

# Derivation の拡張と基底状態の安定性

東工大理学部 生西明夫 (Akio Ikunishi)

## §1. 序論

$\alpha$  を局所コンパクト可換群  $G$  の  $C^*$ -代数  $A$  における作用としよう。  $\delta$  は  $A$  における  $*$ -derivation で  $\hat{G}$  の各コンパクト集合  $K$  に対応するスペクトル空間  $A^\alpha(K)$  上で有界であるとする。このような  $\delta$  でも再双対  $A^{**}$  において closable であるかどうかは明らかではない。しかしながら、次のように十分大きな定義域を持つ  $A^{**}$  における  $*$ -derivation に拡張することはできる。  $A^\alpha(K)^{**}$  と  $A^{**}$  における  $\sigma$ -弱閉包  $\overline{A^\alpha(K)}$  を同一視して、  $\delta^B = \bigcup_{K: \text{コンパクト}} (\delta|_{A^\alpha(K)})^{**}$  とおくと  $\delta^B$  は  $*$ -derivation である。加えて、  $\pi$  が  $A$  の表現で  $\overline{\alpha} \circ \pi = \pi \circ \alpha$  なる  $\pi(A)'' (= M)$  における作用  $\overline{\alpha}$  があるならば、  $\tilde{\delta} \circ \pi = \pi \circ \delta^B$  なる  $M$  における  $*$ -derivation  $\tilde{\delta}$  が存在して、その定義域は  $\bigcup_{K: \text{コンパクト}} M \overline{A^\alpha(K)}$  であり  $\tilde{\delta}|_{M \overline{A^\alpha(K)}}$  は  $\sigma$ -弱連続である。ここで、  $\pi$  は  $\pi$  の  $A^{**}$  への自然な拡張である。

これは、  $\pi$  が既約であるときには岸本 [4] によって証明され

たことである。また、上のことは可換でないコンパクト群に対しても成り立つ。

特に、 $\alpha$  が一径数群で、 $\delta$  が  $\alpha$  の生成作用素  $\delta_0$  に関して相対有界であるなら、すなわち、ある  $a$  と  $b$  に対して  $\|\delta(x)\| \leq a\|x\| + b\|\delta_0(x)\|$  ( $x \in D(\delta_0)$ ) であるなら、 $\tilde{\delta}$  も  $\alpha$  の生成作用素  $\tilde{\delta}_0$  に対して、 $\|\tilde{\delta}(x)\| \leq a\|x\| + b\|\tilde{\delta}_0(x)\|$  ( $x \in D(\tilde{\delta}_0)$ ) である。これは  $C^*$ -力学系の基底状態の安定性の問題に応用される。

$(A, R, \alpha)$  を基底状態を持つ  $C^*$ -力学系とし、 $\delta$  を  $\alpha$  の生成作用素  $\delta_0$  と同じ定義域を持つ  $*$ -derivation とする。このとき、 $\delta$  は  $\delta_0$  に関して相対有界であり、 $b < 1$  なら  $\delta_0 + \delta$  は  $C^*$ -力学系を生成することはよく知られている ([6, 1])。Bahty は  $A$  が I 型で  $b < 1$  なら  $\delta_0 + \delta$  によって生成される  $C^*$ -力学系も基底状態を持つことを示した。黒瀬<sup>[8]</sup>は先の片本の結果を供って一般の  $C^*$ -代数に対して一般化を試みたが、 $\tilde{\delta}$  の relative bound の評価が不十分であるため、十分小さな  $\lambda$  に対して  $\delta_0 + \lambda\delta$  も基底状態を持つという結果にとどまっている。先に述べた我々の結果を適用すれば、任意の  $C^*$ -代数  $A$  と  $b < 1$  なる  $\delta_0$  に対して  $\delta_0 + \delta$  によって生成される  $C^*$ -力学系も基底状態を持つことを示される。

## §2. Derivation の拡張

$\alpha$  を局所コンパクト可換群  $G$  の  $C^*$ -代数  $A$  における作用,  $\pi$  を  $\bar{\alpha} \cdot \pi = \pi \cdot \alpha$  なる  $\pi(A)'' (= M)$  における作用  $\bar{\alpha}$  があるような  $A$  の表現とする。このとき,  $\hat{G}$  のコンパクト集合  $K$  に対して  $\alpha|_{A^\alpha(K)}$  はノルムについて連続であるので  $\alpha^{**}|_{\overline{A^\alpha(K)}}$  もそうである。したがって,  $B \in \bigcup_{K: \text{コンパクト}} \overline{A^\alpha(K)}$  の  $A^{**}$  でのノルムについての閉包とすると,  $\alpha^{**}|_B$  は  $G$  の  $C^*$ -代数  $B$  における連続な作用となる。さらに,  $\overline{A^\alpha(K)} \subset B^{\alpha^{**}|_B}(K) = \bigcap \{ \overline{A^\alpha(K+V)} \mid V: 0 \text{ のコンパクト近傍} \}$  である。元  $\pi$  を  $\pi$  の  $A^{**}$  への自然な拡張とすると, あるコンパクト集合  $K$  に対して  $e_\pi \in B^{\alpha^{**}|_B}(K)$  であるような  $\ker \pi \cap B$  の approximate identity ( $e_\pi$ ) があるので,  $\ker \pi \cap B$  は単位元  $e$  を持つ。もちろん,  $e$  は  $A^{**}$  の中心と  $B^{\alpha^{**}|_B}$  に属する。このことから,  $B^{\alpha^{**}|_B}(K)(1-e)$  と  $M^{\bar{\alpha}}(K)$  は等距離的等型である。

