

一様軸対称性乱流中の Passive Scalar

東邦大医物理 中内紀彦(Norihiko Nakauchi)

大嶋 洋(Hiroshi Oshima)

斉藤善雄(Yoshio Saito)

1. はじめに

一様軸対称性乱流の理論的研究は Herring^{1,2)} や Nakauchi^{3,4)} らによってなされている。彼等は closure model を用い、一様軸対称性乱流の spectrum 構造を調べると同時に等方化の問題を調べた。Nakauchi and Oshima⁴⁾ は特に 2 次元乱流に近い非常に強い非等方性を持つ乱流の構造を調べた。又、実験的研究には、Lumley and Newman⁵⁾, Gence and Mathieu⁶⁾ らによる研究がある。特に Gence and Mathieu は対称軸方向の乱流エネルギー成分 $E_{33}(t)$ がそれに垂直なエネルギー成分 $E_{11}(t)$ に比べて大きい場合の等方化は、それと逆の場合よりも遅いことを指摘した。すなわち、 $III=16 [E_{33}(t)-E_{11}(t)]^2/9\langle q^2(t) \rangle$ によって定義される不変量 III の正負によって、等方化の進む速さに差異のあることを示した。この事実は Cambon⁷⁾ や我々⁴⁾ の研究によっても確かめられている。

速度場に関して興味ある問題は、温度のような passive scalar に対しても同様に興味ある問題である。乱流の非等方性が温度揺らぎに及ぼす効果を調べることは大気乱流等実際的な問題の基礎的研究としても意義がある。しかしながら

非等方性乱流中の scalar に関する研究は非常に少ない。わずかに, modified 0-4th-cumulant による我々の研究⁸⁾, Corrsin⁹⁾, Warhaft¹⁰⁾ 等の実験による研究が見られるだけである。Warhaft は格子乱流に strain を加えることにより一様軸対称な非等方性乱流を作り、その非等方性が温度揺らぎにおよぼす効果を調べた。そして温度揺らぎの減衰率が等方性乱流中におけるよりも大きくなることを見出した。この実験事実が我々の研究に対する動機の一つになっている。

我々は closure model の一つである eddy damped-quasi-normal Markovian (EDQNM) 近似を用い一様軸対称性乱流中の passive scalar の振舞を調べる。ただし、ここでは乱流中に scalar-flux が存在しない場合の研究に話を限ることにする。我々の興味は特に乱流の非等方性の強さと scalar 量の時間発展（減衰の速さ）との関係を調べることにあるが、不変量 III と scalar 場の減衰の速さとの関係にも注目する。数値計算例としては乱流の integral lengthscale に対応する初期 Reynolds 数 $Re_L=130$, Prandtl 数 $Pr=1$ の場合の結果を示す。

2. 一様軸対称性乱流のエネルギーおよび scalar variance に対するスペクトル

方程式

A. 基礎方程式

流体は非圧縮とし、スカラーは passive であるとする。非圧縮性流体の従う式は連続の式と Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_a} u_a(\vec{x}, t) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_a(\vec{x}, t) + u_j(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_j} u_a(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_a} p(\vec{x}, t) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_a(\vec{x}, t) \quad (2)$$

であり、passive scalar $\theta(\vec{x}, t)$ に対する発展方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(\vec{x}, t) + u_j(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_j} \theta(\vec{x}, t) = \chi \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \theta(\vec{x}, t) \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 ν 、 χ はそれぞれ流体の動粘性係数およびスカラー拡散係数である。

B. 一様軸対称乱流のエネルギー・スペクトル・テンソルおよびスカラーバリアン
ス・スペクトルに対するスカラー関数による表現

一様性乱流の速度 $u_a(\vec{x}, t)$ およびスカラー場 $\theta(\vec{x}, t)$ に対する2点2次相関は一般に

$$R_{ab}(\vec{r}, t) = \langle u_a(\vec{x}, t) u_b(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle \quad (4)$$

$$R(\vec{r}, t) = \langle \theta(\vec{x}, t) \theta(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle \quad (5)$$

