

# On Convexity/Concavity of Market Impact Functions: Empirical and Simulation-Based Studies of Limit Order Books<sup>1</sup>

大阪大学大学院基礎工学研究科 加藤 恭

Takashi Kato

Division of Mathematical Science for Social Systems, Graduate School of Engineering Science,  
Osaka University

## 1 Introduction

近年, IT 技術の発展と共に金融市場において取引の高頻度化や自動化が急速に進展しており, それと共に, 大口取引の効率化・最適化に関わる理論研究も活発に行われている. 特に, 大量証券の売却 (流動化) あるいは購入に関する最適執行スケジュール策定 (最適執行問題) に関して様々な観点から数多くの研究がなされているが, そのような問題の考察においては市場流動性, 特に「取引主体 (トレーダー) 自身の取引行動が証券価格自体に影響を与えてしまう」というマーケットインパクト (Market Impact: 以下 MI と略記する, 価格インパクトとも呼ばれる) を考慮する事が重要となる. 本稿では MI 関数の形状に焦点を当て, 特に MI 関数の convexity 及び concavity に関して理論面及び実証面の双方から分析を行う.

## 2 MI 関数と最適執行問題

今, 大量の証券を保有しているトレーダーが金融市場において売却執行を行おうとしているとしよう<sup>2</sup>. この時, 一度に大きな売却を行うと, 自身の売却行動が需給バランスを崩してしまい (即ち MI を引き起こし) 証券価格の大幅下落を引き起こしてしまうかもしれない. そのため, トレーダーは MI を避けながら時間をかけて売却を進めていく必要がある. しかし, 時間をかけ過ぎると今度は証券価格の変動に伴うタイミングリスクに曝される事になってしまう. トレーダーは, MI とタイミングリスクのトレードオフを考慮しながら自身にとって最適な執行スケジュールを策定しなければならない.

このような最適執行問題に関する理論研究の中で最も古典的なものとして [7] がある. そこでは, 証券価格が算術的ランダムウォークに従う場合の, 離散時間モデルにおける線形 MI 関数の下での期待執行コスト最小化問題が扱われている. その後, [4] によって [7] の拡張にあたるモデルが提案され, 線形恒久的 MI と線形一時的 MI<sup>3</sup> の下での執行コストに関する平均分散問題が離散時間モデルの枠組みで扱われ, 彼等のモデルは実務においても幅広く用いられる事となった.

その他の研究として, やはり離散時間モデルの枠組みで証券価格の時間変動に平均回帰性を持たせて一時的 MI を表現した [29], 執行戦略の形状を一定速度執行 (TWAP (Time Weighted Average Price) 執行)<sup>4</sup> に制限した上で, 執行に伴う総時間を制御変数とした最適化問題を離散

<sup>1</sup>本稿は将来公刊予定の論文の簡約版である.

<sup>2</sup>大量購入に関しても同様の問題が考えられるが本稿では売却執行に焦点を当てる事とする.

<sup>3</sup>一般に, MI は執行後に消滅する部分とその後も影響が残存する部分とに分解されると言われており ([26] 参照), 前者を一時的 (temporary) MI, 後者を恒久的 (permanent) MI と呼ぶ. また, 執行後に時間をかけて減衰していく MI の事を一時的 MI と区別して過渡的 (transient) MI と呼ぶ事もある ([18]).

<sup>4</sup>時間軸が出来高によって重み付けされている状況で考えるならばこれは VWAP (Volume Weighted Average Price) 執行と解釈出来る.

時間及び連続時間モデルの両方で考察した [25], large trader と多数の small agent からなる離散多期間市場モデルにおける数理経済的動的均衡アプローチを研究した [30] 等がある。

連続時間モデルを用いた研究としては、証券価格が Black-Scholes モデル（幾何 Brown 運動）に従う場合の対数線形恒久的 MI の下での寡効用最大化問題を扱った [24], 多期間平均分散アプローチによって執行問題における効率的フロンティアを考察した [15]<sup>5</sup>, 算術モデルにおける線形 MI 及び幾何モデルにおける対数線形 MI の下でのリスク回避的トレーダーの最適執行戦略を扱った [37], CARA 型効用関数を持つトレーダーの最適執行戦略とリスク回避度の関係性について調べた [53] 等がある。

他, リミット・オーダー・ブック (Limit Order Book: LOB), 所謂「板」というものを数学的にモデル化し, オーダードリブン型あるいはハイブリッド型の市場を想定した最適執行問題を扱う研究も盛んに行われている ([1], [50], [51] 等)。これらの研究では所与の LOB に対する成行注文 (market order) に関する執行を考察するのが一般的となっているが, それ以外にも指値注文 (limit order) を用いた最適執行を考察している研究も行われている ([22] 等)。指値注文に関する最適戦略に関する研究はマーケット・メーカーの在庫管理問題という観点においても [27] によってなされ, その後 [6], [23] によって拡張がなされている。

上で見てきたように, 最適執行問題に関するモデルは離散時間モデルと連続時間モデルと大別する事が出来る。最適執行問題とは, 執行に関する効用最大化あるいはコスト最小化のためにどのようなタイミングでどれだけの量の執行を行うか, という「動的な」最適化問題であり, 時間の概念のモデル化は重要なポイントの一つとなっている。

近年の金融市場は取引の高頻度化が進んでおり, 取引のタイミングは無数にあるため, 実際の市場においてもあたかも連続的に取引が可能であると考え事も出来る。しかし, 例えば古典的 Merton 問題 ([43], [44]) における最適解のように「証券の保有比率を一定に保つように連続的に取引する」というのは (たとえ取引コストや取引の流動性の問題を無視したとしても) 現実的ではなく, 連続時間モデルとはあくまで近似モデルに過ぎない。また, 後で述べるように最適執行問題ではモデルの微細な設定の差が得られた結果に大きな違いをもたらす事もあり, 「執行問題」という非古典的な問題に対する数理モデルの連続時間のフレームワークにおける構築は慎重になされるべきである。

一方, 離散時間モデルは実際の市場参加者の行動を数学的に記述するのに優れている。但し, 離散時間モデルにおける計算は一般に煩雑になりやすく, そこから理論的示唆を得る事が難しい場合も多い。

[33] では, 最適執行問題における適切な数理モデルの構築を行うためにまず離散時間モデルの枠組みにおいてトレーダーの売却執行とそれに伴う価格下落, 及びその後の時間経過による価格変化の状況を記述し, 極限移行によって連続時間モデルの最適執行問題を確率制御問題の値関数 (value function) として導出している。また多くの理論研究では MI 関数の形状として (特に恒久的 MI については) 線形関数を仮定しているのに対し, [33] では一般の形状, 特に広義凸な MI 関数を扱っている。

ここで, MI 関数の数学的な定義を与えておこう。トレーダーが  $\psi$  枚数の証券を市場において売却執行したとする。この時, MI によって証券価格は下落するが, その度合いを収益率ベースで表したものをここでは MI 関数と呼ぶ事にする。具体的には, 執行前の証券価格を  $S_0$ , 執行後の

<sup>5</sup> 執行問題における効率的フロンティアは [4] によって提案され, [39] でも分析がなされている。

価格を  $S_a$  とすると,  $\psi$  枚数の執行に伴う MI 関数  $g(\psi)$  は, 算術収益率ベースでは

$$g(\psi) = -\frac{S_a - S_b}{S_b} = 1 - \frac{S_a}{S_b}, \quad (2.1)$$

幾何ベース (対数収益率ベース) では

$$g(\psi) = -\log \frac{S_a}{S_b} = \log S_b - \log S_a \quad (2.2)$$

と表される (購入執行に対しても同様に定義出来る). またこの時, 事後証券価格  $S_a$  を事前価格  $S_b$  と MI 関数  $g(\psi)$  で表すと以下の様に書ける:

$$S_a = S_b(1 - g(\psi)) \quad (\text{算術ベース}), \quad S_b \exp(-g(\psi)) \quad (\text{幾何ベース}).$$

[14] で指摘されているように, MI に関する多くの研究, とりわけ実証分析においては計測対象として複数の MI の概念が扱われている事には注意する必要がある. 上で定義した  $g(\psi)$  は,  $\psi$  枚の証券を「成行」で「一度に」執行した時の MI を表しており, ここではこれをワンショット MI と呼ぶ事にする. その他, 例えば適切な戦略に基づく執行に伴うインプリメンテーション・ショートフォール (IS) を MI の尺度と考える事もある<sup>6</sup>. これは, [31], [35] においてリスク中立トレーダーの最適執行戦略に伴う執行コストとして扱われているものと同様であり, そこではトータル MI コストという表現がなされている<sup>7</sup>:

$$TC(\psi) = -\log \frac{V(\psi, S_0)}{\psi S_0},$$

但し  $V(\psi, S_0)$  は最適執行問題の値関数 (今の場合は最適期待執行コスト) であり,  $S_0$  は現時点における証券価格である.

本稿で対象としているのはワンショット MI 関数  $g(\psi)$  であり, 単に MI 関数と呼んだ時はこれを表すものとする.  $g(\psi)$  は, 執行後の一時的 MI (あるいは過渡的 MI) が回復する前の MI, 即ち恒久的 MI と一時的 MI の和を表している.

### 3 MI 関数の Convexity/Linearity/Concavity

#### 3.1 MI 関数の形状に関する実証分析

MI 関数の形状に関しては実証的に様々な研究がなされている. 多くの研究では MI 関数の線形性あるいは concavity が支持されているが, 一方で convexity を主張する研究も知られている. [36] はニューヨーク証券取引所における取引データから一時的 MI 関数の形状を推定し, それが  $\psi$  の冪型関数で近似出来る事, またその冪指数値は 0.1 ~ 0.4 程度である事を報告している. 一方 [9] は一時的 MI 関数は執行量の線形関数が当てはまると主張している. [5] はシティーグループ

<sup>6</sup>インプリメンテーション・ショートフォールとは執行の意思決定をした時点で想定される (市場流動性等を考慮しない) 理想的な執行収益と実際の執行によって得られた収益との差の事であり, MI コスト, ダイナミックコスト, タイミングコストを合わせたものである. また, 執行の事後評価を IS を指標として行う事も多く, そのような手法は IS 法と呼ばれる.

<sup>7</sup>動的執行戦略にともなうトータルコストは [56] ではアダプティブ・ショートフォール (AS) と呼ばれ, IS とは区別されている. しかし, リスク中立トレーダーの最適執行問題においては戦略のクラスを静的なものに制限して良い場合が多く, 今の場合は両者に本質的な差異は生じない.

