

ふたつの素数の和について

三河 寛 / 筑波大学

Mikawa H.

序

x 以下の偶数のうち ふたつの素数の和へ分割できないものの個数を $E(x)$ とする。

$$E(x) \ll 1 \quad (1)$$

と信じられている⁽¹⁾けれども 一般リーマン予想の下でさえ

$$E(x) \ll \sqrt{x} \quad (2)$$

程度のことは言えない。すると (1) をもたらす まつとうな仮説をみつけること および (2) を仮定無しに証明することが一時的な目標となる。しかし やはりむずかしい。ここでは残念ながら大きく譲って 小さな $\theta > 0$ に対し

$$E(x+x^\theta) - E(x) = o(x^\theta) \quad (3)$$

を示すことを問題とする。もし $\theta < \frac{1}{2}$ なる θ について (3) が証明できるなら (2) の見地から 少しの意味はあることと 言ってもよいだろう。

$\theta = 1$ のとき (3) は実質上 三素数定理のことであり、そして $\frac{7}{12} < \theta \leq 1$ の範囲で (3) を正当化するの簡単である。この $\frac{7}{12}$

(1) 書誌学としてよいのは

潘承洞-潘承虎: 哥德巴赫猜想, 科学出版社 1981.

Wang Yuan(ed.): Goldbach conjecture, World Scientific 1984.

は χ 函数の零点密度評価^(ロ) に由来する。すると $\frac{1}{2} < \theta \leq 1$ が
 (3) の技術的限界のように思われる。しかし これは近頃
 達成えられるようになった。^(ハ)

この問題に関して考えたことをここに書残しておきたい。

(ロ) H.-E. Richert : Sieve methods, Tata 1976.

Chap. 6 および Chap 13 Note.

(ハ) G. Dufner : Binäres Goldbachproblem in kurzen Intervallen I, II,
 Studia Sci. Math. Hungarica (to appear).

H. Mikawa : On prime twins, Tsukuba J. Math. 15 (1991) 19-29.

H. Mikawa : On the exceptional set in Goldbach's problem,
 Tsukuba J. Math. 16 (1992) 513-543.

A. Perelli and J. Pintz :

On the exceptional set in the $2k$ -twin primes problem,
 Compositio Math. 82 (1992) 355-372.

A. Perelli and J. Pintz :

On the exceptional set for Goldbach's problem in short intervals,
 J. London Math. Soc. (2) 47 (1993) 41-49.

D. Wolke : Über das Primzahl-Zwillingsproblem,
 Math. Ann. 283 (1989) 529-537.

定理

自然数 $n > 1$ の素因数分解を $\prod_p p^m$ としてパラメーター $z \geq 2$ に対し

$$n = \prod_{p < z} p^m \cdot \prod_{p \geq z} p^m = n^{(1)} n^{(2)}$$

とかく。空積は 1 とする。そして

$$\Phi_z(n) = \begin{cases} 1, & n^{(1)} = 1 \\ 0, & n^{(1)} > 1 \end{cases}, \quad \Psi_z(n) = \begin{cases} 1, & n^{(2)} = 1 \\ 0, & n^{(2)} > 1 \end{cases}$$

$\Phi_z(1) = \Psi_z(1) = 1$ と定めれば Φ, Ψ は共に完全乗法的となる。エラトステネスの篩とは

$$\Phi_z(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \Psi_z(d)$$

および

$$\left| \sum_{\substack{d|n \\ d > D}} \mu(d) \Psi_z(d) \right| \leq \sum_{\substack{d|n \\ D \leq d < Dz}} \mu^2(d) \Psi_z(d) \quad (D > 1) \quad (4)$$

のこである。(4) は ブシュタフ の公式^(*)

$$\Phi_z(n) = 1 - \sum_{\substack{p|n \\ p < z}} \Phi_p(n)$$

から従う。また次の不等式が成立つ^(*)；もし $x \rightarrow \infty$ のとき

$$z = z(x) \rightarrow \infty \quad \text{かつ} \quad s = \frac{\log x}{\log z} \rightarrow \infty \quad \text{ならば}$$

$$\sum_{n \leq x} \Psi_z(n) \ll x \exp\left(-\frac{1}{2} s \log s\right) \quad (5)$$