のように書ける。ただし、ここでは scalar flux は存在しない場合に話しを限ることにする。すなわち cross correlation $\langle \theta(\vec{x}, t) u_a(\vec{x}', t) \rangle$ は存在しないものとする。Fourier 空間で (4) および (5) は

$$S_{ab}(\vec{k}, t) = \langle u_a(\vec{k}, t) u_b(\vec{p}, t) \rangle / \delta(\vec{k} + \vec{p}) \quad (6)$$

$$S(\vec{k}, t) = \langle \theta(\vec{k}, t) \theta(\vec{p}, t) \rangle / \delta(\vec{k} + \vec{p}) \quad (7)$$

のように書くことができる。 $R_{ab}(\vec{r}, t)$ 、 $R(\vec{r}, t)$ と $S_{ab}(\vec{k}, t)$ 、 $S(\vec{k}, t)$ は Fourier

変換

$$\begin{bmatrix} R_{ab}(\vec{r}, t) \\ R(\vec{r}, t) \end{bmatrix} = \int d\vec{k} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \begin{bmatrix} S_{ab}(\vec{k}, t) \\ S(\vec{k}, t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

で結ばれる。

一様軸対称な場に対し (6) および (7) は

$$S_{ab}(\vec{k}) = [\Delta_{ab}(\vec{k}) E(k, \mu) + \Delta_{a3}(\vec{k}) \Delta_{b3}(\vec{k}) F(k, \mu)] / 4\pi k^2, \quad (9)$$

$$S(\vec{k}) = G(k, \mu) / 4\pi k^2 \quad (10)$$

のように2つの変数 k および μ の関数 E , F および G を用いて表わすことができる。ここで、(9) 式の suffix 3 は対称軸方向 $\hat{z}$ の座標成分 X_3 を意味する。又、 k は波数ベクトル $\vec{k}$ の大きさであり、 μ は対称軸方向 $\hat{z}$ と $\vec{k}$ がなす角度の cosine である。

乱流の一次元エネルギースペクトル $E_{11}(k, t)$ および $E_{33}(k, t)$ は

$$\begin{aligned} E_{11}(k, t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 S_{11}(\vec{k}, t) d\mu = \frac{1}{2} \int_0^1 S_{22}(\vec{k}, t) d\mu \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 d\mu \{ E(k, \mu, t) + \mu^2 [E(k, \mu, t) + (1-\mu^2) F(k, \mu, t)] \}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{33}(k, t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 S_{33}(\vec{k}, t) d\mu \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 d\mu (1-\mu^2) [E(k, \mu, t) + (1-\mu^2) F(k, \mu, t)] \quad (12) \end{aligned}$$

の様に書くことができる。また, scalar variance スペクトル $G(k, t)$ は次のように表わすことができる。

$$G(k, t) = \int_0^l S(\vec{k}, t) d\mu = \int_0^l d\mu G(k, \mu, t). \quad (13)$$

物理空間における乱流の一次元エネルギー (単位体積当たり) $E_{11}(t)$, $E_{33}(t)$ および scalar variance $G(t)$ はそれぞれ

$$E_{11}(t) = E_{22}(t) = \frac{1}{2} \langle u_1^2(\vec{x}, t) \rangle = \int_0^\infty dk E_{11}(k, t), \quad (14)$$

$$E_{33}(t) = \frac{1}{2} \langle u_3^2(\vec{x}, t) \rangle = \int_0^\infty dk E_{33}(k, t), \quad (15)$$

$$G(t) = \langle \theta^2(\vec{x}, t) \rangle = \int_0^\infty dk G(k, t) \quad (16)$$

のように書くことができる。

C. Scalar variance spectrum $G(k, \mu, t)$ に対する発展方程式

EDQNM 近似によるエネルギースペクトル、 $E(k, \mu, t)$ および $F(k, \mu, t)$ に対する運動方程式は Nakauchi and Oshima⁴⁾ によってすでに得られている。スペクトル $G(k, \mu, t)$ に対する運動方程式は EDQNM 近似で次のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\chi k^2\right) G(k, \mu, t) = T_{GE}(k, \mu, t), \quad (17)$$

$$T_{GE}(k, \mu, t) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{dp dq}{pq} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \theta_g \{ [A_1 E(q, \mu'', t) + B_1 F(q, \mu'', t)] G(p, \mu', t) \\ + p^3 [A_2 E(q, \mu'', t) + B_2 F(q, \mu'', t)] G(k, \mu, t) \}. \quad (18)$$

