

フラクタルによる自由曲面シェルのツリー型支持構造の形態創生法

SHAPE GENERATION OF TREE-TYPE SUPPORT STRUCTURE
OF FREE-FORM SHELL USING FRACTAL GEOMETRY

崔 京 蘭*, 周 广 春**, 大崎 純***

Jinglan CUI, Guangchun ZHOU and Makoto OHSAKI

An optimization method is presented for design of tree-type frames as supporting structures of free-form shells. A unified algorithm for modeling complex external boundary as well as the internal boundary is presented utilizing the B-spline curves of orders with odd numbers. An algorithm for generating tree-type frame is presented based on iterative function system (IFS) of fractal geometry. The type of branching of the tree is selected from the list of preassigned types. Formulations of sensitivity analysis are presented for total strain energy with respect to the nodal coordinates including those constrained on the shell surface. It is demonstrated in the numerical examples that the nodal locations of the tree-type support structure can be optimized to minimize the total strain energy of the structure including the roof and support frame. It is shown that the strain energy due to bending deformation is mainly reduced through optimization; thus, an ideal load path utilizing axial forces to the ground is achieved.

Keywords : fractal geometry, B-spline curve and surface, tree-type structure, free-form shell

フラクタル, B-スプライン曲線・曲面, ツリー型構造, 自由曲面シェル

1. はじめに

建築の設計・生産技術の進歩により、複雑な形状を有する構造物を実現できるようになってきた。とくに、自由曲面シェルは、解析的ではない（数式で表現できない）形状を表現することができるため、最近になって多くの建築家が、構造技術者との協調により、さまざまな形態の大空間構造物を設計している。

自由曲面シェルの実現可能性に関しては、曲面自体が持っている力学性能のみではなく、それを支える支持構造の合理的な形状や配置も重要である。そのため、支持構造の形態の最適化は曲面の最適化と同様に重要である。

ツリー型支持構造は、1960年代にドイツの建築家・構造家 Frei Otto により提案された構造形式であり、シュツットガルト空港²⁾などで実現された。その後、多くのツリー型構造が建設されている。代表例として、ロンドン・スタンステッド(Stansted)空港、リスボン・オリエンテ(Oriente)駅、ムンバイ・トテ(Tote)レストランなどが挙げられる。しかし、これまでに設計された建築のツリー型構造は、自然の形態を模倣した建築理念と感性的な建築思想を出発点としているが、構造合理性の観点から「力の自然な流れ」を十分に

反映しているとはいえない。

一方、生物の特性を模倣して人工物を設計するバイオミメティクス(biomimetics)³⁾は、人工生命⁴⁾とともに古くから存在する概念であるが、最近になって、高度な計算機技術と生産技術とともに実用化されるようになった。建築の分野でも、構造、計画、環境のさまざまな領域で研究されている^{5,6)}。

力学合理性を考慮してツリー型支持構造の形態を求めるため、さまざまな手法が提案されている。Kolodziejczyk⁷⁾は湿糸を、von Buelow⁸⁾は干し糸をモデルとして逆吊り実験を通じて合理的なツリー形状を求めた。また、von Buelow⁹⁾は遺伝的アルゴリズム(GA)を利用して合理的なツリー形状を生成する方法を研究し、Hunt ら¹⁰⁾は骨組の節点をピン節点に変化させることで不安定構造に変換し、軸力のみで荷重を伝達するツリー型構造の形状生成方法を提案した。しかし、これらの研究では、トポロジー（枝の接続関係）をあらかじめ指定することを前提としており、理想的な形状を求めることは難しい。また、上部のシェル構造の形状も含めた全体構造の特性を考慮していない。Cui and Jiang¹¹⁾は、ツリー形状の節点と枝要素の断面積に関する感度係数の性質を利用して、構造全体のひずみエネ

* 京都大学大学院工学研究科建築学専攻大学院生 修士

** ハルビン工業大学工学部建築学科 教授・Ph.D.

*** 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・博士(工学)

Grad. Stud., Dept. of Architecture and Architectural Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University, M.Sc.

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Harbin Institute of Technology, Ph.D.

Prof., Dept. of Architecture and Architectural Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University, Dr.Eng.