の大規模取引データを用いた推定により、恒久的 MI は線形関数、一時的 MI は  $\psi^{0.6}$  程度のオーダーの concave な形状の関数である事を報告している。これらの論文は全てが必ずしもワンショット MI を推定しているとは限らず、([14] の指摘の通り) 対象としている MI の区別には注意すべきであるが、いずれにしても MI 関数は以下の様な幂型関数

$$g(\psi) = \alpha\psi^\gamma \quad (3.1)$$

で近似され、また幂指数パラメーターは  $\gamma = 1$  (線形) あるいは  $0 < \gamma < 1$  (concave) である傾向が強い事が報告されている。一方、[40], [48] では  $\gamma > 1$ , 即ち MI 関数が convex となるような事象も紹介されている。(3.1) の形状の MI 関数は実務的にも多くの証券会社によって用いられている事が [49] において紹介されている。

また、[11], [36] では (3.1) の形状の関数を  $g(\psi)$  に当てはめるのは必ずしも良い近似とはならず、小規模執行と大規模執行とで  $\gamma$  の水準は変化する事も指摘されており、[49] では (3.1) の形の複数の幂型関数の加重平均によって MI 関数を表現する事が提案されている。なお、[36] では、大規模執行の方が小規模よりもより  $\gamma$  が小さい、即ち concavity が強い傾向がある事が主張されているが、[47] によると、実務家は「小規模執行では concave, 大規模執行では convex」となるような S 字型 (S-shape) MI 関数を想定している事が多いという (図 1 参照)。同様の S 字型 MI 関数に関しては [52] でも指摘がなされている。

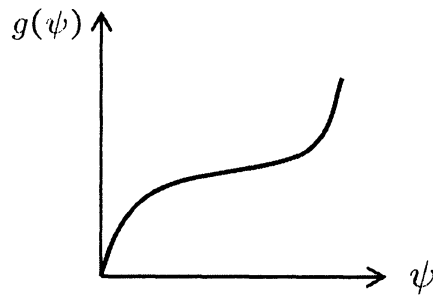


Figure 1: Form of an S-shape MI function.

後に述べるように、オーダードリブン型あるいはハイブリッド型の市場においては板 (複数気配) 情報を用いて MI 関数の形状を推定する事も考えられる。これに関しては後の 6 章で紹介するが、S 字型 MI 関数が支持される結果がいくつか得られている。

以上のように、MI 関数の形状、特に線形性/非線形性、convexity/concavity について様々な実証研究がなされているが、未だ普遍的な結論は得られておらず、現在も精力的に研究が進められている。

一方、執行理論において MI 関数の線形性/非線形性、あるいは convexity/concavity はどのような意味を持つのであろうか。以下、いくつかの理論的観点から MI 関数の形状が執行戦略にもたらす影響について紹介していく。

### 3.2 理論分析 I: 一括執行 v.s. 分割執行

[32] では、MI のどのような性質が分割執行を引き起こすのかについて [33] で構築されたモデルを用いたケーススタディーを扱っている。その結果を紹介する前に、数理ファイナンスにおけ

る代表的なトピックである最適投資問題に関して、市場流動性がどのような影響をもたらすのかについて簡単に説明をしておきたい。

既に触れたように、古典的 Merton 問題 [43], [44] において投資家の最適ポートフォリオ戦略は「投資比率を一定値 (Merton 比率) に保つ事」であった。これは市場流動性が存在しない理想的な市場における最適戦略であるが、取引コストや低流動性といった現実的な問題を考慮すると状況は変化する。

取引コスト下での最適投資問題の解は、大まかに言って「ポートフォリオ比率が No Transaction 領域 (NT) に収まっている時は何もせず、はみ出した時にリバランスを行う」という戦略となる<sup>8</sup>。言い換えるならば、取引コストが無い場合の Merton 問題においては NT 領域が定数 (Merton 比率) となっており、その定数から乖離が生じないように連続的に取引を続ける必要があった、と解釈出来る。

また、取引を行う金融商品の流動性が低い場合の最適投資問題の研究として、[41], [42] では「希望する取引が必ず成立 (約定) するとは限らない」という状況の下での最適投資問題を扱い、取引成立時刻を所与の Poisson 過程のジャンプが起こった時のみに制限した場合の最適戦略を導出し、Poisson 過程の強度 (intensity) を大きくする、即ち取引成立の機会を増やすと最適戦略は古典的 Merton 問題の解に収束する事を示した<sup>9</sup>。

このように、市場流動性を考慮した場合の投資家の最適行動は Merton 問題という理想的な市場におけるものから変化する。言い換えれば、市場流動性の無い Merton 問題を「ベンチマークモデル」として考えた時に、市場流動性を考慮した時の最適戦略とベンチマークモデルにおけるそれを比較する事によって、市場流動性が与える影響を推し量る事が出来るのである<sup>10</sup>。

同様の考察を最適執行問題で行う場合、ベンチマークモデルに相当するものは何であろうか。一つの候補は、Merton 問題と同様の、証券価格の変動が Black-Scholes モデルとして与えられる場合の (即ち証券価格が幾何 Brown 運動に従うとした時の) 対数効用あるいは冪効用の最適化問題であるが、実は執行問題においてはこのような、所謂 HARA 型効用関数最適化問題においても陽な解を得る事は難しい事が知られており、[24] では最適解の数値計算が扱われている。

そこで [32] では、トレーダーがリスク中立である場合に着目し、MI が存在しない理想的な市場におけるトレーダーの期待 (売却) 執行コスト最小化問題をベンチマークモデルとして扱っている。この場合、更に証券のリスク調整済みの期待収益率が負である場合、トレーダーの最適執行戦略は初期時点における一括執行 (block liquidation)、即ち「 $t = 0$  において保有している全ての証券をまとめて売却」である事が容易に分かる。これは直観とも整合的な結果であり、今後平均的な価格下落が見込まれる証券に対して MI コストや流動性リスクが無視出来るのならば、トレーダーはタイミングリスクを避けるために出来る限り早く執行を完了させようとするのが自然と言える。

ここに MI の影響を導入した場合にはどうなるであろうか。この場合、トレーダーは MI コストを避けるべく時間をかけて執行を行う、即ち分割執行 (gradual liquidation) 戦略を取ろうとする、と考えられる。しかし実は、(恒久的) MI 関数として (対数) 線形な関数  $g(\psi) = \alpha\psi$  ( $\alpha > 0$ ) を導入した場合には最適執行戦略はやはり初期時点における一括執行となってしまう<sup>11</sup>。即ち、線

<sup>8</sup>取引金額に比例するコストがある場合の最適投資問題は [12], [54], [57] 等によって研究がなされている。また取引金額によらない固定コストが生じる場合の研究としては [10], [38], [46] 等がある。

<sup>9</sup>同様のモデルにおいて不完全情報の概念を導入した研究として [16], [17], [45] 等がある。

<sup>10</sup>詳細は [32] の Section 2 を参照されたい。

<sup>11</sup>厳密には  $\epsilon$ -一括執行となる。

形な MI 関数をモデルに導入するだけではトレーダーが分割執行を行うためのインセンティブには繋がらないのである<sup>12</sup>。

[32] では、トレーダーに分割執行のインセンティブをもたらす主要な要因として「(恒久的) MI 関数の convexity」と「価格回復効果」を挙げている。前者に関して、[33] の具体例において  $g(\psi) = \alpha\psi^2$  の場合の期待執行コスト最小化問題の解が紹介されているが、この場合「大量のまとまった執行は甚大な MI を引き起こす」ために、細かく分割して執行を行う必要性が生じる事となる<sup>13</sup>。一方後者は過渡的 MI と本質的な繋がりを持つ概念である。[34] では、特に証券価格が幾何 Ornstein-Uhlenbeck (OU) 過程に従う場合のリスク中立トレーダーの最適執行戦略を陽的に導出している。この場合、たとえ恒久的 MI 関数が線形であった場合についても期中分割執行が生じる事が分かる<sup>14</sup>。これは、「執行後に時間と共に MI の影響が減衰する」という現象を、OU 過程の平均回帰性によって記述したものと解釈する事が出来る。即ち、恒久的 MI がさほど強く無い場合でも、MI の減衰効果<sup>15</sup> が時間をかけて執行する事の要因となるのである。

### 3.3 理論分析 II: 価格操作・逆執行

3.2 節では「分割執行のインセンティブをもたらす効果」として恒久的 MI 関数の convexity が最適執行問題において本質的な役割を果たす事を紹介した。一方、他の理論研究において「恒久的 MI は線形関数でなければならない」とするものもいくつか存在する。ここでは、[1], [18], [28] 等によって研究がなされている価格操作 (price manipulation) と MI 関数の形状の関係性について紹介する。

価格操作戦略とは、「MI を巧みに利用する事によって、初期時点でコストをかける事無く将来時点で正の期待収益を得るような戦略」の事を言う<sup>16</sup>。これは数理ファイナンスの一般論における裁定 (arbitrage) 戦略に類似した概念であり<sup>17</sup>、健全な金融市場においてはこのような戦略の可能性は排除されるのが自然と言えよう<sup>18</sup>。

[28] では、Almgren-Chriss [4] 型の離散時間執行モデルにおいて価格操作が生じないためには恒久的 MI 関数が線形でなければならない事が示されている。また同様の結果は連続時間モデルにおいて [18] によっても示されている<sup>19</sup>。一方、[1] や [2] では非線形な LOB における成行注文によるリスク中立トレーダーの最適執行問題を扱い、比較的一般的な条件の下で、たとえ (恒久

<sup>12</sup> 実は、リスク調整済みドリフトが負である場合には、トレーダーがリスク回避的であったとしてもやはり線形 MI 関数の下での最適戦略は初期時点一括執行となってしまう事が分かる。詳細は [33], [37] を参照せよ。

<sup>13</sup> 更に興味深い現象として、実はこの場合の最適執行戦略の形状は証券保有量の規模に応じて大きく変化する事が分かっている。

<sup>14</sup> 具体的には、初期・期末における  $\varepsilon$ -一括執行と期中分割執行の混合戦略が最適となる。またこの解の形状は [39] や [50] といった異なるモデルにおいて得られる最適解と類似している事は興味深い現象である。

<sup>15</sup> あるいは価格弾性効果 (resilience) と言っても良い。

<sup>16</sup> 数学的に厳密な定義は [19] を参照せよ。

<sup>17</sup> Quasi-arbitrage とも呼ばれる。また、所謂統計的裁定取引 (statistical arbitrage; stat. arb.) と捉える事も出来るが、市場の非効率性によって生じる収益機会と解釈するのは必ずしも適切では無い。

<sup>18</sup> これまでは執行戦略として「購入のみ」あるいは「売却のみ」の場合を想定した議論を進めてきたが、価格操作とは買いと売りを組み合わせた戦略であるためモデルの中では必然的に購入と売却の両方を許容する戦略のクラスを扱う事となる。

<sup>19</sup> [18] では、MI による価格変動が「執行量に伴う MI 関数」と「MI の減衰 (decay kernel)」の累積で表されるような、即ち恒久的 MI と過渡的 MI の混合によって表現されているモデルが提案され ([19] では JG model と呼ばれている)、その中で価格操作が生じないための条件を導いている。結果として、やはり恒久的 MI の線形性が無ければ価格操作戦略を実行出来る事が示唆されている。

的) MI 関数が非線形であったとしても価格操作は起こらない, という結果を導いている<sup>20</sup>. 特に, 彼等の結果によると “convex” な MI 関数の下でも価格操作は生じない事が分かる.