EDQNM 近似において θ_g は、

$$\theta_g = \frac{1 - \exp \{ - [\chi(k^2 + p^2) + \nu q^2 + \lambda' (\hat{u}(k) + \hat{u}(p)) + \lambda'' \hat{u}(q)] t \}}{\chi(k^2 + p^2) + \nu q^2 + \lambda' (\hat{u}(k) + \hat{u}(p)) + \lambda'' \hat{u}(q)}, \quad (19)$$

$$\hat{u}(k) \equiv \left\{ \int_0^k dk' k'^2 \int_0^1 d\mu [E(k, \mu, t) + \frac{1}{2} (1 - \mu^2) F(k, \mu, t)] \right\}^{1/2}. \quad (20)$$

λ' 、 λ'' は任意定数であるが、ここでは等方性乱流中の等方性スカラーの研究において、最も実験事実と適合すると考えられる $\lambda' = 0$ 、 $\lambda'' = 1.3$ の値を採用することにする¹¹⁾。Geometric factors A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 は、

$$A_1 = (1 - y^2), \quad (21)$$

$$B_1 = (\mu + \mu'' y)^2, \quad (22)$$

$$A_2 = -(z + xy), \quad (23)$$

$$B_2 = (\mu + \mu'' y) (\mu' + \mu'' x) \quad (24)$$

で与えられる。ただし、 x, y, z は wavevector $\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}$ が作る三角形の内角の cosine であり、 μ', μ'' は wavevector $\vec{p}, \vec{q}$ が対称軸となす角度の cosine である。

$$X = \cos \alpha = (p^2 + q^2 - k^2) / (2pq), \quad (25)$$

$$y = \cos \beta = (q^2 + k^2 - p^2) / (2qk), \quad (26)$$

$$z = \cos \gamma = (k^2 + p^2 - q^2) / (2kp), \quad (27)$$

$$\mu' = -\mu z - \sqrt{(1-\mu^2)(1-z^2)} \sin \phi, \quad (28)$$

$$\mu'' = -\mu y + \sqrt{(1-\mu^2)(1-y^2)} \sin \phi. \quad (29)$$

波数 p, q の積分領域 Δ は与えられた k に対して、

$$|z| \leq 1 \quad (30)$$

で決まる領域である。(詳しくは Ref. 4 を参照。)

3. 結果

Scalar variance spectrum $G(k, \mu, t)$ に対する方程式(17)を乱流エネルギースペクトル $E(k, \mu, t)$ および $F(k, \mu, t)$ に対する方程式と共に適当な初期条件の下に数値的に解く。[E, F に対する方程式は Ref. 4 を参照。] $E(k, \mu, t)$ および $F(k, \mu, t)$ に対する初期値は表に示してある。Run 0 は等方性乱流の場合であり、Runs 2 と 3 は不変量 $III < 0$ の場合すなわち、 $E_{11}(t=0) > E_{33}(t=0)$ の場合であり、Runs 4 と 6 は逆に $III > 0$ [$E_{11}(t=0) < E_{33}(t=0)$] の場合である。Run 3 と 4 はそれぞれ非常に非等方性の強い場合の初期条件であり、二次元乱流および一方向流乱流状態に対応している。乱流の非等方性の強さの measure として対称

軸方向の速度成分に対する一次元エネルギー $E_{33}(t)$ とそれに垂直な速度成分による一次元エネルギー $E_{11}(t)$ との比

$$Re(t) = E_{33}(t) / E_{11}(t) \quad (31)$$

で示した。[Runs 4, 6 に対してはその逆数 $Re^{-1}(t) = E_{11}(t) / E_{33}(t)$ で示す。]

Gence and Mathiue⁶⁾ は不変量 III が正の場合、乱流の等方化の進む速さは III が負の場合よりも遅いことを実験のなかで示した。この結果は Cambon⁷⁾ や我々の先の一様軸対称性乱流の研究⁴⁾ によっても確かめられている。それゆえ不変量 III の正負が scalar 量にどのような効果をもたらすかは非常に興味のある問題である。

