

等質ベクトル束上の不変微分作用素

日本女子大学 峰村 勝弘

対称空間上の不変微分作用素の同時固有函数の積分表示と
関連する話題について、多くの研究があるが、(例えば[1],
[4]を参照.) ここでは、リーマン対称空間上の等質ベクト
ル束上で類似の問題を考える。とくに帯球函数の類似物につ
いては美しい性質がある。

G を連結実半単純リー群で、中心有限なものとし、 K を G
の一つの極大コンパクト部分群、 $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ をそれぞれ G, K の
リー環とす。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ をカルタン分解、 $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ の一つの
カルタン部分空間、 $\mathfrak{f}$ を、 $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環とす
る。 Φ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ のルート系で $\Phi^+ = \{ \beta \in \Phi; \beta|_{\mathfrak{a}} \neq 0 \}$
とし、 $\Phi^- = \Phi \setminus \Phi^+$ とする。又 Σ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ のルート系とする。
compatible order を一つ固定し、 Σ, Φ の正負のルートの
部分集合をそれぞれ $\Sigma_{\pm}, \Phi_{\pm}$ とする。 $n_{\pm} = \sum \alpha^{\vee} (\alpha \in \Sigma_{\pm})$,
 $\rho = \frac{1}{2} \sum \alpha (\alpha \in \Sigma_+)$, $\rho_- = \frac{1}{2} \sum \beta (\beta \in \Phi^- \cap \Phi_+)$, $N_{\pm} = \exp n_{\pm}$,

$A = \exp \alpha$, $M = Z_K(\alpha)$, $\bar{M} = N_K(\alpha)$, $W_\pm = \bar{M}/M$ とおく.

簡単の為, 層商環 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, $U(\mathfrak{k}_\mathbb{C})$, $U(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$, $U(\mathfrak{n}_\pm)$ をそれぞれ

に $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}_\pm$ とかく. 岩沢分解 $G = KAN_+$ に

対応して $G \ni g = \kappa(g)e^{H(g)}n$ ($\kappa(g) \in K$, $H(g) \in \mathfrak{a}$) と

表わす. $\hat{K}$ は K の既約表現の全体を表わす. $(\tau, V) \in \hat{K}$ には

し, $\mathcal{J}_\tau$ を τ の微分表現の形におよぶ核とする. τ に同伴する

G/K 上のベクトル束 E の超函数切断の全体を $\mathcal{B}(E)$ と

する. 自然に $\mathcal{B}(E) \cong \{f \in \mathcal{B}(G) \otimes V; f(gk) = \tau(k^{-1})f(g)\}$ と

なり. M の有限次元表現 δ に同伴するベクトル束を F_δ と書き

$\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ に対して $P = MAN$ の表現 $\delta \otimes e^{-\lambda + \rho}$ に同伴する

G/P 上のベクトル束を $F_{\delta, \lambda}$ と書く. $\mathcal{B}(F_\delta)$, $\mathcal{B}(F_{\delta, \lambda})$

は $\mathcal{B}(E)$ と同様である. $\tau \in \hat{K}$ の M への制限 $\tau|_M$ によって

は $F_{\tau|_M}$, $F_{\tau|_M, \lambda}$ の代りに単に F_τ , $F_{\tau, \lambda}$ と書く.

$\mathcal{D}_\tau = \mathcal{D}_\tau(G/K)$ を, E 上の G -不変な微分作用素全体の

なす環とする. $\mu: \mathcal{G}^K \rightarrow \mathcal{D}_\tau$ を $D \in \mathcal{G}^K$ に対して

$$(\mu(D)f)(g) = f(g; D) \quad f \in \mathcal{B}(E), g \in G$$

で定めると μ は環準同型となる. $\mathcal{G}$ の自然な逆自己同型を

τ と書く.