このように, 価格操作の可能性に関してはモデルの構造の差異によって結果が大きく変化するため慎重に議論がなされるべき問題である. しかしいずれにしても, MI 関数の線形性/非線形性の構造が価格操作戦略の存在, 言い換えれば金融市場の健全性において本質的な概念であると言える.

なお, 価格操作が出来ない場合であったとしても, 例えば売却執行スケジュールの中に購入取引が含まれるべきではない. 無論, 収益獲得のために購入を行う事も考えられるであろうが, それは元来の執行の目的とは異なる. あるいは, もしそのようなインセンティブを許したとしても, 保有証券流動化のために頻繁に買いと売りを繰り返すような戦略は不自然と言えよう. ここでは, そのような「購入 (または売却) 行動が含まれるような売却 (または購入) 戦略」の事を逆執行 (reverse execution) 戦略と呼ぶ事にする. これは, [3], [19] において transaction-triggered price manipulation と呼ばれている概念と本質的に同一のものである. [20] では, 恒久的 MI 関数が線形である場合に逆執行の可能性と過渡的 MI に関する decay kernel の形状の関係について調べ, decay kernel が単調非減少かつ convex である時に (その他いくつかの技術的仮定の下で) 最適執行戦略は逆執行とはならない事を示している. 即ち, 過渡的 MI の convexity/concavity は逆執行が最適執行戦略となる可能性に関して重要な役割を果たしていると言える.

## 4 LOB と MI 関数に関する注意

前章では MI 関数の線形性/非線形性や convexity/concavity が理論的にも実証的あるいは実務的にも重要な意味がある事について見てきた. 本章では, オーダードリブン型あるいはハイブリッド型の取引所において証券取引がなされている場合の板の厚さと MI 関数の関係について解説する.

LOB とは市場において発注が成されている指値注文をひとまとめにしたものである (LOB の概要については [21] 等を参照されたい). 実際の市場においては証券価格は呼値毎の離散的な値となっているが, ここでは扱いやすさのために連続的な値に対して指値注文が蓄積されている状況を考える.

今, 最良買い気配値を  $p$  円とし, ここから  $x \in (0, p)$  円離れた値, 即ち  $p - x$  円の水準に発注がなされている指値注文の総数を  $f(x) (\geq 0)$  と書き, これを  $x$  における板の厚さと呼ぶ. この時,  $[p - x, p]$  の価格帯に存在する指値注文の総量は

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy \quad (4.1)$$

で表される. さて, この板において  $\psi$  枚の成行注文を行った場合, 板上の指値注文は最良気配から順番に「喰われていく」事となり, 最終的に価格は  $F(v) = \psi$  を満たす  $v$  の金額分だけ下落する. 即ち, 簡単のため  $F$  は真に単調増加とすると, 枚数  $\psi$  の執行後の証券価格は  $p - F^{-1}(\psi)$  に減少する事となる.

買い執行についても同様である. 即ち, 最良売気配値から  $x$  円離れた板の厚さを  $f(x)$  とし (売却の場合と異なり,  $f$  の定義域は  $(0, \infty)$  となる)  $F(x)$  を (4.1) で定義すると,  $\psi$  枚の購入執

<sup>20</sup>彼等のモデルは連続時間型であるが, 執行戦略に関しては「 $N$  回のみの執行が可能」という離散時間型の戦略のクラスに制限しており, その後  $N \rightarrow \infty$  という極限移行を行う事で近似的に連続的な執行戦略を記述している.

行後の証券価格は  $p + F^{-1}(\psi)$  となる。

以上の設定の下で算術ベースのワンショット MI 関数を (2.1) に従い計算すると、売却・購入どちらについても

$$g_A(\psi) = \frac{F^{-1}(\psi)}{p} \quad (4.2)$$

となる。この時次の命題が成立する。

**Proposition 1**  $I \subset [0, \infty)$  を任意の区間とする。この時、 $g_A$  が  $I$  上で *convex* (あるいは *concave*) である事は  $f$  が  $F^{-1}(I)$  上単調減少 (あるいは単調増大) である事と同値。

*Proof.*  $F$  が真に単調増大である事及び逆関数の convexity/concavity に関する一般論から明らかである。  $\square$

上の命題の主張は直観的にも自然なものと考えられる：執行枚数が増加するにつれて板が薄くなるならば、大規模（一括）執行による価格変化はより大きなものとなり、結果として MI 関数に *convex* な形状が生じる。逆に、最良気配から離れたところで板が厚くなっているならば、大量の執行を行ったとしても価格の変化はその厚い板で食い止められるため、MI 関数は *concave* な形状を帯びる事となる。

次に幾何ベースで計算した場合について考察する。この場合、(2.2) から MI 関数は以下で与えられる事が分かる（売却執行と購入執行とで関数の形状が異なるため、ここでは  $g_G^a, g_G^b$  をそれぞれ売却、購入に関する MI 関数として区別して与える事にする）。

$$g_G^a(\psi) = -\log \left( 1 - \frac{F^{-1}(\psi)}{p} \right), \quad g_G^b(\psi) = \log \left( 1 + \frac{F^{-1}(\psi)}{p} \right).$$

**Proposition 2**  $I \subset [0, \infty)$  を开区間とし、また  $f$  は  $F^{-1}(I)$  上  $C^2$ -級とする。この時、

- (i)  $g_G^a$  が  $I$  上で *convex* (あるいは *concave*) である事の必要十分条件は  $f'(q) \leq (p-q)^{-1}f(q)$  (あるいは  $\geq$ ) ,  $q \in F^{-1}(I)$ .
- (ii)  $g_G^b$  が  $I$  上で *convex* (あるいは *concave*) である事の必要十分条件は  $f'(q) \leq -(p+q)^{-1}f(q)$  (あるいは  $\geq$ ) ,  $q \in F^{-1}(I)$ .

*Proof.*  $g_G^a$  及び  $g_G^b$  の二階導関数を計算すれば良い。  $\square$

上の命題から、MI 関数の convexity/concavity に関して算術ベースの時とは異なった状況が生じている事が分かる。まず購入執行について考察すると、Proposition 1 と同様にして、区間  $I$  に対して  $F^{-1}(I)$  上  $f' \geq 0$  ならば、即ち  $f$  が単調増大であるならば  $g_G^b$  が *concave* になる事は Proposition 2(ii) から容易に分かる。一方、 $g_G^b$  が *convex* になるための自然な十分条件を記述するのは困難であるが、例えば  $f(q) = 1/q$  や  $f(q) = e^{-q}$  の場合は  $g_G^b$  の convexity を確認する事が可能である。一方、売却執行に関しては以下が成り立つ。

**Proposition 3**  $f$  は  $[0, p)$  上  $C^2$ -級とする。

- (i) 任意の  $v \in (0, F(p))$  を固定し  $I_v = (v, F(p))$  と置く。この時、 $f \in L^1((F^{-1}(v), p))$  ならば  $g_G^a$  は  $I_v$  上決して *concave* にならない。

(ii)  $|f'(p-)| < \infty$  ならば,  $F(p)$  に十分近い  $v < F(p)$  に対して  $g_G^a$  は  $I_v$  上 convex となる.

*Proof.* (i) について, まず  $f \in L^1((F^{-1}(v), p))$  より  $F(p) < \infty$  である事に注意する. もし  $g$  が  $I_v$  上で concave となったとすると, Proposition 2(i) から

$$(p-r)f'(r) \geq f(r), \quad r \in (F^{-1}(v), p)$$

となる. この両辺を  $(F^{-1}(v), p)$  上積分してから部分積分公式を適用すると

$$\int_{F^{-1}(v)}^p (p-r)f'(r)dr = -(p-F^{-1}(v))f(F^{-1}(v)) + F(p) - v \geq F(p) - v$$

となり, ここから  $p < F^{-1}(v)$  が得られるがこれは  $v$  の定義と矛盾.

(ii) について, まず  $f'$  の連続性から明らかに  $(0 \leq) f'(p-) < \infty$  である事が分かる. ここで, もし  $f'(p-) < 0$  であるとする, ある  $q_0 \in (0, p)$  が存在して  $f'(q) < 0 \leq (p-q)^{-1}f(q)$ ,  $q \in [q_0, p)$  となるため, Proposition 2(i) から  $g_G^a$  は  $I_{F(q_0)}$  上 concave となる.  $f'(p-) \geq 0$  の場合は  $f(p-) > 0$  である事が分かるので, ある  $q_1 \in (0, p)$  が存在して  $f(q) \geq f(p-)/2$ ,  $q \in (q_1, p)$ . 更に  $\lim_{q \rightarrow p} f(q)(p-q) = 0$  である事から, ある  $q_2 \in (q_1, p)$  が存在して

$$f'(q)(p-q) < \frac{f(p-)}{2} \leq f(q), \quad q \in (q_2, p).$$

よって再び Proposition 2(i) から  $g_G^a$  が  $I_{F(q_2)}$  上 convex となる事が分かる. □

本命題の主張については注意が必要である. 即ち,  $v$  が十分大きい時, 比較的緩い条件の下で  $g_G^a$  は自然に convex となってしまうのである. 執行量が小さい時には  $g_G^a, g_G^b$  は  $g_A$  と近い値になる, 言い換えれば  $g_A$  は  $g_G^a, g_G^b$  の一次近似となっていたために関数の形状に大きな差は見られないが<sup>21</sup>, 執行量が大きい場合には状況が一変し,  $g_G^a$  の定義に表れる対数関数等の影響によって「歪み」が生じ, 直観と異なるような状況が産まれるのである.