$\sqrt{x} < n \leq x$ が素数かどうかは $\Phi_{\sqrt{x}}(n)$ をみればよい。
ブシュタフの公式から

$$\Phi_{\sqrt{x}}(n) = \Phi_{\frac{\sqrt{x}}{v}}(n) - \sum_{\substack{p|n \\ \frac{\sqrt{x}}{v} \leq p < \sqrt{x}}} \Phi_p(n)$$

右辺の第2項は $v = \exp(2\sqrt{\log x})$ と撰べば気にする
必要はないだろう。さらに

$$\Phi_{\frac{\sqrt{x}}{v}}(n) = \Phi_{\sqrt[3]{x}}(n) - \sum_{\substack{p|n \\ \sqrt[3]{x} \leq p < \frac{\sqrt{x}}{v}}} \Phi_p(n)$$

第2項においては $\Phi_p(n) = \Phi_{\sqrt[3]{x}}(n)$ だから

$$\Phi_{\frac{\sqrt{x}}{v}}(n) = \left(1 - \sum_{\substack{p|n \\ \sqrt[3]{x} \leq p < \frac{\sqrt{x}}{v}}} 1\right) \Phi_{\sqrt[3]{x}}(n) \quad (6)$$

$w = \exp(\sqrt[3]{\log x})$ として再びブシュタフの公式、そして
エラトステネスの篩を使えば

$$\Phi_{\sqrt[3]{x}}(n) = \left(\sum_{\substack{d|n \\ d < \sqrt{v}}} + \sum_{\substack{d|n \\ \sqrt{v} \leq d}} \right) \mu(d) \psi_w(d) - \sum_{\substack{p|n \\ w \leq p < \sqrt[3]{x}}} \Phi_p(n)$$

(=) H. Halberstam: Lectures on the linear sieve, in
Topics in analytic number theory, Texas Austin
1985, 165 - 220.

この論文の中の Basic lemma から (4) がわかる。

(木) K. Prachar: Primzahlverteilung, Springer 1957. Kap. V. § 5.

Ju. V. Linnik: Dispersion method in binary additive problems,
Leningrad 1961. (翻訳, A. M. S.) Chap. 1.

これを (6) に代入する。すると (6) において第1項は

$$[I] \quad \sum_{\substack{n=kl \\ k \leq \sqrt{\frac{x}{u}}}} a_k$$

と書き直せる。係数 (a_k) は約数函数で押えられる。そして第2項は (5) から無視できると思える。第3項は $p, \frac{n}{p}$ の係数が独立となるように細工して

$$[II] \quad \sum_{n=kl} \sum_{w \leq l < 3\sqrt{x}} a_k b_l$$

のように書けるであらう。 (b_l) は素数の定義函数と思ってよい。このように $\Phi_{\sqrt{x}}(n)$ の主要部分は [I] および [II] の型に分解した。^(^)

次に $2|n$, $x \leq \frac{x}{2} < n \leq x$ とし

$$R_x(n) = \sum_{\substack{p_1+p=n \\ p_1 \leq x}} 1$$

を考える。 p_1 を $\Phi_{\sqrt{x}}(m)$ で置きかえ、そして分解する。

[I] の型のものは

$$\sum_{\substack{kl+p=n \\ kl \leq x \\ k \leq \sqrt{\frac{x}{u}}}} a_k = \sum_{\substack{k \leq \sqrt{\frac{x}{u}} \\ (k,n)=1}} a_k \sum_{\substack{n-x < p < n \\ p \equiv n \pmod{k}}} 1 + \text{誤差}$$

となり、 $x \gg \frac{x}{2}$ のときには平均素数定理で計算できる。

しかし [II] の型から生ずるものには全く手が出ない。そこで
 諦めて n に関して平均することを考える。 $y = X^\theta$ ($0 < \theta < 1$)
 $2|n, n \in]X-y, X]$ に対して

$$R_x(n) > \text{主項} + \text{誤差擬} \quad (7)$$

を示すことを目指す。この主項は常に $\gg \frac{x}{\log^2 x}$ となる
 ある量で、誤差擬とは 2 乗平均が小さいこと すなわち

$$\sum_{\substack{X-y < n \leq X \\ 2|n}} | \cdot |^2 = o\left(y \left(\frac{x}{\log^2 x}\right)^2\right) \quad (8)$$