Prop 1. μ は全射で: $\text{Ker } \mu = \mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}_\tau^T$. 従って

$$\bar{\mu}: \mathcal{G}^K / \mathcal{G}^K \cap \mathcal{G}\mathcal{J}_\tau^T \cong \mathcal{D}_\tau(G/K) \quad \text{と} \quad \text{なり.}$$

リーマン対称空間の函数の場合とほぼ同様に、次式でポアソン積分変換 $P_{\tau, \lambda}$ を定める. ([2] 参照)

Def. 1 $\varphi \in B(F_{\tau, \lambda})$ に対して

$$(P_{\tau, \lambda} \varphi)(g) = \int_K \tau(k) \varphi(gk) dk \quad (g \in G, \int_K dk = 1)$$

この時容易に

Lemma 1. $\varphi \in B(F_{\tau, \lambda})$ に対して

$$(P_{\tau, \lambda} \varphi)(g) = \int_K e^{-(\lambda + \rho)H(g^{-1}k)} \tau(k(g^{-1}k)) \varphi(k) dk$$

従って $P_{\tau, \lambda} \varphi$ は解析的関数 E 上の切断に属するといふことができる. 更に $P_{\tau, \lambda} \varphi$ は次に示すような固有函数的存在性を持つ. 以下に次の記号を導入する.

$R_{\tau} = \{(\delta, V_{\delta}) \in \hat{M}; [\tau, \delta] \geq 1\}$ とおく. $(\delta, V_{\delta}) \in \hat{M}$ に対して $H_{\delta} \in \text{Hom}_M(V_{\delta}, V)$ を表わす. M -同型

$$V \cong \bigoplus_{\delta \in R_{\tau}} V_{\delta} \otimes H_{\delta}$$

より

$$\text{End}_M V \cong \bigoplus_{\delta \in R_{\tau}} \text{End } H_{\delta}$$

$$F_{\tau, \lambda} \cong \bigoplus_{\delta \in R_{\tau}} (F_{\delta, \lambda} \otimes H_{\delta})$$

$$B(F_{\tau, \lambda}) \cong \bigoplus_{\delta \in R_{\tau}} (B(F_{\delta, \lambda}) \otimes H_{\delta})$$

を得る. $\text{End}_M V$ から $\text{End } H_{\delta}$ へのこの分解による射影を

$$\omega_\sigma : \text{End}_M V \rightarrow \text{End } H_\sigma$$

とある. $\#$ を A 上の $\#(H) = H + \rho(H)$ ($H \in \mathcal{O}$) により定まる自己同型写像とする.

Def. 2. $\omega : g^K \ni D \mapsto \omega(D) \in A \otimes \mathbb{R}^M$ を $D \equiv \omega(D) \pmod{\pi_+ g}$ で定め. $A \otimes \mathbb{R}^M \cong A \otimes \mathbb{R}^M$ により ω を g^K から $A \otimes \mathbb{R}^M$ への写像とみる. (このとき ω は単射環同型とみる.)

次の図式により $\omega_\tau, \omega_{\tau, \sigma}, \omega_{\tau, \sigma, \lambda}$ ($\sigma \in \hat{M}, \lambda \in \sigma_c^*$) を定める. (ここは e_λ は A の $\mathbb{C} \cap A$ の evaluation map.)

$$\begin{array}{ccccc}
 g^K & \xrightarrow{\omega} & A \otimes \mathbb{R}^M & \xrightarrow{\# \otimes \tau} & A \otimes \mathbb{R}^M \\
 & \searrow \omega_\tau & & \downarrow 1 \otimes \tau & \\
 & & & A \otimes \text{End}_M V & \\
 & \searrow \omega_{\tau, \sigma} & & \downarrow 1 \otimes \omega_\sigma & \\
 & & & A \otimes \text{End } H_\sigma & \\
 & \searrow \omega_{\tau, \sigma, \lambda} & & & \\
 & & \text{End } H_\sigma & \xleftarrow{e_\lambda} & A \otimes \text{End } H_\sigma
 \end{array}$$

$\text{Ker } \omega_\tau = g^K \cap g \mathcal{O}_\tau^T$ より $\chi_{\tau, \sigma, \lambda} \circ \mu = \omega_{\tau, \sigma, \lambda}$ とする. $\mathcal{O}_\tau$ の H_σ 上の表現 $\chi_{\tau, \sigma, \lambda}$ の唯一つ定まる.