これは単に, LOB を算術モデルで, MI 関数を幾何モデルで記述したが故に生じた現象であり, 本質的な問題点とは言えないかもしれない. しかし, 数理ファイナンスにおいて証券価格過程に幾何モデルを適用するのは標準的であり従って最適執行問題において幾何的 MI 関数を用いるのが自然である一方, LOB を幾何モデルによって記述する事が自然とは言えない (例えば呼値を対数価格によって与える事は現実の市場と整合的でない) 状況に鑑みると, LOB の分析と最適執行問題の「橋渡し」の部分を考える上で注意しなければならない現象と言えよう.

## 5 簡易実証分析: 東証株式市場 LOB における小口執行に対する MI の関数形

本章では, 東京証券取引所 (以下東証) における LOB データを用いて MI 関数の形状に関する簡単な実証分析を行う. より具体的には, 東証一部上場銘柄 50 銘柄 (規模の偏りを無くすため, 推計期間において時価総額順に並べてそこから等間隔に銘柄を選択した) の 1 分足 5 本複数気配データを用いて, 4.2 式によって「執行枚数」と「対応する MI」のデータを集計し, 回帰分析によって MI 関数が convex, concave のどちらになりやすいかを調べる. 以下, 分析方法及び推計結果に関して順に解説していく.

<sup>21</sup> 執行量が小さい場合, Proposition 2(i) において,  $p-q(>0)$  は小さな値となり,  $(p-q)^{-1}f(q) \approx 0$  と解釈すれば Proposition 1 の主張と対応している事が分かる.

## 5.1 データ

上述の通り、分析対象のユニバースは企業規模の偏りを持たない東証一部上場 50 銘柄とする。推計期間は 2010 年 3 月 1 日から 3 月 5 日までの一週間とし、前場における 1 分間隔の 5 本複数気配データ（買い指値のみ）を用いる。なお寄付・引けの影響を避けるため、観測時刻は 9:05 から 10:55 のものに制限している<sup>22</sup>。これにより観測時点数は 111 となり<sup>23</sup>、各時点で 5 つの複数気配データが得られるので、回帰分析に用いる観測データ総数は 1 銘柄あたり（最大）555 となる。

各時点  $t$  において、データは「気配値  $q_i^t$ 」と「買い指値枚数  $\psi_i^t$ 」( $i = 1, \dots, 5$ ) となっているが、これを次の式によって「(ワンショット) 執行枚数  $x_i^t$ 」と「MI コスト  $y_i^t$ 」( $i = 1, \dots, 5$ ) に変換する:

$$x_i^t = \sum_{j=1}^i \psi_j^t, \quad y_i^t = 1 - \frac{q_i^t}{p^t},$$

但し  $p^t$  は  $t$  時点における mid-price（最良買い気配値と最良売り気配値の平均値）である。図 2 はこの変換の概要を表している。

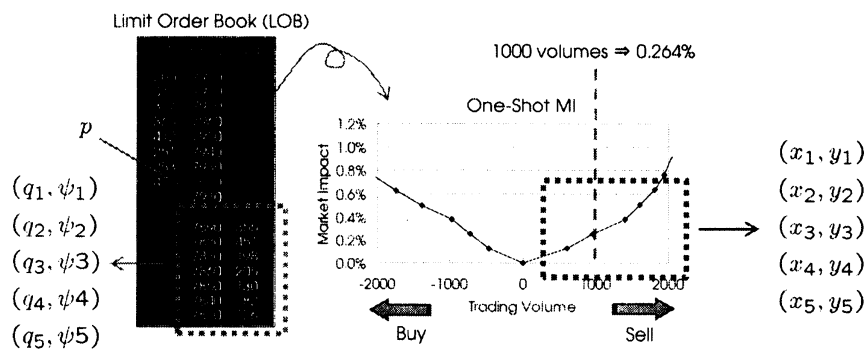


Figure 2: Image of the transformation from  $(q_i^t, \psi_i^t)$  to  $(x_i^t, y_i^t)$ .

## 5.2 推計式

上で得られたデータのペア  $(x_i^t, y_i^t)$  ( $i = 1, \dots, 5, t = 0, \dots, 110$ ) を用いて、以下の 3 通りの推計式を用いて回帰分析を行う。なお  $\varepsilon_i^t$  は誤差項を表す。

(a.)  $y_i^t = \alpha + \beta x_i^t + \gamma (x_i^t)^2 + \varepsilon_i^t$  (切片あり多項式回帰)

(b.)  $y_i^t = \beta x_i^t + \gamma (x_i^t)^2 + \varepsilon_i^t$  (切片無し多項式回帰)

(c.)  $\log y_i^t = \alpha + \gamma \log x_i^t + \varepsilon_i^t$  (対数線形回帰)

<sup>22</sup> 本推計期間においては東証の前場引け時刻は 11:00 であった

<sup>23</sup> 欠損値がある場合はデータ数は減少する。

(a.), (b.) の場合, 二次係数  $\gamma$  の符号によって MI 関数の convexity/concavity の判別が可能である ( $\gamma > 0$  の時は convex,  $\gamma < 0$  の時は concave となる). (c.) の場合, 対応する推計式は  $y_i^t = C(x_i^t)^\gamma$  (但し  $C = e^\alpha > 0$ ) であり,  $\gamma > 1$  の時は convex,  $(0 <) \gamma < 1$  の時は concave と判別される. なお (a.), (b.) の場合,  $\gamma$  の正負は二次係数に関する  $t$  値の正負と対応している事に注意しておく.

### 5.3 推計結果

上記の手法に従い実際に回帰分析を行った結果が図 3-5 である. 横軸は銘柄を表しており, 縦左軸は二次回帰係数の  $t$  値 ((a.), (b.) の場合) あるいは  $\log x_i^t$  の係数値 ((c.) の場合) を表している. 縦右軸は修正決定係数値である.  $t$  値あるいは  $\gamma$  の値が破線 (図 3-4 では 0, 図 5 では 1) を上回っている場合は MI 関数は convex, 下回っている場合は concave となるが, いずれの推計式を用いた場合においてもほとんどの銘柄において MI 関数が concave である傾向が見て取れる<sup>24</sup>.

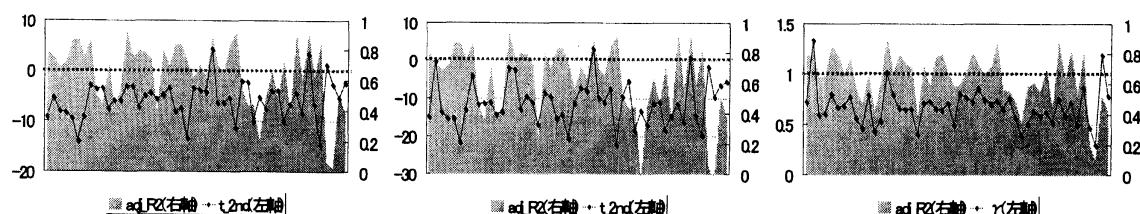


Figure 3:  $t$ -values of the coefficient  $\gamma$  in the regression (a.). Figure 4:  $t$ -values of the coefficient  $\gamma$  in the regression (b.). Figure 5: Coefficients  $\gamma$  in the regression (c.).

## 6 LOB に対するシミュレーション分析

### 6.1 LOB 及び MI 関数の形状に関する先行研究

前章の分析において, 執行枚数が少ない場合の MI 関数が concave な形状となる傾向を見る事が出来た. 一方, 最良気配を離れて大きく価格を変化させるような大口執行に対してはこのような傾向が見られるとは限らない. 実際, 現値から大きく価格の離れた位置にある指値注文は, 市場じかより有利な価格で注文が執行される事によるメリットよりも, 市場への注文情報提示に伴うリスクや非約定リスク, また約定までの資金拘束に伴う機会損失等によるデメリットの方が上回るかもしれない.

4 章で示したように, もし最良気配から離れた価格帯における板の厚さが価格差と共に薄くなっていく傾向が見られるならば, MI 関数は convex な形状を帯びてくる事となる. もし最良気配から何 tick も離れた価格帯における精緻な高頻度複数気配情報を用いる事が出来れば前章と同様の手法によって MI 関数の形状を調べる事が出来るかもしれないが, データ入手が困難であるだけでなく, そのような指値注文情報は約定の可能性の低さも相俟って信頼性に欠ける可能性もある.

<sup>24</sup> 推計期間や時間帯を変えてみた場合もほぼ同様の傾向が見られた事を注記しておく.

また、オーダードリブンあるいはハイブリッド型の市場における LOB 及び MI 関数に関しては、3.1 節でも触れたように S 字型の MI 関数を支持しているものが多い。代表的なものとして、[8] では板の厚さを表す関数  $f$  が

$$f(q) = e^{-q} \int_0^q \frac{1}{r^{1+\alpha}} \sinh r dr + \sinh q \int_q^\infty \frac{1}{r^{1+\alpha}} e^{-r} dr \quad (6.1)$$

という関数によって近似される事が示されている。ここで  $\alpha$  は指値注文流入数に関する冪乗指数を表すパラメーターである：[8] や [58] では、最良気配からの価格の乖離差  $\delta$  とその価格帯における指値注文流入数  $M(\delta)$  の間に冪乗則（power-law）の関係が見られる事が指摘されており、(6.1) はそれを用いて導かれた関数形である。図 6 は (6.1) によって定義される LOB 関数を図示したものである。この場合、 $f(q)$  は  $q = 0.9$  近辺で最大値を持つ “hump-shaped” な関数となっている事が分かる。この  $f$  を用い、(4.2) に従って計算した MI 関数を図示したものが図 7-8 である。執行枚数が少ない時は図 8 のように concave な形状となっており前章の結果と整合的であるが、執行枚数が大きい時は図 7 のように convex な形状を帯びている。

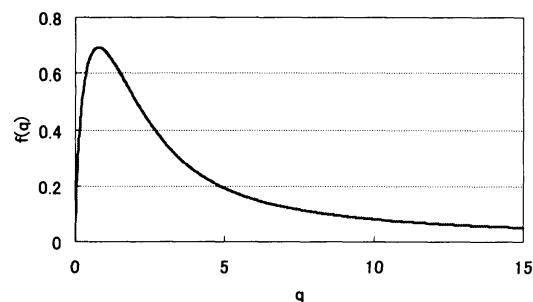


Figure 6: Form of  $f(q)$  defined by (6.1).  $\alpha$  is set as 0.1.

