

準周期係数をもつ 2 次元線形微分方程式の極限集合について

大阪府立大学大学院工学研究科 原 惟行 (Tadayuki Hara)
Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University
電気通信大学 (非) 申 正善 (Jong Son Shin)
The University of Electro-Communications

1. Introduction

準周期関数を係数にもつ 2 次元線形常微分方程式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t & k \cos \omega t \\ \cos \omega t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1)$$

を考える. 初期条件は

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_0 > 0) \quad (2)$$

とする. $k = 1, 0, -1$ に対して (1), (2) をみたす解の極限集合について考察する.
(I) $k = 1$ の場合

Lemma 1.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & kb(t) \\ lb(t) & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (k, l > 0) \quad (3)$$

の基本解行列は

$$X(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{k}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} + e^{-\sqrt{kl}\beta(t)}) & \sqrt{k}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} - e^{-\sqrt{kl}\beta(t)}) \\ \sqrt{l}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} - e^{-\sqrt{kl}\beta(t)}) & \sqrt{l}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} + e^{-\sqrt{kl}\beta(t)}) \end{pmatrix}$$

$$\text{where } \alpha(t) = \int_0^t a(s)ds, \beta(t) = \int_0^t b(s)ds$$

(proof)

$$\phi(t) = \sqrt{k}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} + e^{-\sqrt{kl}\beta(t)})$$

$$\psi(t) = \sqrt{l}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} - e^{-\sqrt{kl}\beta(t)})$$

とおくと

$$\phi'(t) = a(t)\phi(t) + kb(t)\psi(t)$$

$$\psi'(t) = a(t)\psi(t) + lb(t)\phi(t)$$

となるから $\begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$ は (3) の解となる.

又

$$\xi(t) = \sqrt{k}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} - e^{-\sqrt{kl}\beta(t)})$$

$$\eta(t) = \sqrt{l}e^{\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} + e^{-\sqrt{kl}\beta(t)})$$

とすると

$$\xi'(t) = a(t)\xi(t) + kb(t)\eta(t)$$

$$\eta'(t) = a(t)\eta(t) + lb(t)\xi(t)$$

となるから $\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$ は (3) の解となる. 故に $X(t)$ は (3) の解行列である. また,

$$\begin{aligned} \det X(t) &= \frac{1}{4}[\sqrt{kl}e^{2\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} + e^{-\sqrt{kl}\beta(t)})^2 - \sqrt{kl}e^{2\alpha(t)}(e^{\sqrt{kl}\beta(t)} - e^{-\sqrt{kl}\beta(t)})^2] \\ &= \sqrt{kl}e^{2\alpha(t)} \neq 0 \end{aligned}$$

であるから $X(t)$ は (3) の基本解行列となる. □

さて $a(t) = \sin t$, $b(t) = \cos \omega t$, $k = l = 1$ とすると

$$\alpha(t) = \int_0^t \sin s ds = 1 - \cos t, \quad \beta(t) = \int_0^t \cos \omega s ds = \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

となる. よって (1), (2) を満たす解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t)X^{-1}(0) \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = X(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから次の Lemma 2 が得られる.

Lemma 2.

$$x(t) = \frac{x_0}{2}e^{1-\cos t}(e^{\frac{1}{\omega}\sin \omega t} + e^{-\frac{1}{\omega}\sin \omega t})$$

$$y(t) = \frac{x_0}{2}e^{1-\cos t}(e^{\frac{1}{\omega}\sin \omega t} - e^{-\frac{1}{\omega}\sin \omega t})$$

Remark 1. Lemma 2 により

$$x_0 > 0 \text{ ならば } x(t) > 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成立する.

2. Main results and Proof

Theorem 1.