さて,  $\delta \in \bigcup_{K: \text{コンパクト}} A^\alpha(K)$  において定義された  $A$  における  $*$ -derivation で, 各コンパクト集合  $K$  に対して  $\delta|_{A^\alpha(K)}$  は有界であるとしよう。このとき,  $\delta^B = \bigcup_{K: \text{コンパクト}} (\delta|_{A^\alpha(K)})^{**}$  とおくと,  $\delta$  は  $\bigcup_{K: \text{コンパクト}} B^{\alpha^{**}|_B}(K)$  において定義される  $*$ -derivation である。  $e$  が  $A^{**}$  の中心と  $\delta^B$  の定義域に属することに注意すれば,  $\delta \cdot \pi = \pi \cdot \delta^B$  なる  $M$  における  $*$ -derivation  $\tilde{\delta}$  が存在する。

コンパクト群に対しては,  $A$  から  $A^\alpha(\gamma)$  ( $\gamma \in \hat{G}$ ) への射影があるので, 同様な議論ができる。このようにして, 次の定理

を得る。

定理1.  $\alpha$  を局所コンパクト可換群  $G$  の  $C^*$ -代数  $A$  における作用,  $\pi$  を  $\bar{\alpha} \cdot \pi = \pi \cdot \alpha$  なる  $\pi(A)'' (=M)$  における作用  $\bar{\alpha}$  があるような  $A$  の表現とする.  $\delta$  を各コンパクト集合  $K$  に対して  $A^\alpha(K)$  上で有界であるような  $A$  における  $*$ -derivation としよう.

このとき,  $\bigcup_{K: \text{コンパクト}} M^\alpha(K)$  で定義される  $M$  における  $*$ -derivation  $\tilde{\delta}$  で,  $\tilde{\delta} \cdot \pi \subset \pi \cdot \delta$  かつ, 任意のコンパクト集合  $K$  に対して  $\tilde{\delta}|_{M^\alpha(K)}$  が  $\sigma$ -弱連続であるようなものがある. さらに,

$$\|\tilde{\delta}|_{M^\alpha(K)}\| \leq \inf \{ \|\delta|_{A^\alpha(K+V)}\| \mid V: 0 \text{ のコンパクト近傍} \}$$

である。

同様なことが, コンパクト群に対しても成り立つ. ただし, コンパクト集合  $K$  は  $\hat{G}$  の点  $\gamma$  で置き換えられる。

命題2.  $\alpha$  を  $C^*$ -代数  $A$  の  $*$ -自己同型の一径数群,  $\pi$  を  $\bar{\alpha} \cdot \pi = \pi \cdot \alpha$  なる  $\pi(A)'' (=M)$  における一径数群  $\bar{\alpha}$  があるような  $A$  の表現とする.  $\delta_0 \in \alpha$  の生成作用素,  $\delta$  を  $\delta_0$  と同じ定義域を持つ  $A$  における  $*$ -derivation とする。

もし, ある  $a$  と  $b$  に対して

$$\|\delta(x)\| \leq a\|x\| + b\|\delta_0(x)\|, \quad x \in D(\delta_0)$$

であるなら,  $\bar{\alpha}$  の生成作用素  $\bar{\delta}_0$  と同じ定義域を持つ  $M$  におけ

る  $*$ -derivation  $\tilde{\delta}$  があって,  $\bar{\delta}_0 \ni (x, \bar{\delta}_0(x)) \mapsto \tilde{\delta}(x)$  は  $\sigma$ -弱連続かつ,

$$\|\tilde{\delta}(x)\| \leq a \|x\| + b \|\bar{\delta}_0(x)\|, \quad x \in D(\bar{\delta}_0)$$

である。

証明. ノルム  $a\|\cdot\| + b\|\bar{\delta}_0(\cdot)\|$  を持ったバナッハ空間としての  $D(\bar{\delta}_0)$  から  $A$  への写像として,  $\delta$  はノルムが 1 以下である。したがって,  $\delta^{**}$  もそうであり, かつ  $\delta^B$  の拡張である。それゆえ, 定理 1 によって得られる  $\tilde{\delta}$  は命題の結論を  $\bigcup_{K: \text{コンパクト}} M^{\bar{\alpha}}(K)$  上で満たす。このとき,  $\tilde{\delta} \circ (1 + \bar{\delta}_0)$  は  $\bigcup_{K: \text{コンパクト}} M^{\bar{\alpha}}(K)$  上で  $\sigma$ -弱連続かつ有界なので,  $M$  上へ拡張でき, したがって,  $\tilde{\delta}$  も  $D(\bar{\delta}_0)$  上へ拡張できて, これが求める性質を満たす。