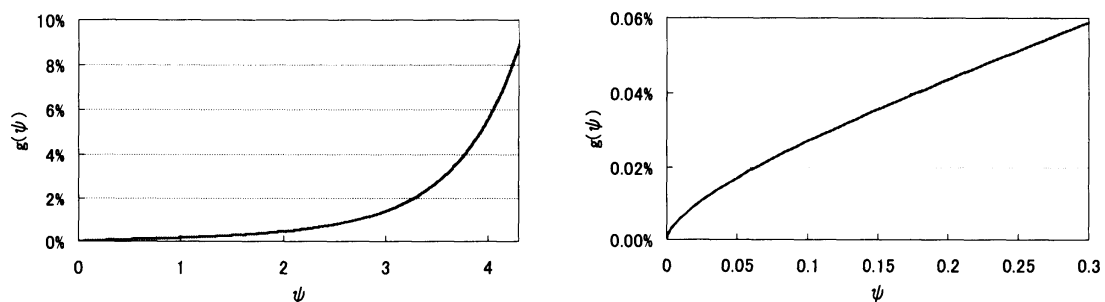


Figure 7: MI function defined by (4.2) and (6.1). Figure 8: Enlarged view of Figure 7 with small  $\alpha$  is set as 0.1.

## 6.2 拡張型 Delattre–Robert–Rosenbaum モデルを用いた分析

前節で紹介した先行研究では、実際の市場での観測に従い最良気配との価格差とその価格帯への指値到着数の間に冪乗則を仮定して S 字型の MI 関数を構築した。この指値注文の到着の仕方と MI 関数の形状には一般にどのような関係があるであろうか。

本節では、Delattre, Robert 及び Rosenbaum (以下 DRR) による efficient price の推計モデル [13] を一般化させ、複数気配指値注文や成行注文の到着も考慮した拡張型 DRR モデルを提案し、これを用いて注文到着の分布と MI 関数の形状の関係をシミュレーション分析によって調べる。

### 6.2.1 拡張型 DRR モデル

[13] では、実際の市場では（呼値の存在や市場流動性の影響等により）直接観測出来ない証券の efficient price の動きを調べるために、最良気配における指値注文到着を Cox 過程を用いて表現している。そして、その強度関数を推定するための漸近正規性を持つ推定量が提案されている。

まず時刻  $t$  における efficient price  $P_t$  はドリフト 0, ボラティリティ  $\sigma$  を持つブラウン運動に従うと仮定する<sup>25</sup>。この時、 $t$  時における最良買い気配値は  $\lfloor P_t \rfloor$  となる ( $\lfloor \cdot \rfloor$  は床関数)。ここで、 $t$  時点までに最良気配値に到着した買い指値注文の総数を  $N_t^b(0)$  と書き、これが強度関数  $\mu^b h^b(Y_t)$  を持つ Cox 過程であるとする。但し  $Y_t = P_t - \lfloor P_t \rfloor \in [0, 1)$ 。また  $\mu^b > 0$  であり、 $h^b$  は  $\int_0^1 h^b(y) dy = 1$  を満たす非負値関数である<sup>26</sup>。ここで  $\mu^b$  の値及び  $h^b(\cdot)$  の形状が分かっていたとするならば、最良気配値への指値注文到着の様子を調べる事で  $Y_t$  がどのあたりの値を取っているのか、即ち efficient price が最良買い気配からどの程度乖離しているのかに関する情報を得る事が出来る。

[13] ではいくつかの数学的仮定の下で  $\mu^b$  及び  $h^b(\cdot)$  を推定するための適切な手法が提案されているが、本稿ではそこには踏み込まず、代わりに DRR モデルを拡張して LOB のシミュレーション分析に用いられるよう、複数気配値への指値注文及び成行注文の到着も合わせてモデル化する事とする。

DRR モデルと同様に、 $N_t^b(k)$  (または  $N_t^a(k)$ ) を、「最良気配から  $k$  本離れた価格帯における  $t$  時までの買い (または売り) 指値注文到着数」とする ( $k = 0$  の時が最良気配に対応している)。そして、 $N_t^b(k)$  (または  $N_t^a(k)$ ) は強度関数  $\mu^b h^b(Y_t + k)$  (または  $\mu^a h^a(\tilde{Y}_t + k)$ ), 但し  $\tilde{Y}_t = \lceil P_t \rceil - P_t$ ,  $\lceil \cdot \rceil$  は天井関数) を持つ Cox 過程であると仮定する ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )。ここで  $\mu^b, \mu^a > 0$  は上と同様であるが、 $h^b, h^a$  は  $[0, \infty)$  上定義された非負値関数とし、 $\int_0^\infty h^b(y) dy = \int_0^\infty h^a(y) dy = 1$  を満たすとする。また、 $t$  時点までの買い (及び売り) 成行注文到着枚数を  $M_t^b$  (及び  $M_t^a$ ) で表し、強度パラメーター  $\lambda^b$  (及び  $\lambda^a$ ) を持つ Poisson 過程であるとする。また簡単のため、これらの確率過程は  $\sigma(P_t; t \geq 0)$  の下で全て (条件付) 独立とする。

さて、 $F_t(l)$  を、価格帯  $l$  における時点  $t$  での指値注文枚数とする。ここで、 $F_t(l)$  が正の時は  $F_t(l)$  が買い指値枚数を、負の時は  $-F_t(l)$  が売り指値枚数を表す事とする。この時、 $(F_t(l))_{l \in \mathbb{N}}$  は時刻  $t$  における LOB を表すと解釈出来る。ここでは  $(F_t(l))_l$  の数学的な定式化は省略し、シミュレーション手法について中心に解説する。まず終端時刻を  $T = 1$  とし、区間  $[0, 1]$  を  $n$  等分割によって離散化する。初期時点における板  $(F_0(l))_l$  は所与であるとし (以下のシミュレーションにおいては  $F_0(l) = 1(l \leq \lfloor P_0 \rfloor)$ ,  $-1(l \geq \lceil P_0 \rceil)$ ,  $0$ (otherwise) とした), また時点  $m/n$  までの板情

<sup>25</sup>  $P_0$  が十分大きくかつ観測時間が短い場合、価格が負になる確率は極めて低いので、そのような可能性は無視する。

<sup>26</sup> [13] では order flow response function と呼ばれている。

報が与えられた後に  $(F_{(m+1)/n}(l))_l$  は次の手順によって更新されるとする。ここで、最良買い気配  $B_t^b$  及び最良売り気配  $B_t^a$  を以下で定義しておく：

$$B_t^b = \sup\{l \in \mathbb{N} ; F_t(l) > 0\}, \quad B_t^a = \inf\{l \in \mathbb{N} ; F_t(l) < 0\}.$$

1. (成行買い注文到着)  $\Delta M_{(m+1)/n}^b := M_{(m+1)/n}^b - M_{m/n}^b$  を、強度  $\lambda^b/n$  の Poisson 乱数として発生させる。もし  $-F_{m/n}(B_{m/n}^a) \geq \Delta M_{(m+1)/n}^b$  ならば  $F_{(m+1)/n}(B_{m/n}^a) = F_{m/n}(B_{m/n}^a) + \Delta M_{(m+1)/n}^b$  と更新する。そうでない場合、 $l$  を  $-\sum_{k=0}^l F_{m/n}(B_{m/n}^a + k) \geq \Delta M_{(m+1)/n}^b$  なる最小の自然数として  $F_{(m+1)/n}(B_{m/n}^a + k) = 0, k < l, F_{(m+1)/n}(B_{m/n}^a + l) = \sum_{k=0}^l F_{m/n}(B_{m/n}^a + k) + \Delta M_{(m+1)/n}^b$  と更新する。
2. (成行売り注文到着)  $\Delta M_{(m+1)/n}^a := M_{(m+1)/n}^a - M_{m/n}^a$  を、強度  $\lambda^a/n$  の Poisson 乱数として発生させる。もし  $F_{m/n}(B_{m/n}^b) \geq \Delta M_{(m+1)/n}^a$  ならば  $F_{(m+1)/n}(B_{m/n}^b) = F_{m/n}(B_{m/n}^b) - \Delta M_{(m+1)/n}^a$  と更新する。そうでない場合、 $l$  を  $\sum_{k=0}^l F_{m/n}(B_{m/n}^b - k) \geq \Delta M_{(m+1)/n}^a$  なる最小の自然数として  $F_{(m+1)/n}(B_{m/n}^b - k) = 0, k < l, F_{(m+1)/n}(B_{m/n}^b - l) = \sum_{k=0}^l F_{m/n}(B_{m/n}^b - k) - \Delta M_{(m+1)/n}^a$  と更新する。
3. (買い指値注文到着) 各  $k = 0, 1, 2, \dots, \lfloor P_{m/n} \rfloor - 1$  に対して、 $\Delta N_{(m+1)/n}^b(k) := N_{(m+1)/n}^b(k) - N_{m/n}^b(k)$  を強度  $\mu^b h^b(Y_{m/n} + k)/n$  の Poisson 乱数として発生させ、 $F_{(m+1)/n}(\lfloor P_{m/n} \rfloor - k) = F_{m/n}(\lfloor P_{m/n} \rfloor - k) + \Delta N_{(m+1)/n}^b(k)$  と更新する。但し  $F_{m/n}(\lfloor P_{m/n} \rfloor - k) < 0$  の場合は手順 1. と同様の方法によって最良売り気配から順に  $\Delta N_{(m+1)/n}^b(k)$  の約定処理を行う。
4. (売り指値注文到着) 各  $k = 0, 1, 2, \dots$  に対して<sup>27</sup>、 $\Delta N_{(m+1)/n}^a(k) := N_{(m+1)/n}^a(k) - N_{m/n}^a(k)$  を強度  $\mu^a h^a(\tilde{Y}_{m/n} + k)/n$  の Poisson 乱数として発生させ、 $F_{(m+1)/n}(\lceil P_{m/n} \rceil + k) = F_{m/n}(\lceil P_{m/n} \rceil + k) - \Delta N_{(m+1)/n}^a(k)$  と更新する。但し  $F_{m/n}(\lceil P_{m/n} \rceil + k) > 0$  の場合は手順 2. と同様の方法によって最良買い気配から順に  $\Delta N_{(m+1)/n}^a(k)$  の約定処理を行う。
5. (Efficient price 更新)  $\xi_{(m+1)/n}$  を標準正規乱数として

$$P_{(m+1)/n} = P_{m/n} \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \xi_{(m+1)/n} \right)$$

