える。この k は自然に $\mathbb{R}$ -線型写像

$$k: M(3, H) \rightarrow M(6, \mathbb{C}), \quad k: H^3 \rightarrow M(2, 6, \mathbb{C})$$

に拡張される。さらにこれらの k はそれぞれ $\mathbb{C}$ -線型写像

$$k: M(3, H)^{\mathbb{C}} \rightarrow M(6, \mathbb{C}), \quad k: (H^3)^{\mathbb{C}} \rightarrow M(2, 6, \mathbb{C})$$

$$\begin{cases} k(X_1 + iX_2) = k(X_1) + ik(X_2), & X_1, X_2 \in M(3, H), \\ k(a_1 + ia_2) = k(a_1) + ik(a_2), & a_1, a_2 \in H^3 \end{cases}$$

によって拡張する。最後に $\mathbb{C}$ -ベクトル空間

$$\mathcal{S}(6, \mathbb{C}) = \{ S \in M(6, \mathbb{C}) \mid {}^t S = -S \}$$

と C -線型同型写像 $k_J : J(3, H)^C \rightarrow \mathcal{S}(6, C)$ を

$$k_J(X_1 + iX_2) = k(X_1)J + ik(X_2)J, \quad X_1, X_2 \in J(3, H)$$

で定義する. ここに $J = \begin{pmatrix} J' & 0 & 0 \\ 0 & J' & 0 \\ 0 & 0 & J' \end{pmatrix}$, $J' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とある. これは群

準同型写像 $\psi : \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{SU}(6) \rightarrow (E_6)^Y$,

$$\psi(p, A)(X + a) k_J^{-1}(Ak_J(X)^t A) + pk^{-1}(k(a)A^*),$$

$$X + a \in J_H^C \oplus (H^3)^C = J^C$$

は群同型

$$(E_6)^Y \cong (\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{SU}(6))/Z_2, \quad Z_2 = \{(1, E), (-1, -E)\}$$

を誘導する.

J^C に内積 $\langle X, Y \rangle_Y + \gamma$ を用いて

$$\langle X, Y \rangle_Y = \langle X, \gamma Y \rangle$$

で与えるとき

$$E_{6(2)} = \{ \alpha \in \mathrm{Iso}_C(J^C) \mid \det \alpha X = \det X, \langle \alpha X, \alpha Y \rangle_Y = \langle X, Y \rangle_Y \}$$

は E_6 -型連結非コンパクト単純リ-群であり, その極分解は

$$E_{6(2)} \cong (\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{SU}(6))/Z_2 \times R^{40}$$

で与えられる.

3.5. 群 E_6 の $E_1 \in J^C$ における等分群は $\mathrm{Spin}(10)$ に同型である:

$$(E_6)_{E_1} \cong \mathrm{Spin}(10).$$

ここに $\mathrm{Spin}(10)$ は $\mathrm{SO}(V^{10})$, $V^{10} = \{ X \in J^C \mid 2E_1 \circ X = -\tau X \} =$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x \\ 0 & \bar{x} & -\tau\xi \end{pmatrix} \mid \xi \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C} \right\}$ の普遍被覆群である。次に

$U(1) = \{ \theta \in \mathbb{C} \mid |\theta| = 1 \}$ とし, 単射群準同型写像 $\phi: U(1) \rightarrow E_6$ を

$$\phi(\theta) \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^4 \xi_1 & \theta x_3 & \theta \bar{x}_2 \\ \theta \bar{x}_3 & \theta^{-2} \xi_2 & \theta^{-2} x_1 \\ \theta x_2 & \theta^{-2} \bar{x}_1 & \theta^{-2} \xi_3 \end{pmatrix}$$

で定義する。また群準同型写像 $\psi: U(1) \times \text{Spin}(10) \rightarrow (E_6)^\sigma$,

$$\psi(\theta, \beta) = \phi(\theta)\beta$$

は群同型

$$(E_6)^\sigma \cong (U(1) \times \text{Spin}(10))/Z_4,$$

$$Z_4 = \{ (1, \psi(1)), (-1, \psi(-1)), (i, \psi(-i)), (-i, \psi(i)) \}$$

を誘導する。

J^C に内積 $\langle X, Y \rangle_\sigma$ を σ を用いて

$$\langle X, Y \rangle_\sigma = \langle X, \sigma Y \rangle$$

で与えるとき,

$$E_{6(-14)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_C(J^C) \mid \det \alpha X = \det X, \langle \alpha X, \alpha Y \rangle_\sigma = \langle X, Y \rangle_\sigma \}$$