$\mathcal{O}_\tau$ -module H_σ と G -module $\mathcal{B}(F_{\sigma, \lambda})$ のテンソル積は自然に G - $\mathcal{O}_\tau$ -module とする. $\exists$ 2つの $\mathbb{C}$ -アソシエイト $\rho_{\tau, \lambda}$ を $\mathcal{B}(F_{\tau, \lambda})$ の部分空間 $\mathcal{B}(F_{\sigma, \lambda}) \otimes H_\sigma$ への制限を $\rho_{\tau, \sigma, \lambda}$ とおけば

Lemma 2. $\mathcal{P}_{\tau, \sigma, \lambda}: \mathcal{B}(F_{\sigma, \lambda}) \otimes H_{\sigma} \rightarrow \mathcal{B}(E)$

$$\mathcal{P}_{\tau, \lambda}: \mathcal{B}(F_{\tau, \lambda}) \longrightarrow \mathcal{B}(E)$$

は共に G - $\mathbb{D}_c$ -準同型写像

Lemma 2. により, 同時固有函数の類似物として次の定義を下す.

Def. 3. $\mathcal{B}(F_{\sigma, \lambda})^{\tau} = \{ \varphi \in \mathcal{B}(F_{\sigma, \lambda}) ; \varphi \text{ は } K \text{ の左おりの作用で } \tau \text{ に従って変換する} \}$

$$= \{ \varphi \in \mathcal{B}(F_{\sigma, \lambda}) ; \varphi(g) = d(\tau) \int_K \overline{t_{\tau}(k)} \varphi(k'g) dk \}$$

$\mathcal{B}(E)^{\tau}$ についても同様とする.

容易に. $\mathcal{B}(F_{\tau, \lambda})^{\tau} = \bigoplus_{\sigma \in R_{\tau}} \mathcal{B}(F_{\sigma, \lambda})^{\tau} \otimes H_{\sigma}$

$$\mathcal{B}(F_{\sigma, \lambda})^{\tau} \cong V \otimes H_{\tau, \sigma} \quad (\text{但し } H_{\tau, \sigma} = \text{Hom}_{\mathcal{M}}(V, V_{\sigma}))$$

がわかる. $R(\mathbb{D}_c)$ で $\mathbb{D}_c$ の有限次元表現全体を表わす.

Def. 4. $(X, H) \in R(\mathbb{D}_c)$ に対し

$\mathcal{B}(E, X) = \{ f \in \mathcal{B}(E) ; f \text{ は } \mathbb{D}_c \text{ の } F \text{ で } X \text{ の高表現に従って変換する} \}$

$$\mathcal{B}(E, X)^{\tau} = \mathcal{B}(E, X) \cap \mathcal{B}(E)^{\tau}$$

$\mathcal{D}_E$ には Casimir 元からなる elliptic な作用素があるから
 $\mathcal{B}(E, X)$ の元は解析的にある。以下 $\mathcal{B}(E, X)$, $\mathcal{B}(E, X)^T$ の
 代りに $\mathcal{A}(E, X)$, $\mathcal{A}(E, X)^T$ と書く。Lemma 2. より 容易に次
 の Cor. を得る。

Cor. $\mathcal{P}_{\tau, \sigma, \lambda}$ は $\mathcal{B}(F_{\sigma, \lambda})$ の $H_{\sigma} \rightarrow \mathcal{A}(E, \mathcal{X}_{\tau, \sigma, \lambda})$ なる
 G -準同型を与える。

そこで, Def. 3.2 帯球函数の類似物 $\mathcal{A}(E, X)^T$ を定義したが,
 この場合には精密な結果がある。まず写像を二つ定義する。
 $(X, H) \in \mathcal{R}(\mathcal{D}_E)$ に對し, $\mathcal{D}_E \times \mathcal{A}(E, X) \ni (\Delta, f) \mapsto (\Delta f)(e) \in V$
 なる bilinear map. から得られる写像 $\mathcal{A}(E, X) \rightarrow V \otimes (\mathcal{D}_E / \text{Ker } X)^*$
 を S_X とする。従って, 任意の $\Delta \in \mathcal{D}_E$ と $f \in \mathcal{A}(E, X)$ に對し