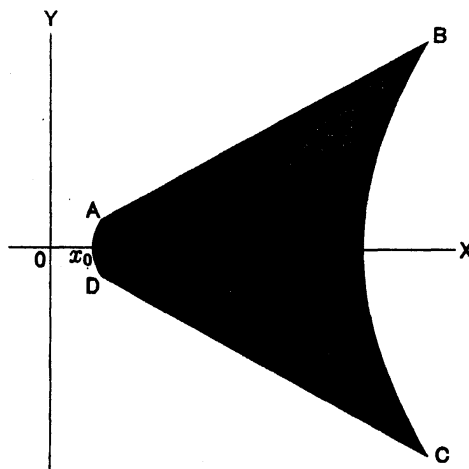
$\omega > 0$: 無理数のとき (1), (2) を満たす
解軌道は右図のような領域を dense
に埋め尽くす. ここで

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ はそれぞれ

$$y = \pm mx \quad (\text{ただし } m = \frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1}),$$

$\widehat{AD}$, $\widehat{BC}$ はそれぞれ

$$x^2 - y^2 = x_0^2, \quad x^2 - y^2 = e^4 x_0^2.$$



Proof of Theorem 1. 以下の Proposition 1 から Proposition 7 により証明する.

Proposition 1.

$$-\frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1} \leq \frac{y(t)}{x(t)} \leq \frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1} \quad \text{for } t \in \mathbb{R}$$

(proof) Lemma 2 を用いると $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{e^{\frac{1}{\omega} \sin \omega t} - e^{-\frac{1}{\omega} \sin \omega t}}{e^{\frac{1}{\omega} \sin \omega t} + e^{-\frac{1}{\omega} \sin \omega t}} = \frac{(e^{\frac{1}{\omega} \sin \omega t})^2 - 1}{(e^{\frac{1}{\omega} \sin \omega t})^2 + 1}$ となる.
 $\gamma = e^{\frac{1}{\omega} \sin \omega t}$ とおくと $e^{-\frac{1}{\omega}} \leq \gamma \leq e^{\frac{1}{\omega}}$ であり

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1}.$$

ところで

$$\frac{d}{d\gamma} \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1} \right) = \frac{2\gamma(\gamma^2 + 1) - 2\gamma(\gamma^2 - 1)}{(\gamma^2 + 1)^2} = \frac{4\gamma}{(\gamma^2 + 1)^2} > 0 \quad \text{for } \gamma > 0$$

であるから $\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1}$ は単調増加. よって

$$\begin{aligned} \max \text{ of } \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1} &= \frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1}, \\ \min \text{ of } \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1} &= -\frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1}. \end{aligned}$$

となる. 故に

$$-\frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1} \leq \frac{y(t)}{x(t)} \leq \frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1} \quad \text{for } t \in \mathbb{R}$$

□

Remark 2. $m = \frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1}$ とすると $0 < m < 1$. また

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1} \quad \text{となる } t \text{ は } t = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi \right), \quad (l \text{ は整数})$$

$$\frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1} \quad \text{となる } t \text{ は } t = \frac{1}{\omega} \left(\frac{3\pi}{2} + 2l\pi \right). \quad (l \text{ は整数})$$

Proposition 2.

$$x_0^2 \leq x^2(t) - y^2(t) \leq e^4 x_0^2 \quad \text{for } t \in \mathbb{R}$$

(proof) Lemma 2 より $x^2(t) - y^2(t) = \left(\frac{x_0}{2}\right)^2 e^{2(1-\cos t)} 4 = x_0^2 e^{2(1-\cos t)}$ であるから

$$x_0^2 \leq x^2(t) - y^2(t) \leq e^4 x_0^2$$

□

Remark 3. $x^2(t) - y^2(t) = x_0^2$ となる t は $t = 2n\pi$, (n は整数)

$x^2(t) - y^2(t) = e^4 x_0^2$ となる t は $t = (2n+1)\pi$. (n は整数)

Proposition 1, Proposition 2 により $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ は ABCD によって囲まれる閉領域

の中にあることがわかる. この閉領域を S と表すことにする.

次に (1)(2) を満たす解軌道が S を dense に埋め尽くすことを示すため, Diophantus 近似に関する次の Dirichlet の定理を用いる.

