

Small Cover と凸多面体の彩色

大阪市立大学 西村 保三 (Yasuzo Nishimura)
Osaka City University

本稿では、Davis-Januszkiewicz [1] によって定義された Small Cover の幾何的性質と、組み合わせ論の対象である凸多面体の彩色との関連、特に凸多面体上の Small Cover の存在性と向き付け可能性について考察する。

群 $Z_2 = \{-1, 1\}$ は $\mathbf{R}$ 上に標準的に作用し、その軌道空間は半直線 $\mathbf{R}_+$ 、射影 $\pi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ はノルムで与えられる。この n 直積、すなわち実線形空間 $\mathbf{R}^n$ 上の標準的 $(Z_2)^n$ 作用と射影 $\pi: \mathbf{R}^n \rightarrow (\mathbf{R}_+)^n$ を“線形モデル”と呼ぶ。

定義 1. P は n 次元単純凸多面体とする。 n 次元多様体 M が P 上 Small Cover であるとは、線形モデルと局所的に同型な $(Z_2)^n$ 作用があり（すなわち各点 $x \in M$ について、不変近傍 $V \subset M$, $W \subset \mathbf{R}^n$ と同変同相写像 $f: V \rightarrow W$ が存在する）、軌道空間が P と同相のときをいう。また P 上の二つの Small Cover M_1 と M_2 は、同変同相写像 $f: M_1 \rightarrow M_2$ が存在する時に同型という。

例 1. $S^1 \subset \mathbf{C}$ を複素平面内の単位円、 S^1 上 Z_2 作用を $(-1) \cdot z = \bar{z}$ とおくと、射影 $\pi: S^1 \rightarrow I = [-1, 1]$ は、 $\pi(z) = \operatorname{Re} z$ で与えられる。その n 直積 $\pi: T^n = (S^1)^n \rightarrow I^n$ により、 n 次元トーラス T^n は、 n 次元キューブ I^n 上 Small Cover である。

例 2. $(Z_2)^n = (Z_2)^{n+1} / \{(g, \dots, g) \mid g \in Z_2\}$ の同一視により、 $n+1$ 次元線形モデルの商空間として、実射影空間 $\mathbf{RP}^n = (\mathbf{R}^{n+1}) / Z_2$ 上に $(Z_2)^n$ 作用が定義される。これは n 次元単体 Δ^n 上の Small Cover である。

注意. 複素線形空間 $\mathbf{C}^n$ 上標準的 $T^n = (S^1)^n$ 作用を複素線形モデルとよび、局所的に複素線形モデルと同型なトーラス作用がある P 上の $2n$ 次元多様体は“擬トーリック多様体”と呼ばれる。擬トーリック多様体と Small Cover は、多くの部分で平行な議論が可能である。

P, Q を単純凸多面体、 $\pi: M \rightarrow P$ を P 上の Small Cover、 $f: Q \rightarrow P$ を Q の k 次元の面を P の k 次元の面に移すような連続写像とする。“引き戻し” f^*M は、自然に Q 上の Small Cover の構造を持つ。

単純凸多面体 P の余次元 1 の面 (facet という) の集合を F で表す。 P の双対グラフ K_P は F を頂点集合とする単体的グラフである。 P 上の Small Cover M は、 P の面彩色 (双対グラフ K_P の点彩色) $\lambda: F \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ を以下のように定義し、 M の表現写像という。

一般に面 $F \subset P$ に対し、 $x \in \pi^{-1}(\text{int } F)$ の固定部分群は x の取り方に依らず、これを G_F で表す。特に F を facet とする時、 G_F はランク 1 の部分群であり、その生成元を対応させる写像を、 $\lambda: F \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ とする。この時、 l 個の facet の交わり $F = F_1 \cap \cdots \cap F_l$ で表される余次元 l の面 F に関する固定部分群 G_F は、 $\lambda(F_1), \dots, \lambda(F_l)$ で生成される部分群であるから、表現写像 $\lambda: F \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ は以下の条件 (*) を満たす P の面彩色 (または双対グラフ K_P の点彩色) である。

(*) $F = F_1 \cap \cdots \cap F_l$ が余次元 l の面の時、 $\lambda(F_1), \dots, \lambda(F_l)$ は一次独立

条件 (*) を満たすような P の面彩色 (または K_P の点彩色) を “一次独立な彩色” と呼ぶことにする。逆に、単純凸多面体 P と一次独立な彩色 $\lambda: F \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ の組が与えられた時、表現写像が λ と一致する P 上の Small Cover $M(P, \lambda)$ を以下のように構成することができる。

$$M(P, \lambda) := P \times (\mathbb{Z}_2)^n / \sim \quad (p, g) \sim (p', g') \Leftrightarrow p = p' \text{ かつ } g^{-1}g' \in G_F \text{ (int } F \ni p)$$