$$\langle S_X(f), \Delta + \text{Ker } X \rangle = (\Delta f)(e)$$

と成る。次に, (X, H) が $(\mathcal{X}_{\tau, \sigma, \lambda}, H_{\sigma})$ の部分表現と仮定する。
 (実は任意の $(X, H) \in \mathcal{R}(\mathcal{D}_E)$ はある σ, λ に對し $(\mathcal{X}_{\tau, \sigma, \lambda}, H_{\sigma})$
 の部分表現として得られることがわかってゐる。) 自然な同
 型と埋込み

$$(\mathcal{D}_E / \text{Ker } X) \cong \text{Im } X \subset \text{End } H \cong H \otimes H^* \subset (H_{\tau, \sigma} \otimes H)^*$$

の転置として得られる全射 $H_{\tau, \sigma} \otimes H \rightarrow (\mathcal{D}_E / \text{Ker } X)^*$ を
 p_X と書く。

Th. 1. (X, H) は $(X_{\tau, \sigma, \lambda}, H_{\sigma})$ の部分表現である。(既約性仮定(存在).) $\Rightarrow$ α と β

$$\begin{array}{ccc} \beta(F_{\sigma, \lambda})^{\tau} \otimes H & \xrightarrow{\cong} & V \otimes H_{\tau, \sigma} \otimes H \\ \downarrow \beta_{\tau, \sigma, \lambda} & \text{surj.} & \downarrow \text{Id} \otimes \gamma_X \\ Q(E, X)^{\tau} & \xrightarrow[\text{inj}]{s_X} & V \otimes (\mathbb{D}_c / K_{\alpha} X)^* \end{array}$$

は可換である。特に $X = X_{\tau, \sigma, \lambda}$ の既約性より

$$\beta(F_{\sigma, \lambda})^{\tau} \otimes H \cong V \otimes H_{\tau, \sigma} \otimes H \cong Q(E, X)^{\tau}$$

Remark $V(\sigma, \lambda) \in \beta(F_{\sigma, \lambda})$ の K -finite vector 全体のなす空間である。 $\Rightarrow$ $H_{\sigma} \cong \text{Hom}_K(V^*, V(\sigma^*, -\lambda)) \cong V(\sigma^*, -\lambda)$ の G -既約性より H_{σ} は G^K -既約である。

次に $Q(E, X)$ の境界値をとるため、次のように $Q(E, X)$ と同型の空間を導入する。まず $(X, H) \in R(\mathbb{D}_c)$ の既約性仮定より、 H^* は X 上の trivial なベクトル束である、ベクトル束の τ - γ 積 $E \otimes H^*$ を考える。 $\beta(E \otimes H^*)$ は $\Delta \in \mathbb{D}_c$ に対し

$$\Delta_X(f \otimes a) = \Delta f \otimes a - f \otimes X(\Delta)^{\dagger} a \quad f \in \beta(E), a \in H^*$$

と $\Delta \in \mathbb{D}_c$ により $(\gamma - \text{環}) \mathbb{D}_c$ -module である。 $\exists \sim$

$$Q(E \otimes H^*, X) = \{F \in \beta(E \otimes H^*); \Delta_X F = 0 \quad \forall \Delta \in \mathbb{D}_c\}$$

と $\Delta \in \mathbb{D}_c$ 、既約性より $Q(E, X) \cong Q(E \otimes H^*, X) \otimes H$ である。 $\exists$ は G の中心である。 $\gamma \in \exists$ かつ $S(\exists_c)$ の中心 γ の Harish-

Chandra iso. がある. λ_σ は $\sigma \in M$ の highest weight がある.
容易に $\chi_{\tau, \sigma, \lambda}(Z) = \langle \chi(Z), \lambda - \lambda_\sigma - \rho \rangle \text{Id}$ となる.