の意味である。

これが成立する範囲の θ に対して (3) が言える。というのは、
 もし n がふたつの素数の和として表せないならば
 $R_x(n) = 0$ すなわち

$$E(X) - E(X-y) \leq \sum_{\substack{X-y < n \leq X \\ 2|n \\ R_x(n)=0}} 1$$

すると誤差擬は主項を相殺するから その絶対値は主項
 程度 $\gg \frac{x}{\log^2 x}$ の大きさになる。つまり

$$\sum_{\substack{n \\ R_x(n)=0}} \left(\frac{x}{\log^2 x}\right)^2 \ll \sum_{\substack{n \\ R_x(n)=0}} |\text{誤差擬}|^2$$

したがって

$$E(X) - E(X-y) = o(y)$$

となる。

式

区間 $]X-y, X]$, $y \leq x$, の中の n が $n = p_1 + p$, $p_1 \leq x$, と書けるなら いずれも $X-2x < p < X$ だから

$$\begin{aligned} R_x(n) &= \int_0^1 \left(\sum_{p_1 \leq x} e^{2\pi i \alpha p_1} \right) \left(\sum_{X-2x < p \leq X} e^{2\pi i \alpha p} \right) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha \\ &= \int_0^1 S(\alpha) V(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha \end{aligned}$$

$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$, と有理数で近似したとき
エラトステネスの篩を用いて

$$S(\alpha) \ll \frac{x}{\sqrt{q}} + x \exp(-\sqrt{\log x}) + \sqrt{qx}$$

とできる。(1) $\equiv$ の評価は $\log^B x < q < x \log^{-B} x$ (4) のときには
意味がある。 $q < \log^B x$ のときには $S(\alpha)$ の期待される
主部を $T(\alpha)$ として

$$S(\alpha) = T(\alpha) + \text{誤差}$$

となる。 $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \log^B x \ll 1$ ならば $\equiv$ の誤差項は自明
ではない。 $\Sigma = \Sigma'$

$$Q_1 = \log^B x, \quad Q = x Q_1^{-3}$$

(1) 前出 Prachar の書, Kap. VII, Satz 6.1.

(2) 同上

(4) ある〈不特定の定数〉を表すのに 文字 B を用いる。

記号 $\ll$ は $\ll \log^B x$ のことである。

と書く

$$M = \bigcup_{q \leq Q} \bigcup_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} I_{q, a}$$

$$I_{q, a} = I_{q, a}(Q) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{qQ}, \frac{a}{q} + \frac{1}{qQ} \right]$$

と書いて

$$U(\alpha) = \begin{cases} S(\alpha) - T(\alpha), & \alpha \in M \\ S(\alpha), & \alpha \notin M \end{cases}$$

と置けば α について一様に

$$U(\alpha) \ll x \log^{-B} x \quad (9)$$

と知れる。

ベッセルの不等式により

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x-y < n \leq x \\ 2|n}} \left| \int_0^1 U(\alpha) V(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha \right|^2 \\ \leq \int_0^1 |U(\alpha) V(\alpha)|^2 d\alpha \\ \leq \max_{\alpha} |U(\alpha)|^2 \cdot V(0) \\ \ll x^3 \log^{-B} x \end{aligned} \quad (10)$$

誤差項 (8) となるには、この評価が $O(y x^2 \log^{-4} x)$ となわち $x \ll y$ でなくてはならない。

一方、主項となるはずの

$$\int_M T(\alpha) V(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha$$

は簡単な計算により

$$= \sum_{q \leq Q_1} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{\substack{d|q \\ (d,n)=1}} d \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{\substack{n-x < p < n-1 \\ p \equiv n \pmod{d}}} \log^{-1}(n-p) + \text{誤差}$$

となる。この内側の和は $x-y < n \leq x$, $x \ll y \leq x$

だから n に関して平均をとる効果はない。そして

$d \leq Q_1 = \log^B x$ だから 算術級数定理の短区間版^(リ)が適用できる。このようにして 主項を書き出すためには

$$x \geq x^{\frac{7}{12} + \delta} \quad (\delta > 0)$$

であることが要請される。

結局

$$\begin{aligned} R_x(n) &= \int_{\mathbb{M}} T(\alpha) V(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha + \int_0^1 U(\alpha) V(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha \\ &= \text{主項} + \text{誤差項} \end{aligned}$$

とするために

$$y \gg x \geq x^{\frac{7}{12} + \delta}$$

なる制限が付いた。そして $y \gg x$ の限定を除かない

ことには、つまりベッセルの不等式(10)を使う限りにおいて、これ以上のことは望めない。

(リ) Prachar の書 Kap. IX. および Richert の冊子 Chap. 6.