は E_6 -型連結非コンパクト単純リー群であり, その極分解は

$$E_{6(-14)} \simeq (U(1) \times \text{Spin}(10))/Z_4 \times \mathbb{R}^{32}$$

で与えられる。

3.6. J^C に对合的共役 C -線型写像 ρ を

$$\rho = \tau\gamma = \gamma\tau$$

で定義する. 群 $(E_6)^0 = \{ \alpha \in E_6 \mid \rho\alpha = \alpha\rho \}$ を決定する. C -線型同型写像 $g: J^C \rightarrow J(4, H)^C$ (ここに $J(4, H)_0 = \{ X \in M(4, H) \mid X^* = X, \operatorname{tr}(X) = 0 \}$) を

$$g\left(\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 + b_3 e & \bar{x}_2 - b_2 e \\ \bar{x}_3 - b_3 e & \xi_2 & x_1 + b_1 e \\ x_2 + b_2 e & \bar{x}_1 - b_1 e & \xi_3 \end{pmatrix}\right) + i \left(\begin{pmatrix} \eta_1 & y_3 + a_3 e & \bar{y}_2 - a_2 e \\ \bar{y}_3 - a_3 e & \eta_2 & y_1 + a_1 e \\ y_2 + a_2 e & \bar{y}_1 - a_1 e & \eta_3 \end{pmatrix}\right) \\ = \begin{pmatrix} \lambda_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \bar{a}_1 & \lambda_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{a}_2 & \bar{x}_3 & \lambda_2 & x_1 \\ \bar{a}_3 & x_2 & \bar{x}_1 & \lambda_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \mu_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ -\bar{b}_1 & \mu_1 & y_3 & \bar{y}_2 \\ -\bar{b}_2 & \bar{y}_3 & \mu_2 & y_1 \\ -\bar{b}_3 & y_2 & \bar{y}_1 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

($\xi_i, \eta_i \in \mathbb{R}, x_i, y_i, a_i, b_i \in H$) により

$$\begin{cases} \lambda_0 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3), & \mu_0 = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3), \\ \lambda_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2 - \xi_3), & \mu_1 = \frac{1}{2}(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3), \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(-\xi_1 + \xi_2 - \xi_3), & \mu_2 = \frac{1}{2}(-\eta_1 + \eta_2 - \eta_3), \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}(-\xi_1 - \xi_2 + \xi_3), & \mu_3 = \frac{1}{2}(-\eta_1 - \eta_2 + \eta_3) \end{cases}$$

で定義する. これは群同型写像 $\psi: \operatorname{Sp}(4) \rightarrow (E_6)^0$,

$$\psi(A)X = g^{-1}(A(gX)A^*), \quad X \in J^C$$

は群同型

$$(E_6)^0 \cong \operatorname{Sp}(4)/Z_2, \quad Z_2 = \{ E, -E \}$$

と与える.

$J' = \{ X \in M(3, \mathbb{C}') \mid X^* = X \}$ とおき, J' に J と同様行列式

$\det X$ を定義するとき

$$E_{6(6)} = \{ \alpha \in \text{Iso}_R(J') \mid \det \alpha X = \det X \}$$

は E_6 -型 単連結非コンパクト単純リー群であり, その極分解は

$$E_{6(6)} \simeq \text{Sp}(4)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}^{42}$$

で与えられる.

3.7. $E_6^{\mathbb{C}} = \{ \alpha \in \text{Iso}_{\mathbb{C}}(J^{\mathbb{C}}) \mid \det \alpha X = \det X \}$

は E_6 -型 単連結複素単純リー群であり, その極分解は

$$E_6^{\mathbb{C}} \simeq E_6 \times \mathbb{R}^{78}$$

で与えられる.

以上.