ここで示す数値計算例の乱流エネルギーの初期値の大きさは、全ての Run にたいして同じ値 $E(t=0) = \langle q^2(t=0) \rangle / 2 = 1.2$ である。動粘性係数は $\nu = 1/60$ であり、micro-scale および integral-scale に対応する初期レイノルズ数はすべての Run に対して $R_\lambda = 80$ 、 $R_L = 130$ である。図-1 に Run 3 と 4 の一次元エネルギー $E_{11}(t)$ と $E_{33}(t)$ の時間発展を、そして 図-2 には速度揺らぎの等方化の measure であるエネルギー比 $Re(t)$ が示してある。

Scalar variance spectrum $G(k, \mu, t)$ の初期値としては等方的な分布

$$G(k, \mu, t=0) = \bar{\Phi}(k) \quad (32)$$

を仮定する。ここで、

$$\bar{\Phi}(k) = 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} k^4 \exp(-2k^2) \quad (33)$$

である。我々の興味は等方的分布を持つ scalar 量が乱流の非等方性の影響をどのように受けるかを調べることに、そして、非等方化したスカラーが、乱流の等方

化とともに、再びどのように等方化してゆくのかを調べることにある。

A. Scalar 場の等方化

図-3 に見られるように $G(k, \mu, t)$ の分布の仕方は不変量 III の正負によりかなり対照的である。すなわち、 $III > 0$ の場合 $G(k, \mu, t)$ の μ 依存性は μ が 0 に近い程その値が大きく、 μ が 1 に近い程小さくなる。一方、 $III < 0$ の場合時間の経過と共に $G(k, \mu, t)$ の μ 依存性は $III > 0$ の場合と逆になる。

Scalar 場の非等方性の強さの measure の一つとして、対称軸方向およびそれに垂直な方向の diffusion rate

$$R_{\varepsilon_\theta}(t) = \varepsilon_{33}^\theta(t) / \varepsilon_{11}^\theta(t) \quad (34)$$

が考えられる (図-4)。ここで

$$\varepsilon_{11}^\theta(t) = - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \langle \theta^2(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^1 dk d\mu k^2 (1 - \mu^2) G(k, \mu, t), \quad (35)$$

$$\varepsilon_{33}^\theta(t) = - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \langle \theta^2(\vec{x}, t) \rangle = \int_0^\infty \int_0^1 dk d\mu k^2 \mu^2 G(k, \mu, t). \quad (36)$$

時間の経過と共に $R_{\varepsilon_\theta}(t)$ は 1 に近い一定値に漸近する。すなわち乱流の等方化に伴い scalar 量も等方化するが、等方化の速さは $III < 0$ の場合の方が、逆の $III > 0$ の場合よりも速い。また、 $G(k, \mu, t)$ の分布から予想されるように、不変量が $III > 0$ の場合 $R_{\varepsilon_\theta}(t)$ は 1 より小さな値に漸近するのに対し、 $III < 0$ の場合は逆に 1 より僅かに大きな値に漸近する。

B. 乱流の非等方性の強さとスカラー量の減衰率

Warhaft は温度揺らぎの減衰率が等方性乱流中におけるよりも非等方性乱流中で大きくなることを格子乱流を用いた実験において示した。この事実を調べるためにまず scalar variance $G(t) = \langle \theta^2(t) \rangle$ の時間発展を図-5 に示す。時間 $t = 10$ あたりで $\langle \theta^2(t) \rangle$ の減衰の仕方はすでに t のべき法則に従っているが、非等方性の強い場合ほどその直線の勾配は急になっていることが分かる。さらに、図-6 には減衰の特徴的な time scale

$$m(t) = t \xi^{\theta}(t) / \langle \theta^2(t) \rangle \quad (37)$$

を示した。ここで、 $\xi^{\theta}(t)$ はスカラーの減衰率 $\xi^{\theta}(t) = -d\langle \theta^2(t) \rangle / dt$ である。 $m(t)$ は $\langle \theta^2(t) \rangle \propto t^{-m}$ であるときその指数 m に等しい。 $m(t)$ の値は乱流の非等方性の度合いが大きい場合程大きいことが分かる。これらの事実は Warhaft が彼の実験で示したように、scalar の減衰率は明らかに強い非等方性乱流中において大きいことを示している。しかしながら、スカラーの減衰率は不変量 III にはあまり依存しないように見える。最後に乱流の減衰に対する特徴的な time scale $n(t)$ に対するスカラーの time scale $m(t)$ との比

$$r(t) = m(t) / n(t) \quad (38)$$

を図-7 に示す。ここで、 $n(t)$ は

$$n(t) = 2t \xi(t) / \langle q^2(t) \rangle \quad (39)$$

で定義される量である。 $\xi(t)$ は乱流の減衰率 $\xi(t) = -d\langle q^2(t) \rangle / 2 / dt$ である。 $n(t)$ は乱流のエネルギー $E(t) = \langle q^2(t) \rangle / 2$ が t^{-n} のようにべき減衰するときそ