以下, 次の仮定群 (A1)~(A3) の下で考えよう. 仮定の間の関係はよくわかっている. 写像 ω_τ による $\mathcal{G}^K$ の image の性質を詳しく調べる必要があるであろう. (τ, σ, λ と $\omega \in W_\Sigma$ を一組固定している)

$$(A1): \langle \lambda - \lambda_\sigma - \rho, \rho \rangle \neq 0 \quad \forall \rho \in \Phi$$

$$(A2): (i) \chi_{\tau, \sigma, \lambda} \text{ は既約}$$

$$(ii) \chi_{\tau, \sigma, \mu} \cong \chi_{\tau, \sigma, \lambda} \quad \text{if } \sigma \neq \omega_0 \sigma \quad \omega_0 \in W_\Sigma$$

$$\text{s.t.} \quad \delta = \omega_0 \sigma, \quad \mu = \omega_0 \lambda$$

$$(A3): \forall \alpha \in \Sigma_+ \text{ に対し } \tau - \frac{2\langle \omega \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \notin \{1, 2, 3, \dots\}$$

仮定 (A1)~(A3) の下で G -準同型写像

$$\tilde{\beta}_{\tau, \omega \sigma, \omega \lambda} : Q(E \otimes H_\sigma^*, \chi_{\tau, \sigma, \lambda}) \rightarrow B(F_{\omega \sigma, \omega \lambda}) \otimes \text{Hom}_{\mathbb{D}_\tau}(H_\sigma, H_{\omega \sigma})$$

が構成される. C は $\text{Hom}_{\mathbb{D}_\tau}(H_\sigma, H_{\omega \sigma}) \otimes H_\sigma^*$ の $H_{\omega \sigma} \cap$ の

縮約とし, $\beta_{\tau, \omega \sigma, \omega \lambda} = (\text{Id} \otimes C) \circ \tilde{\beta}_{\tau, \omega \sigma, \omega \lambda}$ とある.

同型 $Q(E, \chi_{\tau, \sigma, \lambda}) \cong Q(E \otimes H_\sigma^*, \chi_{\tau, \sigma, \lambda}) \otimes H_\sigma$ による

$\beta_{\tau, \omega \sigma, \omega \lambda}$ は $Q(E, \chi_{\tau, \sigma, \lambda})$ から $B(F_{\omega \sigma, \omega \lambda}) \otimes H_{\omega \sigma}$ への写像

とみる。 $w = e$ とする

Lemma 3. β は $A(E, \chi_{\tau, \sigma, \lambda})$ の $B(F_{w\sigma, w\lambda}) \otimes H_{w\sigma^{-1}}$ の G -準同型写像。 $\lambda < 1$ $w = e$ とする。ポアソン核

$$e^{-(\lambda + \rho)H(g^{-1}k)} \tau(k|g^{-1}k)$$

の $\beta_{\tau, \sigma, \lambda}$ による像は Dirac の delta 函数の定数倍と等しい。
 τ の定数 (行列) を $C(\tau, \sigma, \lambda)$ と定めると

$$\beta_{\tau, \sigma, \lambda} \circ P_{\tau, \sigma, \lambda} = \text{Id} \otimes C(\tau, \sigma, \lambda)$$

が成立する。

$\Rightarrow$ Lemma 3 の β は Th.2 の β と一致する

Th.2. 仮定 (A1) ~ (A3) ($w = e$) と $\det C(\tau, \sigma, \lambda) \neq 0$ の $F =$
 $P_{\tau, \sigma, \lambda}$ は $B(F_{\sigma, \lambda})$ の $A(E, \chi_{\tau, \sigma, \lambda})$ の π の G -同型と等しい。

参考文献

- [1] Kashiwara, Kowata, Minemura, Okamoto, Oshima and Tanaka;
 Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric
 space. Ann. of Math., 10, 1-39 (1978)
- [2] Okamoto, K.; Harmonic Analysis on Homogeneous

Vector bundles, Lecture Notes in Math., Vol. 266, pp. 255-271,
Springer-Verlag, 1972

[3] Mikemura, K. ; Invariant differential operators and
spherical sections of a homogeneous vector bundle, preprint

[4] Oshima, T. and Sekiguchi, J. ; Eigenspaces of Invariant
Differential Operators on an Affine Symmetric Space, Inventiones
math. 57, 1-81 (1980)