定理 1 と岸本 [4] の一連の補題によって,  $\delta$  が生成作用素になったかどうかというこのことについての系を二つ得る。

系 3.  $G$  は局所コンパクト可換群で,  $\alpha, A, \delta$  は定理 1 におけると同じとする。さらに,  $A$  の表現の忠実な族  $(\pi_i)$  があって,  $\bar{\alpha}_i \circ \pi_i = \pi_i \circ \alpha$  なる  $\pi_i(A)$  上の作用  $\bar{\alpha}_i$  があり, 各  $\bar{\alpha}_i$  は  $\bar{\alpha}_i$ -fixed unitary によって与えられているとする。

このとき,  $\delta$  は closable で, その閉包  $\bar{\delta}$  は生成作用素であ

る。

系 4.  $G$  を局所コンパクト群で, 連結かつ  $H^2(G; \mathbb{T}) = (0)$  とする.  $A$  は増加族  $(A_t)$  に伴う UHF 代数,  $\alpha$  は  $A_t$  を不変にする  $G$  の  $A$  における作用とする.  $\delta$  と  $\pi$  は定理 1 におけると同じとしよう. (特に,  $\pi$  として  $A$  の唯一の tracial state に伴う表現を取れ.)

このとき, 定理 1 において得られる  $\tilde{\delta}$  に対して,  $\|h\| \leq \| \delta(A^{\alpha}) \|$  なる  $h \in \pi(A)''_s$  があって,  $\tilde{\delta} - \delta_{\pi h}$  は  $\alpha$  と可換である. さらに  $\delta$  は closable で, 閉包  $\bar{\delta}$  は生成作用素である.

### §3. 基底状態の安定性

次の定理を示すために 残された問題は,  $\delta$  の  $\delta_0$ -relative bound と  $\tilde{\delta}$  の  $\bar{\delta}_0$ -relative bound が一致することだけである. これは命題 2 によって得られている.

定理 5.  $(A, \mathbb{R}, \alpha)$  を基底状態を持つ  $C^*$ -力学系とする.  $\delta$  を  $\alpha$  の生成作用素  $\delta_0$  と同じ定義域を持つ  $*$ -derivation とする.

もし,  $\delta$  の  $\delta_0$ -bound が 1 より小さければ  $\delta_0 + \delta$  は  $C^*$ -力学系を生成し, それは基底状態を持つ.

系 6.  $(A, R, \alpha)$  と  $\delta$  は定理 5 にあけると同じとしよう。

もし,  $\delta$  の  $\delta_0$ -bound が 1 以下で,  $\delta_0 + \delta$  の閉包が  $C^*$ -力学系を生成するならば, それは基底状態を持つ。

注. 上の系において,  $A$  が単純, 特に, UHF 代数ならば, 岸本 [4] あるいは定理 1 によって  $\delta_0 + \delta$  は closable でその閉包は  $C^*$ -力学系を生成する。

~~UHF 代数においては, 基底状態の安定性は relative bound の~~

注.  $\delta$  の  $\delta_0$ -bound と  $\tilde{\delta}$  の  $\bar{\delta}_0$ -bound が一致することは Kaplansky の density theorem の証明および derivation についての differential calculus からも得られる。正確には,  $\|\delta(x)\| \leq a\|x\| + b\|\delta_0(x)\|$  ( $x \in D(\delta_0)$ ) なる任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $a'$  があって,  $\|\tilde{\delta}(x)\| \leq a'\|x\| + (b + \varepsilon)\|\bar{\delta}_0(x)\|$  ( $x \in D(\bar{\delta}_0)$ ) である。(c.f. [3])

また, 次の不等式は簡単に得られる:

$$\|\tilde{\delta}(x)\| \leq (a + 2bn)\|x\| + (an^{-1} + 2b)\|\bar{\delta}_0(x)\|.$$

したがって,  $b < \frac{1}{2}$  ならば  $\delta_0 + \delta$  は基底状態を持つ。perturbation theory においてよく知られた iteration によって, このことから定理 5 を得ることもできる。

UHF 代数においては, 基底状態の安定性は relative bound

の条件なしで成立するよゝに思われたが  $\delta$  が  $\alpha$  と可換であるときでさえわかっていない。

### References

- [1] C. J. K. Batty, Small perturbations of  $C^*$ -dynamical systems,  
Commun. Math. Phys. 68 (1978), 39-43.
- [2] ———, Perturbations of ground states of type I  $C^*$ -algebras,  
Proc. Amer. Math. Soc. 78 (1980), 539-544.
- [3] A. Ikunishi, Ground states and small perturbations for  
 $C^*$ -dynamical systems.
- [4] A. Kishimoto, Derivations with a domain condition, preprint.
- [5] H. Kurose, Perturbations and ground states of  $C^*$ -dynamical  
systems, preprint.
- [6] R. Longo, Automatic relative boundedness of derivations  
in  $C^*$ -algebras, J. Funct. Anal. 34 (1979), 21-28.