参

$$\int_0^1 U(\alpha)V(\alpha)e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha$$

を $2|n$, $n \in]X-y, X]$ に関して2乗平均するのであった。

このとき $n\alpha \pmod{1}$ が相殺をひきおこすことになる。

α を分母 q の有理数で近似するなら $n \pmod{q}$ である。

すなわち n の重く長さ y より q が大きいなら もはや相殺は期待できない。したがって前章でのパラメーター Q を

$$Q = yQ_1^{-3}$$

に取替えておく。

単位区間を長さ $\frac{1}{\Delta}$, $\Delta \asymp y \log^{-\theta} x$, の小区間どもに分割し順番に並べて I_j ($1 \leq j \leq J$) とする。 J は偶数にできる。

まず奇数の j だけ集めたものについて計算する。

$$\sum_{\substack{X-y < n \leq X \\ 2|n}} \left| \sum_{j:\text{odd}} \int_{I_j} UV(\alpha) e^{-2\pi i n \alpha} d\alpha \right|^2$$

$$\ll \sum_{j,k:\text{odd}} \int_{I_j} \int_{I_k} |UV(\tau_1)| |UV(\tau_2)| \min\left(y, \frac{1}{\|\tau_1 - \tau_2\|}\right) d\tau_1 d\tau_2$$

$j=k$ なら $\min(\cdot)$ の項を y ととる。 $j \neq k$ なら I_j と I_k との間には偶数番の小区間があるから

$$\|\tau_1 - \tau_2\|^{-1} \ll \Delta$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\ll \gamma \sum_{j:\text{odd}} \left(\int_{I_j} |UV(\gamma)| d\gamma \right)^2 + \Delta \left(\sum_{j:\text{odd}} \int_{I_j} |UV(\gamma)| d\gamma \right)^2 \\
&\leq \gamma \sum_j \int_{I_j} |U(\gamma)|^2 d\gamma \int_{I_j} |V(\alpha)|^2 d\alpha + \Delta \left(\int_0^1 |UV(\gamma)| d\gamma \right)^2 \\
&\leq \gamma \max_j \int_{I_j} |U(\gamma)|^2 d\gamma \cdot \int_0^1 |V(\alpha)|^2 d\alpha + \Delta \int_0^1 |U(\gamma)|^2 d\gamma \int_0^1 |V(\alpha)|^2 d\alpha \\
&\ll \gamma \times \left(\max_j \int_{I_j} |U(\gamma)|^2 d\gamma + \gamma \log^{-B} \gamma \right)
\end{aligned}$$

偶数の j についても同じである。したがって (9) に代えて小区間 I_j での積分を $\ll \gamma \log^{-B} \gamma$ と押えればよいことになった。 I_j は M の $I_{g,\alpha}$ を2つ含むことはないから件の積分は

$$\begin{aligned}
&= \max_j \left(\int_{I_j \cap M} + \int_{(I_j \cup M) \setminus M} \right) |U(\gamma)|^2 d\gamma \\
&\leq \max_{\substack{(a,g)=1 \\ g \leq Q_1}} \int_{-1/8Q}^{+1/8Q} \left| (S-T) \left(\frac{a}{g} + \beta \right) \right|^2 d\beta \\
&\quad + \max_{\alpha \notin M} \int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta} |S(\alpha + \beta)|^2 d\beta
\end{aligned} \tag{11}$$

ここで 一時的に一般型の形にして (a_n) を複素数、 $2 \leq \Delta \leq \frac{x}{2}$ として 次の積分を考える。

$$\Delta^2 \int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta} \left| \sum_{x < n \leq 2x} a_n e^{2\pi i \beta n} \right|^2 d\beta \quad (12)$$