の指数 n に等しい。この $r(t)$ も $t=10$ あたりでは乱流の強さに強く依存していることが分かる。すなわち、乱流の非等方性が強い程、スカラーの減衰率は大い。しかしながら長い時間の経過の後 $r(t)$ は乱流の強さに関係なく 1 よりもわずかに大きいある一定値に近づくことをわれわれの結果は示しているように思われる。

References

- 1) J.R.Herring, Phys. Fluids 17, 859(1974).
- 2) U.Schumann and J.R.Herring, J.Fluid Mech. 76,755(1976).
- 3) N.Nakauchi, J.Phys.Soc.Jpn. 53,1682(1984).
- 4) N.Nakauchi and H.Oshima, Phys.Fluids,30,3653(1987).
- 5) L.Lumley and G.R.Newman, J.Fluid Mech. 82,161(1977).
- 6) J.N.Gence and J.Mathieu, J.Fluid Mech. 101,555(1980).
- 7) C.Cambon, D.Jeandel, and J.Mathieu, J.Fluid Mech. 104,247(1981).
- 8) N.Nakauchi and S.Sega, Phys.Fluids,30,337(1987).
- 9) R.R.Mills and S.Corrison,, N.A.S.A. Memo.no.5-5-59W (1959).
- 10) Z.Warhaft, J.Fluid Mech. 99,545(1980).
- 11) J.R.Herring, D.Schertzer,M.Lesieur, G.R.Newman,J.P.Chollet,and
M.Larcheveque, J.Fluid Mech. 124,411(1982).

RUN	$E(k, \mu, t=0)$	$F(k, \mu, t=0)$	$E_{33}(0) / E_{11}(0)$
0	$\frac{4}{5} \Phi(K)$	0	1
2	$\frac{135}{85} (1 - \mu^2) \Phi(K)$	$-\frac{174}{85} \Phi(K)$	$\frac{1}{8}$
3	$12\delta(\mu) \Phi(K)$	$12\delta(\mu) \Phi(K)$	0
4	0	$-12\delta(\mu) \Phi(K)$	∞
6	0	$\frac{12}{5} \Phi(K)$	8

表. 初期値.

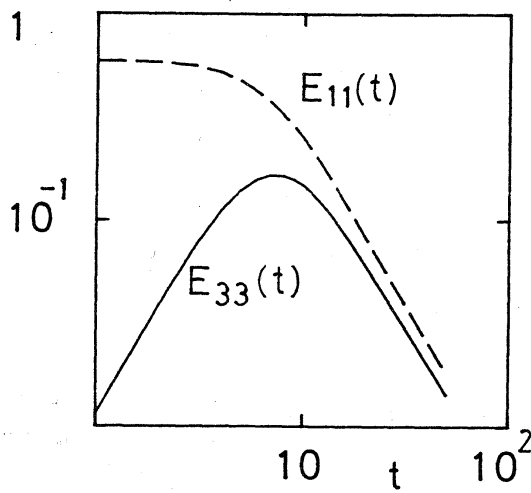


図-1(a). 一次元エネルギーの時間発展 (RUN 3).