定理 1. (Davis–Januszkiewicz) n 次元単純凸多面体 P 上の Small Cover は、 P 上の一次独立な彩色 $\lambda: F \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ によって分類される。

例 1. ($n=2$ の時) 2 次元単純凸多面体 P (および K_P) は、 m 角形である。その上の表現写像 $\lambda: F \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^2$ は、互いに一次独立な 3 つのベクトル $(1,0), (0,1), (1,1)$ への対応で、 λ は通常の意味の 3 色による彩色と同じである。 m が奇数の時は、 m 角形の彩色は 3 色必要で、対応する Small Cover は $M(\lambda) = (m-2) \mathbb{R}P^2$ である ($k\mathbb{R}P^2$ は、 k 個の $\mathbb{R}P^2$ の連結和)。 m が偶数なら、 m 角形は 2 彩色可能であり、その場合は対応する Small Cover は向き付け可能曲面 $M(\lambda) = (m-2)/2 \cdot T^2$ 、3 彩色されている場合は $M(\lambda) = (m-2) \mathbb{R}P^2$ である。

例 2. (線形モデルの引き戻し) n 次元単純凸多面体 P が n 彩色されている時、表現写像 $\lambda: F \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ の像は、ある基底と考えることが出来る。この時、対応する Small Cover は “線形モデルの引き戻し” である。すなわち面を保つ連続写像 $f: P \rightarrow (\mathbb{R}_+)^n$ が存在して M は $f^*(\mathbb{R}^n)$ と同型である。特に $n=3$ の時、3 次元単純凸多面体 P が 3 彩色可能、すなわち P 上に線形モデルの引き戻しが存在する必要十分条件は、組み合わせ論の古典的結果より、 P の全ての面が偶数角形であることである。

与えられた単純凸多面体 P に対して、その上の Small Cover の存在性について、その向き付け可能性も考慮して論じる。まず 4 次元以上の場合には、 P 上に必ずしも Small Cover が存在しないことを注意しておく。

事実. $n \geq 4$ の時、その上には Small Cover が存在しないような n 次元単純凸多面体 P が存在する。

例. $k \geq n+1$ を任意の数とする。曲線 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3, \dots, t^n) \subset \mathbf{R}^n$ 上の k 点を頂点とする凸多面体を考えると、 $n \geq 4$ の時は常に完全グラフになることが知られている。従ってこれの双対多面体 P の彩色には k 色必要であり、 $k > 2^n$ とすると、彩色 $\lambda: F \rightarrow (\mathbf{Z}_2)^n$ は存在しない。

Small Cover の向き付け可能性は、次の定理で判定できる。

定理 2. Small Cover $M(P, \lambda)$ が向き付け可能である必要十分条件は、適当な基底 $e_1, \dots, e_n \in (\mathbf{Z}_2)^n$ を固定し、 $\varepsilon(e_i) = 1$ で決まる準同型写像を $\varepsilon: (\mathbf{Z}_2)^n \rightarrow \mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$ とおいた時、 $\varepsilon\lambda \equiv 1$ となることである。

定理 2 の条件を満たす彩色を“向き付け可能な彩色”と呼ぶことにする。例えば、 $n=3$ の時、向き付け可能な彩色は、(適当な基底変換で) $e_1, e_2, e_3, e_1+e_2+e_3$ の 4 色による彩色である。この 4 色の任意の 3 色は一次独立なので、彩色は一次独立性を考慮しない通常の意味での 4 彩色と同じであり、「任意の平面グラフは 4 彩色可能」という有名な四色定理 ([2]参照) により、次の系が得られる。

系. 任意の 3 次元単純凸多面体 P 上に、向き付け可能な Small Cover が存在する。

さらに発展して、大阪市立大学大学院生の中山央士氏は、この系で 4 彩色された 3 次元単純凸多面体 P から (四面体以外の時)、彩色の一次独立性を保持したまま、いくつかの面をうまく塗り替えて、向き付け不可能な彩色が構成できることを示した。

定理 3. 四面体以外の任意の 3 次元単純凸多面体 P 上に、向き付け不可能な Small Cover が存在する。

参考文献

- [1] M. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifold, and Torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417-451.
- [2] K. Appel and W. Haken, *Every planar map is four colorable*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 711-712.