これはプランチレルの関係式により 次の三通りに書換えられる。

$$\sum_{|t| \leq \Delta} (\Delta - |t|) \sum_{x < n \leq 2x} \bar{a}_n a_{n+t} \quad (13)$$

$$\int_x^{2x} \left| \sum_{t < n \leq t+\Delta} a_n \right|^2 dt \quad (14)$$

$$\Delta^2 x^{2\sigma-1} \int_{\sigma-i\frac{x}{\Delta}}^{\sigma+i\frac{x}{\Delta}} \left| \sum_n a_n n^{-s} \right|^2 |ds| \quad (15)$$

そして (a_n) の性質に応じて 種々な手法を適用できる。

とはいうものの 上手に使えば道具は何んでもよく 結果は同じとも言える。

懸案の (11) に戻る。まず後者からみる。

$$\Delta^2 \int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta} \left| \sum_{p \leq x} e^{2\pi i (\alpha + \beta)p} \right|^2 d\beta \quad (\alpha \notin M)$$

このときには $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $Q_1 < q \leq Q$ なる有理数が存在する。第一章でのように 素数 p を [I] と [II] とに展開する。[I] は (13) から

$$\Delta^2 \int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta} \left| \sum_{\substack{k \leq x \\ k \leq \sqrt{\frac{x}{Q}}}} a_k e^{2\pi i (\alpha + \beta)k} \right|^2 d\beta$$

$$\ll \sum_{|r| \leq \Delta} (\Delta - |r|) e^{2\pi i \alpha r} \sum_{\substack{k_1 l_1 - k_2 l_2 = r \\ k_1 l_1, k_2 l_2 \leq x \\ k_1, k_2 \leq \sqrt{\frac{x}{v}}}} a_{k_1} a_{k_2}$$

$r > 0$ のとき 内側の和は

$$\sum_{\substack{k_1, k_2 \leq \sqrt{\frac{x}{v}} \\ (k_1, k_2) | r}} a_{k_1} a_{k_2} \left(\frac{x + O(r)}{[k_1, k_2]} + O(1) \right)$$

そして $r = 0$ として和をとると

$$\ll \Delta x + x \sum_{\substack{k_1, k_2 \leq \sqrt{\frac{x}{v}} \\ (k_1, k_2) \leq \Delta}} \frac{|a_{k_1} a_{k_2}|}{[k_1, k_2]} \left| \sum_{\substack{0 < r < \Delta \\ (k_1, k_2) | r}} (\Delta - r) e^{2\pi i \alpha r} \right| + \Delta^3 + \Delta^2 \frac{x}{v}$$

$$\ll \Delta x + x \Delta \left(\frac{\Delta}{8} + o \right) + \Delta^3 + \Delta^2 \frac{x}{v}$$

となって第 2 項は無い。[II] については (2) より (13) より

$$\Delta^2 \int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta} \left| \sum_{\substack{k l \leq x \\ w \leq l < 3\sqrt{x}}} a_k b_l e^{2\pi i (\alpha + \beta) k l} \right|^2 d\beta$$

$$\ll \max_{w < L < 3\sqrt{x}} \Delta^2 \int_{-1/\Delta}^{+1/\Delta} \left(\sum_{\substack{l_1 \leq L \\ l_1 \asymp L}} |b_{l_1}|^2 \right) \left(\sum_{\substack{l \asymp L \\ k l \leq x}} \left| \sum a_k e^{2\pi i (\alpha + \beta) k l} \right|^2 \right) d\beta$$

$$\ll \max_{w < L < 3\sqrt{x}} L \cdot \sum_{\substack{|l r| \leq \Delta \\ l \asymp L}} (\Delta - |l r|) e^{2\pi i r l} \sum_{\substack{k_1 - k_2 = r \\ k_1 l, k_2 l \leq x}} a_{k_1} a_{k_2}$$

(2) 記号 $\gg$ は $\gg$ か $\ll$ の意味である。

$r \neq 0$ のとき r を停めて l の和を実行し 振動因子 $e^{2\pi i r l}$ を巻き込めば

$$\begin{aligned} & \lll \max_{w < L < 3\sqrt{x}} L \left(\Delta x + \Delta \frac{x}{L} \left(\frac{\Delta}{g} + \frac{\Delta}{L} + g \right) \right) \\ & < 3\sqrt{x} \Delta x + \Delta x \left(\frac{\Delta}{g} + \frac{\Delta}{w} + g \right) \end{aligned}$$