と更新する<sup>28</sup>。

上記手順によって、シミュレーションを行う毎に  $T = 1$  における LOB  $(F_1(l))_l$  が  $\mathbb{R}^N$ -値の乱数として得られる。このシミュレーションを  $m$  回繰り返す、平均値を取る事によって期待 LOB  $(\bar{F}_1(l))_l = (E[F_1(l)])_l$  の数値計算を行う。以下簡単のため  $\lambda^b = \lambda^a =: \lambda$ ,  $\mu^b = \mu^a =: \mu$ ,  $h^b = h^a =: h$  とし、また初期証券価格を  $P_0 = 1000$  と設定する。またシミュレーション計算に関わるタイムステップ数及びイテレーション回数は  $n = 1000$ ,  $m = 100000$  とする。関数  $h$  の形状に関しては以下の 3 通りの場合を考察する<sup>29</sup>。

- (i) レイリー分布密度関数:  $h(x) = \frac{x}{\sigma_h^2} \exp(-x^2/(2\sigma_h^2))$  ( $\sigma_h > 0$ )

<sup>27</sup> 実際の数値シミュレーションの際は十分大きな  $K$  によって打ち切りを行う。

<sup>28</sup> [13] とは異なり、ここでは幾何ブラウン運動として efficient price をモデル化した。

<sup>29</sup> 他、パレート分布の密度関数を適用する事も考えられる。この場合、指値注文流入数が冪乗則に従うとする [8] や [58] の設定と対応する事となる。

(ii) 指数分布分布密度関数:  $h(x) = \lambda_h \exp(-\lambda_h x)$  ( $\lambda_h > 0$ )

(iii) 最良気配のみ:  $h(x) = 1_{[0,1)}(x)$

以上の設定の下, 各パラメーターが LOB や MI 関数の形状にどのような影響を与えるか, いくつかのパラメーター設定の下で  $(\bar{F}_1(l))_l$  のシミュレーション計算を行う事で調べていく事とする.

### 6.3 $h$ の形状の影響

(i) の場合は  $\sigma_h$  が大きい程, (ii) の場合は  $\lambda_h$  が小さい程, 関数  $h$  の裾部分は厚くなり, 最良気配値からより離れた価格帯に指値注文が到着しやすくなる. 本節では, この  $h$  の裾の厚さと LOB 及び MI 関数との関係について見ていく.

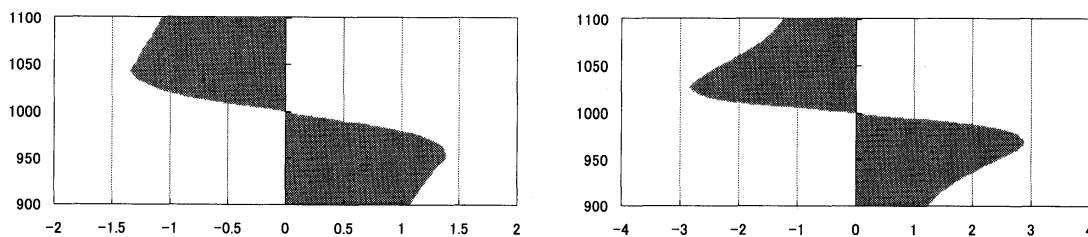


Figure 9: Forms of LOB in the case of (i). Horizontal axes correspond to the volume of limit orders (positive: buying, negative: selling). Vertical axes correspond to price levels. Left:  $\sigma_h = 2$ . Right:  $\sigma_h = 5$ . Other parameters are set as  $\sigma = 0.05$ ,  $\mu = 1000$  and  $\lambda = 500$ .

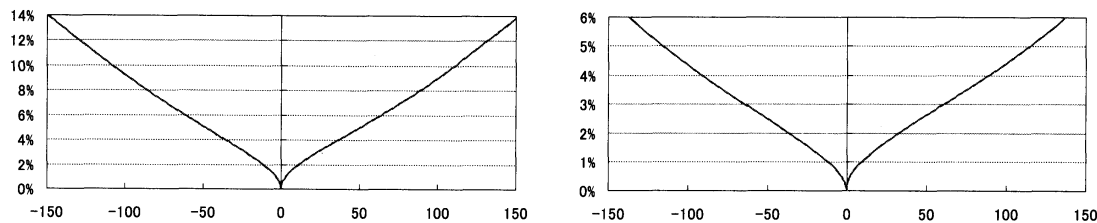


Figure 10: Forms of the MI function in the case of (i). Horizontal axes correspond to execution volumes  $\psi$  (positive: buying, negative: selling). Vertical axes correspond to  $g_A(\psi)$ . Left:  $\sigma_h = 2$ . Right:  $\sigma_h = 5$ . Other parameters are set as  $\sigma = 0.05$ ,  $\mu = 1000$  and  $\lambda = 500$ .

図 9 (及び図 10) は, (i) において  $\sigma_h = 2, 5$  とした時の LOB (及び MI 関数) の形状を表したものである. ここで, 横軸が正の部分は買い指値 (及び購入執行) を, 負の部分は売り指値 (及び売却執行) を表すものとする. その他のパラメーターは  $\sigma = 0.05$ ,  $\mu = 1000$ ,  $\lambda = 500$  としている.  $\sigma_h = 2, 5$  のいずれの場合についても MI 関数は少量執行に対しては concave, 大量執行に対してはやや convex な形状となっており, S-字型 MI を支持するものとなっている. 一方, これらから  $\sigma_h$  が小さい方が (即ち  $h$  の裾が薄い方が) 板が薄くなり, その結果 MI コストはより大きくなる傾向が見られる. これは, 価格ボラティリティの影響によって efficient price と最良気配

値との間に乖離が生じるために起きる現象と考えられる。即ち、 $[P_t]$  が最良売り気配値  $B_t^a$  よりも割高となった場合、 $[B_t^a, [P_t]]$  の価格帯に到着する指値買い注文は成行買い注文と同様の役割を果たし、売り板の厚さを削る効果をもたらすが、 $h$  の裾が薄い場合はそのような価格帯への買い指値到着の割合が多いためそのような現象がより頻繁に生じる事となる。一方、 $h$  の裾が厚い場合には最良気配値水準から離れた価格帯に買い指値注文の到着が起りやすくなり、それによって買い板はより厚くなるのである（売り指値注文に関しても同様）。

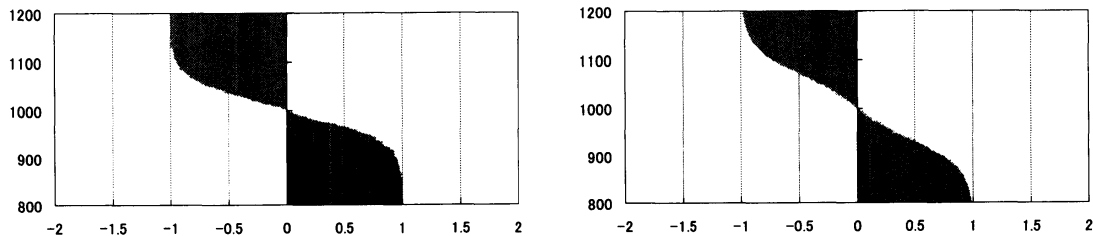


Figure 11: Forms of LOB in the case of (ii). Horizontal axes correspond to the volume of limit orders (positive: buying, negative: selling). Vertical axes correspond to price levels. Left:  $\lambda_h = 1$ . Right:  $\lambda_h = 5$ . Other parameters are set as  $\sigma = 0.05$ ,  $\mu = 1000$  and  $\lambda = 500$ .

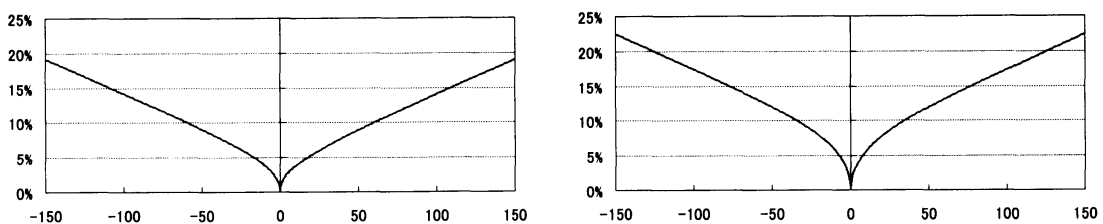


Figure 12: Forms of the MI function in the case of (ii). Horizontal axes correspond to execution volumes  $\psi$  (positive: buying, negative: selling). Vertical axes correspond to  $g_A(\psi)$ . Left:  $\lambda_h = 2$ . Right:  $\lambda_h = 5$ . Other parameters are set as  $\sigma = 0.05$ ,  $\mu = 1000$  and  $\lambda = 500$ .

次に (ii) の場合を見ていく。図 11-12 は  $\lambda_h = 1, 5$  の場合の LOB 及び MI 関数の形状を現したものである。その他のパラメーター設定は (i) の時と同様に  $\sigma = 0.05$ ,  $\mu = 1000$ ,  $\lambda = 500$  とした。MI 関数の形状は  $\lambda_h = 1, 5$  のいずれの場合についても concave となっているが、やはり  $\lambda_h$  が大きい場合、即ち  $h$  の裾が薄い場合の方が MI コストが割高になっている様子が見られる。

#### 6.4 $\sigma$ の影響

本節では価格ボラティリティー  $\sigma$  の大きさの影響について調べる。 $h$  は (i) のパターンのもを用い、パラメーターは  $\sigma_h = 5$ ,  $\mu = 1000$ ,  $\lambda = 500$  とする。

図 13-14 は  $\sigma = 0.01, 0.2$  の場合の LOB 及び MI 関数を描いたものである。これと図 9-10 の右図 ( $\sigma = 0.05$ ) より、 $\sigma$  が大きい程板が薄く MI コストが大きくなっている様子が見て取れる。これは、 $\sigma$  が大きいと efficient price の変動幅が大きくなるため、前節で解説した  $h$  の裾が

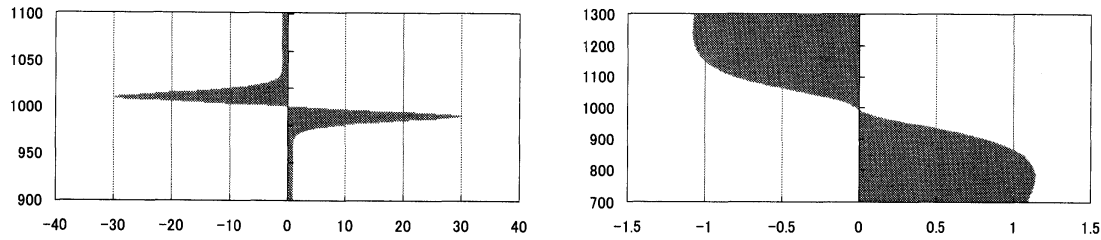


Figure 13: Forms of LOB in the case of (i). Horizontal axes correspond to the volume of limit orders (positive: buying, negative: selling). Vertical axes correspond to price levels. Left:  $\sigma = 0.01$ . Right:  $\sigma = 0.2$ . Other parameters are set as  $\sigma_h = 5$ ,  $\mu = 1000$  and  $\lambda = 500$ .