Lemma 3. θ を正の無理数, c を実数とすると

$$\exists n_k, m_k \in \mathbb{N}; n_k, m_k \rightarrow \infty \text{ as } k \rightarrow \infty$$

and

$$c + n_k \theta - m_k \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty$$

さて $\forall (p, q) \in S$ とすると Proposition 1 により

$$-1 < -\frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1} \leq \frac{q}{p} \leq \frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1} < 1$$

が成立している. ところで $\frac{1+s}{1-s}$ は $s < 1$ で単調増加だから $s = \frac{q}{p}$ を代入すると

$$e^{-\frac{2}{\omega}} = \frac{1 - \frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1}}{1 + \frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1}} \leq \frac{1 + \frac{q}{p}}{1 - \frac{q}{p}} \leq \frac{1 + \frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1}}{1 - \frac{e^{\frac{2}{\omega}} - 1}{e^{\frac{2}{\omega}} + 1}} = e^{\frac{2}{\omega}}.$$

故に $r = \sqrt{\frac{p+q}{p-q}} = \sqrt{\frac{1+\frac{q}{p}}{1-\frac{q}{p}}}$ とおくと

$$e^{-\frac{1}{\omega}} \leq r \leq e^{\frac{1}{\omega}}$$

すなわち

$$-1 \leq \omega \log r \leq +1$$

となるので $\sin^{-1}(\omega \log r)$ が定義できる. 又, Proposition 2 により

$$x_0^2 \leq p^2 - q^2 \leq e^4 x_0^2$$

であるから

$$\begin{aligned} x_0 &\leq \sqrt{p^2 - q^2} \leq e^2 x_0, \\ 1 &\geq 1 - \log \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{x_0} \geq -1 \end{aligned}$$

となり $\cos^{-1} \left(1 - \log \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{x_0} \right)$ が定義できる.

さて Lemma 3 において $\theta = \frac{1}{\omega}$, $c = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\omega} \sin^{-1}(\omega \log r) - \cos^{-1} \left(1 - \log \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{x_0} \right) \right\}$ とすると

$$\begin{aligned} \exists n_k, m_k \in \mathbb{N}; n_k, m_k \rightarrow \infty \text{ as } k \rightarrow \infty \\ \text{and} \\ c + n_k \theta - m_k \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

すなわち

$$\left\{ \frac{1}{\omega} \sin^{-1}(\omega \log r) - \cos^{-1} \left(1 - \log \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{x_0} \right) \right\} + \left(\frac{2n_k}{\omega} - 2m_k \right) \pi \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty \quad (4)$$

が成立する. さて

$$t_{n_k} = \frac{1}{\omega} \sin^{-1}(\omega \log r) + \frac{2n_k \pi}{\omega} \quad (5)$$

$$\tilde{t}_{m_k} = \cos^{-1} \left(1 - \log \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{x_0} \right) + 2m_k \pi \quad (6)$$

とおくと (4), (5), (6) により次の Proposition 3 が成立する.

Proposition 3.

$$t_{n_k} \rightarrow \infty \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

and

$$|t_{n_k} - \tilde{t}_{m_k}| \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

以下, 数列 (5), (6) の性質を述べる.

Proposition 4.

$$\frac{y(t_{n_k})}{x(t_{n_k})} = \frac{q}{p}$$

(proof)

$$\sin \omega t_{n_k} = \sin(\sin^{-1}(\omega \log r) + 2n_k\pi) = \sin(\sin^{-1}(\omega \log r)) = \omega \log r$$

であるから $e^{\frac{1}{\omega} \sin \omega t_{n_k}} = r$ となり

$$\frac{y(t_{n_k})}{x(t_{n_k})} = \frac{e^{\frac{1}{\omega} \sin \omega t_{n_k}} - e^{-\frac{1}{\omega} \sin \omega t_{n_k}}}{e^{\frac{1}{\omega} \sin \omega t_{n_k}} + e^{-\frac{1}{\omega} \sin \omega t_{n_k}}} = \frac{r - \frac{1}{r}}{r + \frac{1}{r}} = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} = \frac{q}{p}$$

□

Proposition 5.

$$x^2(\tilde{t}_{m_k}) - y^2(\tilde{t}_{m_k}) = p^2 - q^2$$

(proof)

$$\begin{aligned} \cos \tilde{t}_{m_k} &= \cos(\cos^{-1}(1 - \log \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{x_0}) + 2m_k\pi) \\ &= 1 - \log \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{x_0} \end{aligned}$$