したがって、

$$3\sqrt{x} \lll \Delta \lll y \quad (16)$$

ならば (11) の第2の積分に関しては望む評価面が得られる。そして (16) の下で (11) の第1の積分を扱うのは易しい。これを次章でみることにする。

四

$S(\alpha)$ の代りに $S^+(\alpha) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e^{2\pi i \alpha n}$ を考える。すると

$$S^+\left(\frac{a}{g} + \beta\right) = \frac{M(g)}{\varphi(g)} \sum_{x \pmod{g}} \chi(a) \tau(\bar{x}) \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n) e^{2\pi i \beta n} + \text{誤差}$$

χ が主指標のとき $\chi(n) \Lambda(n)$ を $\chi(n) \Lambda(n) - 1$ で置換えることを $\#$ で表し、 $T(\alpha)$ に対応するものを $T^+(\alpha)$ とか1+1ば

$$\begin{aligned} & \int_{-1/8Q}^{+1/8Q} \left| (S^+ - T^+)\left(\frac{a}{g} + \beta\right) \right|^2 d\beta \quad (17) \\ & \ll \int_{-1/8Q}^{+1/8Q} \left| \frac{1}{\varphi(g)} \sum_{x \pmod{g}} \chi(a) \tau(\bar{x}) \sum_{n \leq x}^{\#} \chi(n) \Lambda(n) e^{2\pi i \beta n} \right|^2 d\beta + \text{誤差} \end{aligned}$$

右辺の積分は三角不等式により

$$\leq \left(\frac{1}{\varphi(g)} \sum_{x \pmod{g}} |\tau(\bar{x})| \left(\int_{-1/8Q}^{+1/8Q} \left| \sum_{n \leq x}^{\#} \chi(n) \wedge(n) e^{2\pi i \beta n} \right|^2 d\beta \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

そこで (14) と L 函数の零点による $\sum_n \wedge(n)$ の表示式⁽¹⁴⁾を使うと上の積分は

$$\ll \frac{1}{(8Q)^2} \int_1^x \left| \sum_{t < n \leq t+8Q}^{\#} \chi(n) \wedge(n) \right|^2 dt$$

$$\ll \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{2\sigma-1} N_x\left(\sigma, \frac{x}{8Q}\right) d\sigma + \text{誤差}$$

故に (17) は

$$\ll \max_{\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1} x^{2\sigma-1} \frac{1}{8} \left(\sum_{\chi \pmod{g}} \sqrt{N_x\left(\sigma, \frac{x}{8Q}\right)} \right)^2 + \text{誤差} \quad (18)$$

そして、 $Q \geq x^{\frac{1}{6}+\delta}$ ($\delta > 0$) ならば 自明でない評価を与えることができる。

また (14) の代りに (15) を使ってもよい。まず [I] と [II] とに分解しておく。[I] に限ってはとりたてて問題員となる事は無いであらう。[II] について (18) に対応するものは

$$\max_{w < L < \sqrt[3]{x}} \frac{1}{8} \left(\sum_{\substack{\chi \pmod{g} \\ \chi \neq \chi_0}} \left(\int_{\frac{1}{2}-i\frac{x}{8Q}}^{\frac{1}{2}+i\frac{x}{8Q}} \left| \sum_{k \sim \frac{x}{L}} \frac{\chi(k) a_k}{k^s} \right|^2 \left| \sum_{l \sim L} \frac{\chi(l) b_l}{l^s} \right|^2 |ds| \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

(14) 以下の計算と記号については前出 P 氏と R 氏の本を参照

(b_x) は素数の定義関数と思つてよかつたから $0 \leq \log L$ の範囲でなら 任意の定数 A について

$$\left| \sum_{x \leq L} \frac{\chi(x) b_x}{x^s} \right|^2 \ll L^{-A} \log L$$

とできるはずである。すると

$$\begin{aligned} & \ll \max_{w < L < 3\sqrt{x}} L^{-A} \log L \cdot L \sum_x \int \left| \sum_k \right|^2 |ds| \\ & \ll \max_{w < L < 3\sqrt{x}} L^{-A} \log L \cdot L \left(0 \left(\frac{x}{8Q} \right) + \frac{x}{L} \right) \\ & < L^{-A} \log x \cdot \left(x \frac{3\sqrt{x}}{Q} + x \right) \end{aligned}$$

これは $Q \geq 3\sqrt{x}$ なら目的に適う。そして $Q \ll y$ であったから (16) の下に (11) の第1の積分を挿入するには十分である。