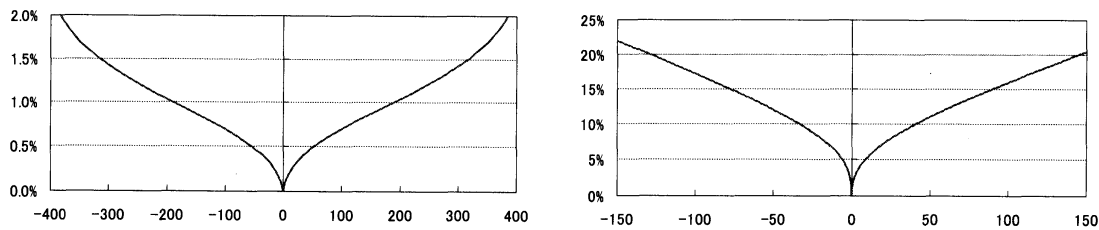


Figure 14: Forms of the MI function in the case of (i). Horizontal axes correspond to execution volumes  $\psi$  (positive: buying, negative: selling). Vertical axes correspond to  $g_A(\psi)$ . Left:  $\sigma = 0.01$ . Right:  $\sigma = 0.2$ . Other parameters are set as  $\sigma_h = 5$ ,  $\mu = 1000$  and  $\lambda = 500$ .

薄い場合と同様の現象が起きやすくなるためである。また、 $\sigma$  が小さい時程、大量執行に対する MI 関数の convexity が強まりより S 字型に近付いていく傾向も見られる。

## 6.5 $\lambda$ の影響

本節では (iii) のパターンにおいて成行注文到着数に関する強度パラメーター  $\lambda$  の影響を調べる。今までと同様に  $\sigma = 0.05$ ,  $\mu = 1000$  とし、 $\lambda = 500, 100$  のそれぞれの場合に LOB 及び MI 関数の形状を描いたものが図 15–16 である。これらより、成行注文が多い場合 ( $\lambda = 500$ ) の MI 関数は concave な形状であるのに対して成行注文が少ない場合 ( $\lambda = 100$ ) は S 字型 (少量: concave, 大量: convex) な形状に近づく傾向が見られる。成行注文の到着は最良気配値近辺の板を薄くする作用があり、 $\lambda$  が大きい場合にはその効果がより大きく表れるため、結果として少量執行に対する MI 関数の concavity をより強めていると解釈出来る。[52] では、ある程度のボリュームの、しかしオーダーサイズと比較して急激過ぎない成行注文の到着は LOB を “hump-shaped” にし、結果として MI 関数を S 字型とする作用がある事が指摘されている。本節の分析における  $\lambda = 100$  の時の結果はこの指摘と整合的であると考えられる。

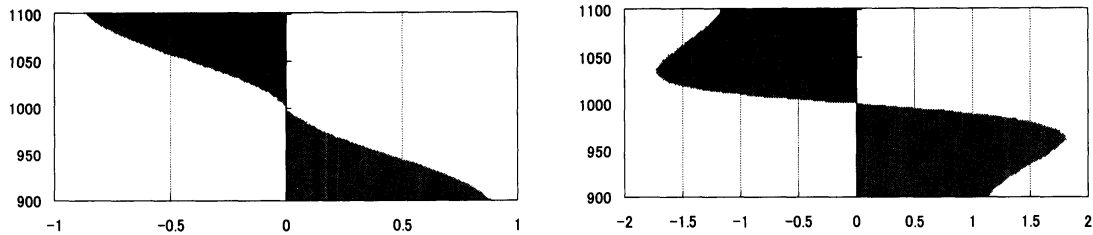


Figure 15: Forms of LOB in the case of (iii). Horizontal axes correspond to the volume of limit orders (positive: buying, negative: selling). Vertical axes correspond to price levels. Left:  $\lambda = 500$ . Right:  $\lambda = 100$ . Other parameters are set as  $\sigma = 0.05$  and  $\mu = 1000$ .

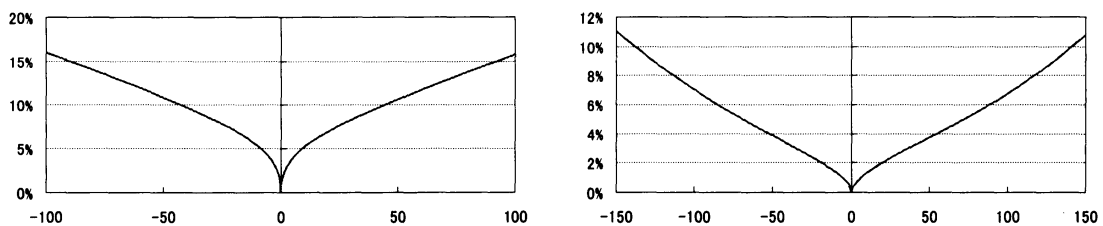


Figure 16: Forms of the MI function in the case of (iii). Horizontal axes correspond to execution volumes  $\psi$  (positive: buying, negative: selling). Vertical axes correspond to  $g_A(\psi)$ . Left:  $\lambda = 500$ . Right:  $\lambda = 100$ . Other parameters are set as  $\sigma = 0.05$  and  $\mu = 1000$ .

## 6.6 少量執行 MI 関数が convex となるケース

以上のいずれの分析においても、少量執行に対する MI 関数は concave な形状となる事が多かった。それでは、少量執行に対しても MI 関数が convex になるのはどのような場合であろうか。これまでに得られた結果から考察すると、「価格ボラティリティ  $\sigma$  が小さく」「指値注文到着に関する強度関数  $h$  の裾が薄く（かつ強度パラメーター  $\mu$  が大きく）」「成行注文到着の強度パラメーター  $\lambda$  が小さい」場合と推察される。そこで、パターン (iii) において  $\sigma = 0.005$ ,  $\mu = 1000$ ,  $\lambda = 1$  としてシミュレーションを行った結果が図 17 である。左図の LOB の形状を見ると、最良気配値に指値注文が集中している様子が見て取れる<sup>30</sup>。このような、非常に極端な状況でないと最良気配値近辺での MI 関数の convexity は表れにくい。言い換えれば、少量執行に対する MI は concave（あるいは linear）な形状が表れるのが自然であると考えられる。

## 7 Concluding Remarks

本論文では MI 関数の形状、特に convexity/concavity に焦点を当てて理論的及び実証的な観点から分析を行った。前章のシミュレーションベースの分析においても MI 関数の形状は S 字型、即ち少量執行では concave, 大量執行では convex となる傾向が見られ、これは 6 章で触れたよう

<sup>30</sup> 最良気配値から離れた部分の板は初期値  $(F_0(l))_l$  によるものである。

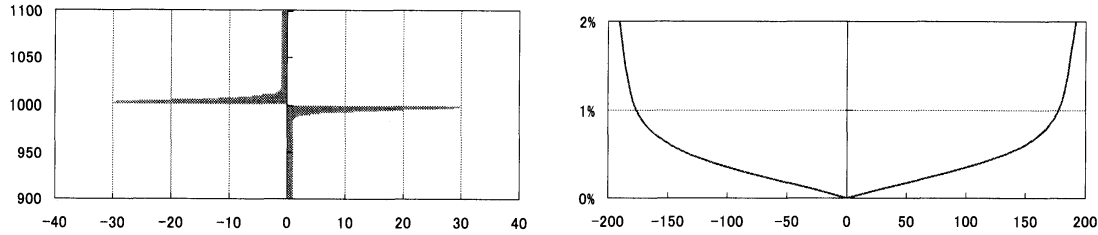


Figure 17: Forms of LOB (left) and the MI function (right) in the case of (iii). Parameter settings:  $\sigma = 0.005$ ,  $\mu = 1000$  and  $\lambda = 1$ .

に実証分析に関する先行研究の結果とも整合的である。但し、前章の分析におけるパラメーター設定は実際の市場と整合的とは限らず、適切な手法によってパラメーターの推定を行う事が望ましい。その際、[13] の手法をベースとして高頻度複数気配データによる推定を行う事が考えられるが、数理統計学的に適切な性質を持つ推定量を構築する事が今後の課題の一つとして考えられる。但し [13] では強度関数  $h^b$  に単調性が仮定されており、本論文で提案したモデルにおいてはこの仮定は適当ではないため、何らかの工夫をする必要がある。一つの方法として、ノンパラメトリック推定ではなく  $h^b$ ,  $h^a$  に関数形を当てはめた上でパラメトリック推定を行う事が考えられる。あるいは、最良気配から離れた価格帯のデータも用いる場合推定において  $Y_t$ ,  $\tilde{Y}_t$  の影響は軽微と考え、 $(h^b(k))_{k=0,1,2,\dots}$  及び  $(h^a(k))_{k=0,1,2,\dots}$  の推定のみを行う、という方法も検討の余地があると言える。

また、[31] や [33] では非線形 MI 関数として convex な形状のものを扱っていたが、S 字型 MI 関数においても同様に離散時間執行モデルの連続極限を導出する事は可能であると考えられる<sup>31</sup>。しかし、値関数の連続性や HJB 方程式による特徴付けが出来るかどうかは技術的な問題があり、まだ分かっていない。この部分に関して数学的構造を明らかにする事も今後の課題の一つである。

最適執行問題における理論的研究においては非線形 MI 関数を扱ったモデルはまだそれ程多くは無いが、ハイブリッド型等の LOB の構造を含んだ取引市場が近年増加している事 ([55])、及び我が国の株式市場においてはオーダードリブン型が一般的である事から、非線形な、特に S 字型のような構造を持った MI 関数を考慮した最適執行モデルの研究が今後ますます重要となると考えられる。

## References

- [1] Alfonsi, A. and Schied, A., Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions, *Quantitative Finance*, **10**(2) (2010), 143–157.
- [2] Alfonsi, A. and Schied, A., Optimal trade execution and absence of price manipulations in limit order book models, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **1**(1) (2010), 490–522.