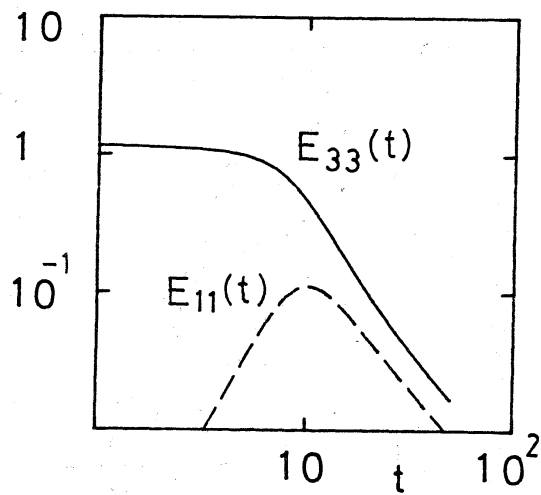
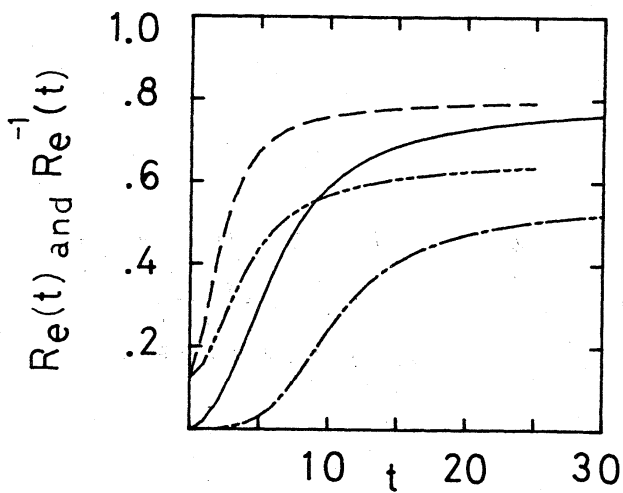


図-1(b). 一次元エネルギーの時間発展 (RUN 4).

図-2. エネルギー比 $Re(t)$ の時間発展.

$$Re(t) = \frac{E_{33}(t)}{E_{11}(t)}, \quad (\text{RUN } 2, 3)$$

$$Re^{-1}(t) = \frac{E_{11}(t)}{E_{33}(t)}, \quad (\text{RUN } 4, 6)$$

--- ; RUN 2, — ; RUN 3,
 - · - ; RUN 4, - - - ; RUN 6.

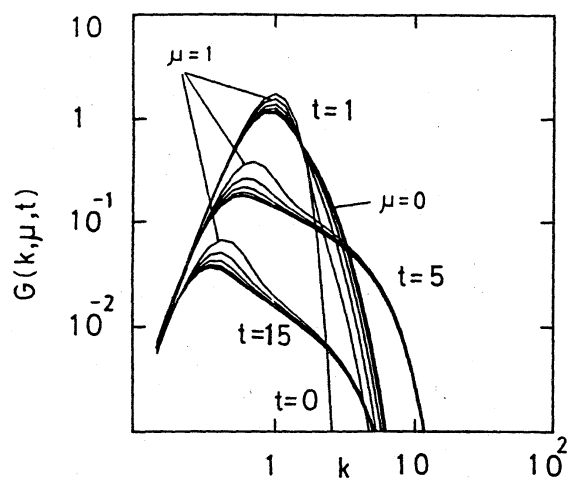


図-3 (a). $G(k, \mu, t)$ の μ 依存性
(RUN 2).

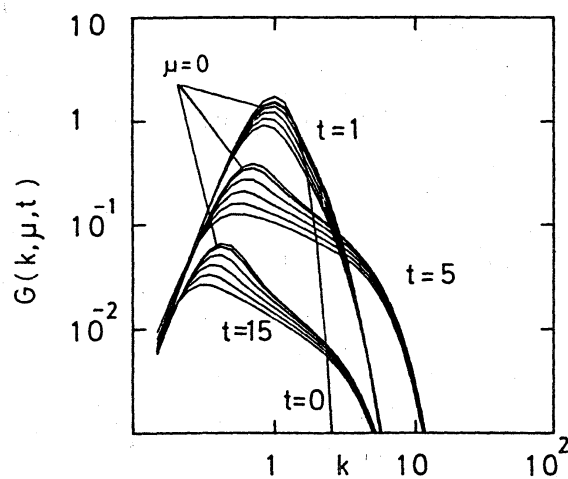


図-3 (b). $G(k, \mu, t)$ の μ 依存性
(RUN 6).