このように $x \geq x^{\frac{7}{12} + \delta}$ (主項、第二章) かつ $y \geq x^{\frac{1}{3} + \delta}$ (誤差項、第三章、第四章) なる条件の下に (7)(8) が言えることをみた。つまり (3) は

$$\theta > \frac{7}{36}$$

ならば成立つ。

伍

支配的条件 (16) の根拠は 第一章で $\Phi_{\sqrt{x}}(n)$ の主要部を

$$\left(1 - \sum_{\substack{p|n \\ \sqrt{x} \leq p < \sqrt{x}}} 1\right) \Phi_{\sqrt{x}}(n)$$

と書いた際の $\Phi_{\sqrt{x}}(n)$ のパラメーターにある。そこでは最も単純

なエラトステネスの篩を用いて素数を切り出したのであるが

別の〈素数の分解〉がよい限界を与えるかもしれない。(7)

あるいは 別の手法による残余項の取扱いがよい結果を

もたらすのかもしれない。(7)

(7) Linnik の書 Chap. VII. (7.2.4).

D. R. Heath-Brown: Sieve identities and gaps between primes,
Astérisque 94 (1982) 61-65.

G. Kolesnik: Primes of the form $[n^c]$,
Pacific J. Math. 118 (1985) 437-447.

R. C. Vaughan: Sommes trigonométriques sur les nombres
premiers, C. R. Acad. Sci. Paris A 285 (1977) 981-983.

(7) あらうく

$$\sum_{t < \Delta} \sum_{n < x} \tau_3(n) \tau_3(n+t)$$

$$\int_x^{2x} \left| \sum_{t < n \leq t+\Delta} \tau_3(n) \right|^2 dt$$

$$\int_{\frac{1}{2}-i\pi}^{\frac{1}{2}+i\pi} \left| \sum_{n < N} n^{-s} \right|^6 |ds|$$

程度のものが計算できる手法でなくてはならないだろう。

また 第四章のアプローチは (11) の第2積分にも有効である。

この最終章では言式みに [I] の条件 $k \leq \sqrt{x}$ をそのままにしつつ [II] の $\omega \leq \omega < \sqrt{x}$ の $\sqrt{x}$ をより小さくできないかを考える。もしそうできるならばここに持合わせている手法のままで直ちに (3) に反映するであろう。これは要するに

$$\Phi_{\sqrt{x}}(n) = \left(\sum_{\substack{d|n \\ d < \sqrt{x}}} f(d) \right) \Phi_z(n)$$

と表せということであるが $z < \sqrt{x}$ とできそうもない。そこで「=」を「>」で置換える。(7) のためにはこれで十分である。(7) がシュタットの公式から

$$\begin{aligned} \Phi_{\sqrt{x}}(n) &= \Phi_z(n) - \sum_{\substack{p|n \\ z \leq p < \sqrt{x}}} \left(\Phi_z(n) - \sum_{\substack{g|n \\ z \leq g < p}} \Phi_g(n) \right) \\ &= \left(1 - \sum_{\substack{p|n \\ z \leq p < \sqrt{x}}} 1 \right) \Phi_z(n) + \sum_{\substack{p_2|n \\ z \leq p_2 < p \\ p_2 < \sqrt{x}}} \sum_{\substack{g|n \\ z \leq g < p_2}} \Phi_g(n) + \sum_{\substack{p_2|n \\ z \leq p_2 < \sqrt{x} \\ \sqrt{x} \leq p_2}} \sum_{\substack{g|n \\ z \leq g < p_2}} \Phi_g(n) \\ &= \left(1 - \sum_{\substack{p|n \\ z \leq p < \sqrt{x}}} 1 + \sum_{\substack{p_2|n \\ z \leq p_2 < p \\ p_2 < \sqrt{x}}} 1 \right) \Phi_z(n) - \sum_{\substack{p_2 r | n \\ z \leq r < p_2 < p \\ p_2 < \sqrt{x}}} \sum_{\substack{g|n \\ z \leq g < r}} \Phi_g(n) + \sum_{\substack{p_2|n \\ z \leq p_2 < \sqrt{x} \\ \sqrt{x} \leq p_2}} \sum_{\substack{g|n \\ z \leq g < p_2}} \Phi_g(n) \end{aligned}$$

この操作を続けていくと

(7) A. Balog : On sums over primes,

Banach Center Publ. 17 (1985) 9-19.