であるから, Lemma 2 を用いると

$$x^2(\tilde{t}_{m_k}) - y^2(\tilde{t}_{m_k}) = x_0^2 e^{2(1 - \cos \tilde{t}_{m_k})} = x_0^2 e^{\log \frac{p^2 - q^2}{x_0^2}} = p^2 - q^2$$

□

Proposition 6.

$$x^2(t_{n_k}) - y^2(t_{n_k}) \rightarrow p^2 - q^2 \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

(proof)

$$x^2(t_{n_k}) - y^2(t_{n_k}) = x^2(\tilde{t}_{m_k}) - y^2(\tilde{t}_{m_k}) + [x^2(t_{n_k}) - x^2(\tilde{t}_{m_k})] - [y^2(t_{n_k}) - y^2(\tilde{t}_{m_k})]$$

と変形して Proposition 5 を用いると

$$x^2(t_{n_k}) - y^2(t_{n_k}) = p^2 - q^2 + [x^2(t_{n_k}) - x^2(\tilde{t}_{m_k})] - [y^2(t_{n_k}) - y^2(\tilde{t}_{m_k})].$$

Proposition 3 を用いると $k \rightarrow \infty$ のとき上式の第 2 項, 第 3 項 $\rightarrow 0$ であるから

$$x^2(t_{n_k}) - y^2(t_{n_k}) \rightarrow p^2 - q^2 \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

□

Proposition 7.

$$x(t_{n_k}) \rightarrow p, \quad y(t_{n_k}) \rightarrow q \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

(proof) Proposition 4 により $y(t_{n_k}) = \frac{q}{p}x(t_{n_k})$ だから Proposition 6 を用いると

$$x^2(t_{n_k}) - \frac{q^2}{p^2}x^2(t_{n_k}) \rightarrow p^2 - q^2 \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

すなわち

$$\frac{1}{p^2}(p^2 - q^2)x^2(t_{n_k}) \rightarrow p^2 - q^2 \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

ところで $-1 < \frac{q}{p} < 1$ だから $p^2 - q^2 \neq 0$. よって

$$\frac{1}{p^2}x^2(t_{n_k}) \rightarrow 1 \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

Remark 1 により $x_0 > 0$ なら $x(t) > 0$ に注意すると

$$x(t_{n_k}) \rightarrow p \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

よって Proposition 4 により

$$y(t_{n_k}) \rightarrow q \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

従って $(x(t), y(t))$ は S を dense に埋め尽くす. これで Theorem 1 の証明が完了した. $\square$

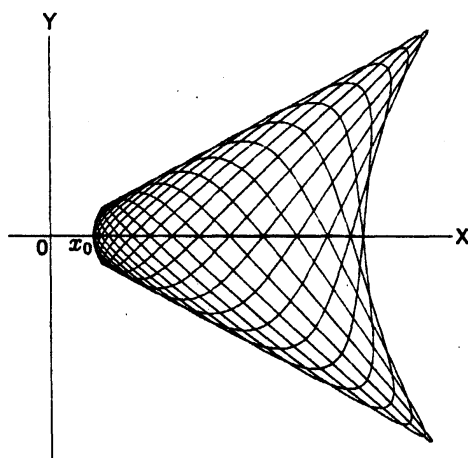
Theorem 2. $\omega > 0$: 有理数のとき (1), (2) を満たす解軌道は S を動く周期軌道.

(proof) Lemma 2, Proposition 1, Proposition 2 より解軌道が S 内にあることは明らか. 周期軌道であることを示そう.

$\omega = \frac{h}{l}$ (h, l は互いに素な整数) とすると $\cos t$ は周期 2π , $\sin \omega t$ は周期 $\frac{2\pi l}{h}$ である.

$2\pi a = \frac{2\pi l}{h}b$ とすると $ah = bl$ となる. l, h は互いに素だから上式が成立するためには $a = l, b = h$. 故に $\cos t$ と $\sin \omega t$ の共通周期は $2\pi l$ である.

Lemma 2. より $x(t), y(t)$ は $\cos t, \sin \omega t$ の合成関数だから $\omega = \frac{h}{l}$ のとき解軌道は $2\pi l$ 周期となる.