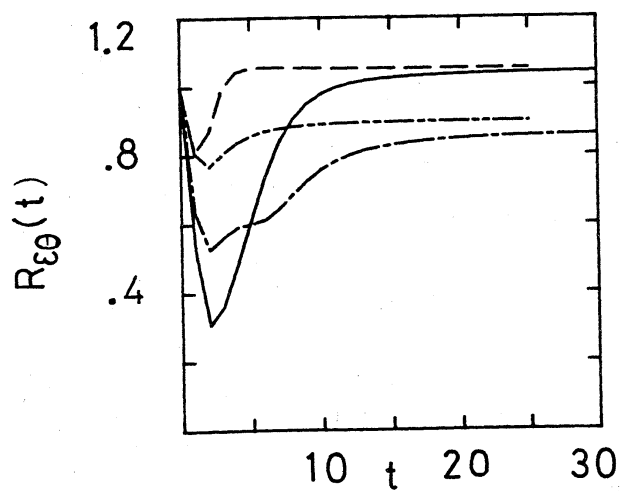


図-4. スカラー場の diffusion rate.

$$R_{\epsilon \theta}(t) = \frac{\epsilon_{33} \theta(t)}{\epsilon_{11} \theta(t)}$$

線の区別は図-2と同じ.

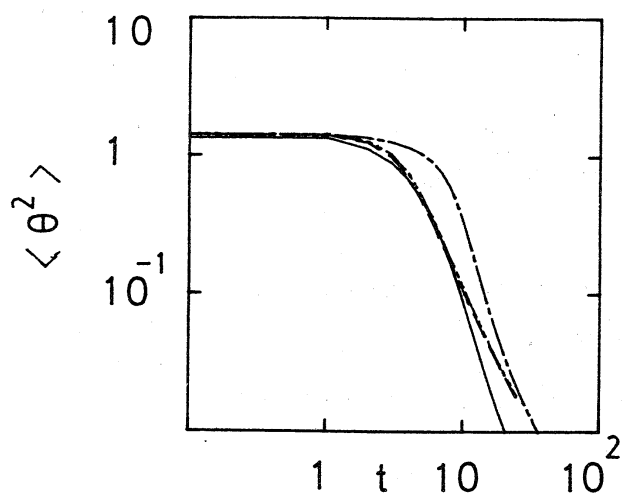


図-5. スカラー・バリエンス $\langle \theta^2(t) \rangle$.
線の区別は図-2と同じ.

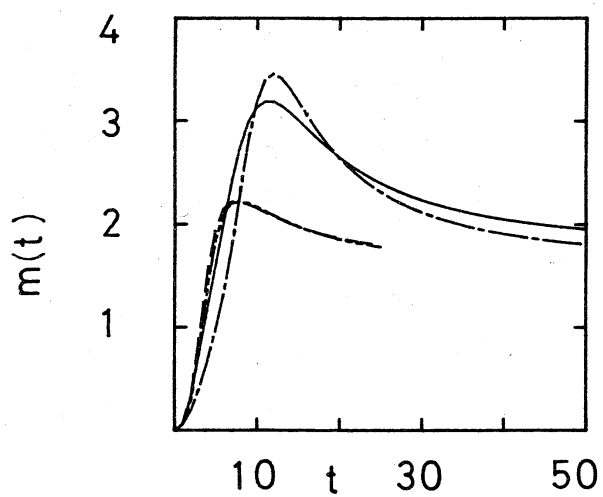


図-6. $m(t)$ の時間発展.

$$m(t) = \frac{t \varepsilon \theta(t)}{\langle \theta^2(t) \rangle}$$

線の区別は図-2と同じ.

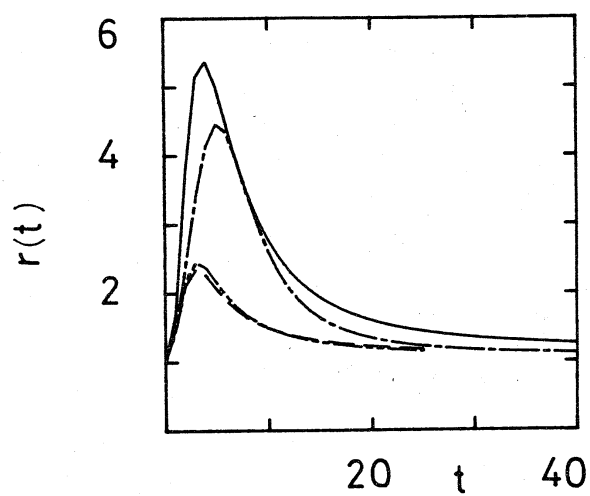


図-7. $r(t)$ の時間発展.

$$r(t) = \frac{m(t)}{n(t)}$$

線の区別は図-2と同じ.