G. Harman : On the distribution of αp modulo one,

J. London Math. Soc. (2) 27 (1983) 9-18.

$$\Phi_{\sqrt{x}}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d < \sqrt{x}}} \mu(d) \Phi_z(n) + \sum_{\substack{d|n \\ \sqrt{x} \leq d < \sqrt{x} p(d)}} \mu(d) \Phi_z(d) \Psi_{\sqrt{x}}(d) \Phi_{p(d)}\left(\frac{n}{d}\right) \quad (19)$$

ただし d の最小素因数を $p(d)$ と書いている。前述の手法では角虫れないものが右辺の第2項に集約されたものの、これを直接調べるには骨が折れそうである。しかし第1項は容易である。次の関係式を知っている。(3)

$$\mu(n)=1 \text{ のとき } \sum_{\substack{d|n \\ d < \sqrt{n}}} \mu(d) = 0$$

またこの和は、 n が $p > \sqrt{n}$ なる素因数をもつとき $d < \sqrt{n}$ は制限として働かなくなるから、やはり 0 となる。つまり (19) の第1項は奇数個の $\sqrt{x}$ より小さな素数から成るものを取残していると思つてよい。(19) を $z = \sqrt{x}$ と撰んで使ってみると

(3) I. M. Vinogradov: 整数論入門, 共立出版 1959. 第2章問題25.

ちなみに 奇のパリティを消す重みは

$$\mu(n)=-1 \text{ のとき } \sum_{\substack{d|n \\ d < \sqrt{n}}} \mu(d) \left(1 - \frac{\log d}{\log \sqrt{n}}\right) = 0$$

A. I. Vinogradov による。未発表の原稿の中で氏が用いたものである。1991年本橋氏から電話でおしえていただいた。

$$\sum_{\substack{m+p=n \\ m \leq x}} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq \sqrt{\frac{x}{d}}}} \mu(d) \right) \Phi_{\sqrt{x}}(n) \quad (20)$$

$$= \sum_{\substack{p_1+p=n \\ p_1 \leq x}} (+1) + \sum_{\substack{p_1 p_2 p_3+p=n \\ \sqrt{x} \leq p_3 < p_2 < p_1 < \sqrt{x} \\ p_1 p_2 p_3 \leq x}} (-2) + \sum_{\substack{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5+p=n \\ \sqrt{x} \leq p_5 < p_4 < p_3 < p_2 < p_1 < \sqrt{x} \\ p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \leq x}} (+6) + \text{誤差}$$

左辺には都合の良いものしかない。その主項は 右辺の期待される主項と同じはずであるから 対応する定数を C_3, C_5 とし て 左辺は

$$= \frac{O(n) \times}{\log x \log x} (1 - 2C_3 + 6C_5) + \text{誤差擬}$$

とできる。右辺の第1項は $R_x(n)$ である。第2項は無視、つまり ≤ 0 とする。第3項は スイッチング・トリック⁽⁹⁾ によって上から押えることができる。したがって 右辺は

$$\leq R_x(n) + 0 + K \cdot 6C_5 \frac{O(n) \times}{\log x \log x} + \text{誤差}$$

ただし K は $\frac{\log x}{\log x}$ に依る定数である。故に

(9) Pan Ch.-d.: A new mean value theorem and its applications, in Recent progress in analytic number theory, vol. 1. Academic 1981, 275-287.

$$R_x(n) > \frac{G(n) \times}{\log x \log x} (1 - 2C_3 - 6(K-1)C_5) + \text{誤差項}$$

この主項の係数は幸いにも > 0 となる。つまり (3) は

$$\frac{7}{72} = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{6} < \theta \leq 1$$

の範囲で成立つ。

$z = \sqrt{x}$ と挿入してみる。すると $1 - 2C_3 < 0$ となってしまう。
すなわち (20) の右辺第2項すべてを 0 で置換えるわけには
いかない。そして みつつの素数の積と直面するにはあまり
にも非力である。

跋

ここに書きつけた事には糸田君の検証が反映されている。
〈できるはずである〉〈思われる〉あたりが何やらあやしい。
それでも いずれは 全て正当化できると楽観して居る。

二月廿七日