(II) $k = 0$ の場合

Theorem 3.

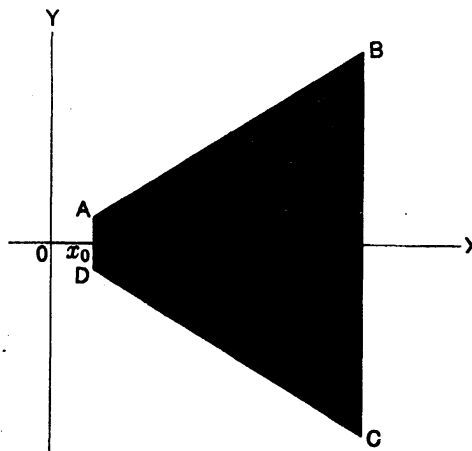
$\omega > 0$: 無理数のとき (1), (2) を満たす
解軌道は右図のような領域 S を dense
に埋め尽くす. ここで

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ はそれぞれ

$$y = \pm \frac{1}{\omega} x,$$

$\overline{AD}$, $\overline{BC}$ はそれぞれ

$$x = x_0, \quad x = x_0 e^2.$$



Theorem 4. $\omega > 0$: 有理数のとき (1)(2) を満たす解軌道は S を動く周期軌道.

(1)(2) を満たす解は

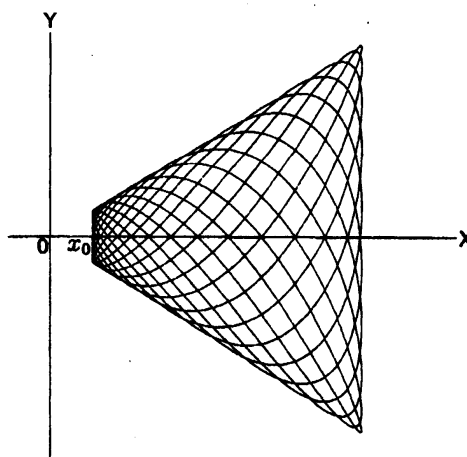
$$x(t) = x_0 e^{1 - \cos t}$$

$$y(t) = \frac{x_0}{\omega} e^{1 - \cos t} \sin \omega t$$

となり Theorems 3, 4 の証明は

Theorems 1, 2 の証明と同じよ

うにできる.



(III) $k = -1$ の場合 ($0 < \frac{1}{\omega} < \pi$ としておく)

Theorem 5.

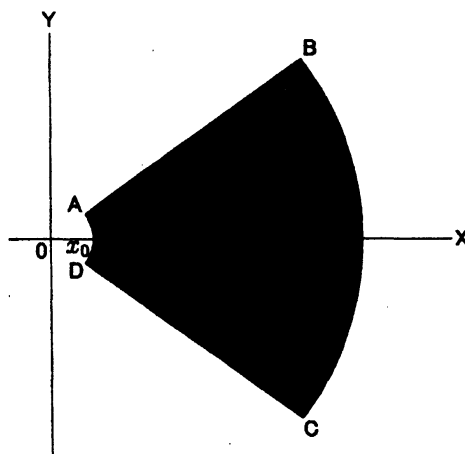
$\omega > 0$: 無理数のとき (1), (2) を満たす
解軌道は右図のような領域 S を dense
に埋め尽くす. ここで

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ はそれぞれ

$$y = \pm m x \quad (\text{ただし } m = \tan \frac{1}{\omega}),$$

$\widehat{AD}$, $\widehat{BC}$ はそれぞれ

$$x^2 + y^2 = x_0^2, \quad x^2 + y^2 = e^4 x_0^2.$$



Theorem 6. $\omega > 0$:有理数のとき (1),(2) を満たす解軌道は S を動く周期軌道.

(1)(2) を満たす解は

$$x(t) = x_0 e^{1-\cos t} \cos\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right)$$

$$y(t) = x_0 e^{1-\cos t} \sin\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right)$$

となり Theorems 5, 6 の証明は
Theorems 1, 2 の証明と同じよ
うにできる.