<sup>31</sup> これらの論文で扱われているモデルは LOB を念頭に置いたものではないが、実際の市場で観測される現象と整合的な設定下でモデルを構築する事には意味があると考えられる。

- [3] Alfonsi, A., Schied, A. and Slynko, A., Order book resilience, price manipulation, and the positive portfolio problem, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **3**(1) (2012), 511–523.
- [4] Almgren, R., F. and Chriss, N. Optimal execution of portfolio transactions, *Journal of Risk*, **18** (2000), 57–62.
- [5] Almgren, R., Thum, C., Hauptmann, E. and Li, H., Direct estimation of equity market impact, Preprint (2005).
- [6] Avellaneda, M. and Stoikov, S., High-frequency trading in a limit order book, *Quantitative Finance*, **8**(3) (2008), 217–224.
- [7] Berstimas, D. and Lo, A., W., Optimal control of execution costs, *Journal of Financial Markets*, **1** (1998), 1–50.
- [8] Bouchaud, J. P., Mezard, M. and Potters, M., Statistical properties of stock order books: empirical results and models, *Quantitative Finance*, **2**(4) (2002), 251–256.
- [9] Breen, W. J., Hodrick, L. S. and Korajczyk, R. A., Predicting equity liquidity, *Management Science*, **48**(4) (2002), 470–483.
- [10] Buckley, I. R., C. and Korn, R., Optimal index tracking under transaction costs and impulse control, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **1**(3) (1998), 315–330.
- [11] Daniels, M. G., Farmer, J. D., Iori, G. and Smith, E., Demand storage market liquidity and price volatility, Working paper (2008).
- [12] Davis, M. and Norman, A., Portfolio selection with transaction costs, *Math. Oper. Res.*, **15** (1990), 676–713.
- [13] Delattre, S., Robert, C. Y. and Rosenbaum, M., Estimating the efficient price from order flow: a Brownian Cox process approach, *Stochastic Processes and their Applications*, **123** (2013), 2603–2619.
- [14] Farmer, J. D., Gerig, A., Lillo, F. and Waelbroeck, H., A new approach to understanding the market impact of large trading orders, Preprint (2008).
- [15] Forsyth, P. A., Kennedy, J., Tse, S. T. and Windcliff, H., Optimal trade execution: a mean-quadratic-variation approach, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **36**(12) (2012), 1971–1991.
- [16] Fujimoto, K., Nagai, H. and Runggaldier, W. J., Expected power-utility maximization under incomplete information and with Cox-process observations, *Appl. Math. Optim.*, **67** (2012), 33–72.
- [17] Fujimoto, K., Nagai, H. and Runggaldier, W. J., Expected log-utility maximization under incomplete information and with Cox-process observations, to appear in *Asia-Pacific Financial Markets*.

- [18] Gatheral, J., No-dynamic-arbitrage and market impact, *Quantitative Finance*, **10**(7) (2010), 749–759.
- [19] Gatheral, J. and Schied, A., Dynamical models of market impact and algorithms for order execution, *Handbook on Systemic Risk*, Eds Fouque, J. P. and Langsam, J., (2013), 579–602.
- [20] Gatheral, J., Schied, A. and Slynko, A., Transient linear price impact and Fredholm integral equations, *Mathematical Finance*, **22** (2011), 445–474.
- [21] Gould, M. D., Porter, M. A., Williams, S., McDonald, M., Fenn, D. and Howison, S., Limit order books, Preprint (2012).
- [22] Guéant, O., Lehalle, C-A. and Tapia, J. F., Optimal portfolio liquidation with limit orders, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **3**(1) (2012), 740–764.
- [23] Guéant, O., Lehalle, C-A. and Tapia, J. F., Dealing with the inventory risk: a solution to the market making problem, *Mathematics and Financial Economics*, **7**(4) (2013), 477–507.
- [24] He, H. and Mamaysky, H., Dynamic trading policies with price impact, Yale ICF Working paper, No. 00–64 (2001).
- [25] 久田 祥史・山井 康浩, 流動性リスク評価方法の実用化に向けた研究, 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー, 2000-J-3 (2000).
- [26] Holthausen, R. W., Leftwich, R. W. and Mayers, D., The effect of large block transactions on security prices: a cross-sectional analysis, *Journal of Financial Economics*, **19**(2) (1987), 237–267.
- [27] Ho, T. and Stoll, H. R., Optimal dealer pricing under transactions and return uncertainty, *Journal of Financial Economics*, **9**(1) (1981), 47–73.
- [28] Huberman, G. and Stanzl, W., Price manipulation and quasi-arbitrage, *Econometrica*, **72**(4) (2004), 1247–1275.
- [29] Huberman, G. and Stanzl, W., Optimal liquidity trading, *Review of Finance*, **9** (2005), 165–200.
- [30] Ishii, R., Optimal execution in a market with small investors, *Appl. Math. Finance*, **17** (2010), 431–451.
- [31] Ishitani, K. and Kato, T., Optimal execution for uncertain market impact: derivation and characterization of a continuous-time value function, *Recent Advances in Financial Engineering 2012: Proceedings of the International Workshop on Finance 2012*, Eds Takahashi, A., Muromachi, Y. and Shibata, T. (2012), 93–116.
- [32] Kato, T., When market impact causes gradual liquidation? : From the theoretical view of mathematical finance, *RIMS Kokyuroku*, **1675**, Financial Modeling and Analysis (FMA2009) (2010), 158–172.

- [33] Kato, T., An optimal execution problem with market impact, to appear in *Finance and Stochastics*.
- [34] Kato, T., An optimal execution problem in geometric Ornstein–Uhlenbeck price process, Preprint (2011).
- [35] Kato, T., Formulation of an optimal execution problem with market impact, *Proceedings of The 41th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems, Theory and Its Applications (SSS'09)* (2010), 235–240.
- [36] Lillo, F., Farmer, J. D. and Mantegna, R. N., Single curve collapse of the price impact function for the New York stock exchange, Working paper (2002).
- [37] Lions, P. L. and Lasry, J. M., Large investor trading impacts on volatility, *Paris–Princeton Lectures on Mathematical Finance 2004, Lecture Notes in Mathematics*, **1919** (2007), 173–190.
- [38] Liu, D., Measurement of the relationship between regional economic development and SME development, *The Journal of Quantitative & Technical Economics*, **5** (2004), 18–24.
- [39] Makimoto, N. and Sugihara, Y., Optimal execution of multi-asset block orders under stochastic liquidity, *IMES Discussion Paper Series No. 2010-E-25*, Bank of Japan (2010).
- [40] Maslov, S. and Mills, M., Price fluctuations from the order book perspective-empirical facts and a simple model, *Application of Physics in Economic Modelling*, **299** (2001), 234–246.
- [41] Matsumoto, K., Optimal portfolio of low liquid assets with a power utility function, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **10** (2002), 687–726.
- [42] Matsumoto, K., Optimal portfolio of low liquid assets with a log-utility function, *Finance and Stochastics*, **10** (2006), 121–145.
- [43] Merton, R. C., Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous time case, *Review of Economics and Statistics*, **51** (1969), 247–257.
- [44] Merton, R. C., Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model, *Journal of Economic Theory*, **3** (1971), 373–413.
- [45] 森谷 雅史, 低流動資産に関する対数効用最大化, 大阪大学大学院基礎工学研究科修士論文, 2013.
- [46] Morton, A. J. and Pliska, S. R., Optimal portfolio management with fixed transaction costs, *Mathematical Finance*, **5**(4) (1995), 337–356.
- [47] Nakase, Y., Private communication, Seminar on Dynamic Programming, CFA Society Japan, 2009.

- [48] Niemeyer, J. and Sandås, P., An empirical analysis of the trading structure at the Stockholm stock exchange, Stockholm school of economics, Journal of Multinational Financial Management, **3**(1993), 63–101.
- [49] Northfield Information Services, Inc., 取引コストモデル, テクニカルドキュメント (2010).
- [50] Obizhaeva, A. A. and Wang, J., Optimal trading strategy and supply/demand dynamics, Journal of Financial Markets, **16**(1) (2013), 1–32.
- [51] Predoiu, S., Shaikhet, G. and Shreve, S. E., Optimal execution in a general one-sided limit-order book, SIAM Journal on Financial Mathematics, **2** (2011), 183–212.
- [52] Roşu, S., The arbitrage theory of capital asset pricing, Journal of Economic Theory, **13**(3) (1976), 341–360.
- [53] Schied, A. and Schöneborn, T., Risk aversion and the dynamics of optimal liquidation strategies in illiquid markets, Finance and Stochastics, **13**(2) (2009), 181–204.
- [54] Shreve, S. E. and Soner, H. M., Optimal investment and consumption with transaction costs, Ann. Appl. Prob., **4**(3) (1994), 609–692.
- [55] 杉原 慶彦, 取引コストの削減を巡る市場参加者の取組み: アルゴリズム取引と代替市場の活用, 日本銀行金融研究所『金融研究』, **30**(2) (2011), 29–88.
- [56] 杉原 慶彦, 執行戦略と取引コストに関する研究の進展, 日本銀行金融研究所『金融研究』, **31**(1) (2012), 227–292.
- [57] Taksar, M., Klass, M. J. and Assaf, D., A diffusion model for optimal portfolio selection in the presence of brokerage fees, Math. Oper. Res., **13** (1988), 277–294.
- [58] Zovko, I. and Farmer, J. D., The power of patience: a behavioural regularity in limit-order placement, Quantitative Finance, **2** (2002), 387–392.

Division of Mathematical Science for Social Systems, Graduate School of Engineering Science  
 Osaka University, Toyonaka 560-8531, Japan  
 E-mail address: kato@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

大阪大学・大学院基礎工学研究科 加藤 恭