ルギーを最小化することでツリー型構造の形状，トポロジーと断面積を同時に最適化する方法を提案した。

パイオミメティクスあるいは人工生命のさまざまな手法の中で，Mandelbrot が提案したフラクタル幾何学は，自然のツリー形状を表現できる理論であり，ツリー型支持構造の初期形状を生成するために用いることができる¹²⁾。

本論では，大空間を覆う建築構造物の視覚的な効果，構造全体の力学的な合理性への進化可能性などを考慮して，ツリー型支持構造の形態を創生する方法を提案する。フラクタルによるツリー構造のモデル化に加えて，パラメトリック曲線¹³⁾による境界と開口部の形状表現手法も提案する。また，数値計算例を通じて，構造全体のひずみエネルギーを最小化するようなツリー構造の最適形状を求めて，その特性を考察する。

2. ツリー型支持構造の初期形状の生成法

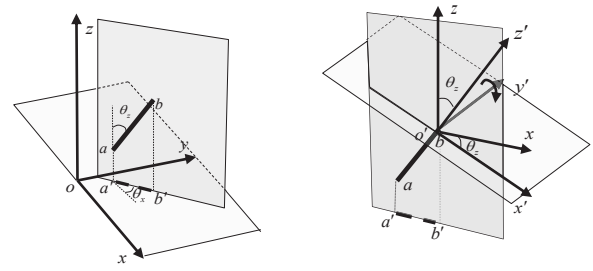
ツリー構造は，通常一本の幹から数回の枝分岐を通じて徐々に広がり，多くの末端が生じる。自然界のツリー形状は複雑であり，形式も多様であるが，自己相似性や分岐による枝の長さや太さの縮小などの特徴を持っており，分岐タイプにも規則がある。このようなツリー形状は，フラクタル幾何学を利用することによって表現できる。本節では，フラクタル幾何学に基づき，座標変換，分岐文法，枝の長さや太さの縮小率設定などの一連の操作によって3次元ツリー構造の最適化のための初期形状の生成法を提案する。

フラクタル幾何学の方法には，Lindenmayer System (L-System, LS)¹⁴⁾による方法と，Iterated Function System (IFS)¹⁵⁾による方法があり，本論ではIFSを用いる。IFSは再帰的関数による方法であり，例えば平面図形を生成するためには，式(1)のような座標 (x, y) を (x', y') に変換するアフィン変換を再帰的に用いる。

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで， a, b, c, d, e, f は係数である。

3次元空間内のアフィン変換を用いてツリー構造の枝を生成する。全体座標系を (x, y, z) ，局所座標系を (x', y', z') とする。図1(a)に示すように，枝分岐の過程での枝 ab の xy 平面への正射影を $a'b'$ とし， $a'b'$ と x 軸の角度を θ_x ，枝 ab と z 軸の角度を θ_z とする。全体座標系 (x, y, z) の原点を枝 ab の先端 b の位置 (x_b, y_b, z_b) へ平行移動し，さらに z 軸まわりに θ_x ， y 軸まわりに θ_z 回転して，図1(b)に示すような新しい局所座標系 (x', y', z') を得る。この局所座標系は，枝 ab の先端 b



(a) 全体座標系での枝位置 (b) 枝先端での局所座標系

図1 枝先端での座標変換

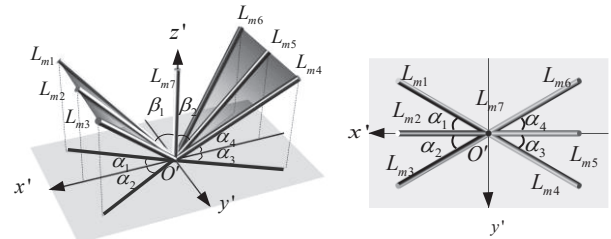


図2 枝分かれ可能な方向

を原点とし，枝 ab を z' 軸としたものであり， x' 軸は枝 ab とその正射影 $a'b'$ が成す平面上にある。これらの操作は以下のアフィン変換式(2)によって行うことができる。

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{Bmatrix} \quad (2)$$

枝ごとに生成した局所座標系を用いて枝分岐操作を行う。局所座標 (x', y', z') において新しい枝を生成可能な方向 $Lm1, \dots, Lm7$ を図2に示す。 β_1 と β_2 はそれぞれ $Lm1, Lm3$ と $Lm4, Lm6$ の $x'z'$ 平面への正射影あるいは $x'z'$ 平面上にある $Lm2$ と $Lm5$ が z' 軸となす角度である。 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ はそれぞれ $Lm1, Lm3, Lm4, Lm6$ の $x'y'$ 平面への正射影が x' 軸となす角度であり， $Lm2$ と $Lm5$ の $x'y'$ 平面への正射影は x' 軸上にある。初期形状を形成する際，幹からの1回目の分岐では， $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ をそれぞれ $30^\circ, 30^\circ, 15^\circ, 15^\circ, 15^\circ, 15^\circ$ とする。

また，枝の長さ L と断面積 s も分岐によって縮小されるので，これらの縮小率 γ, ρ を以下のように指定する。

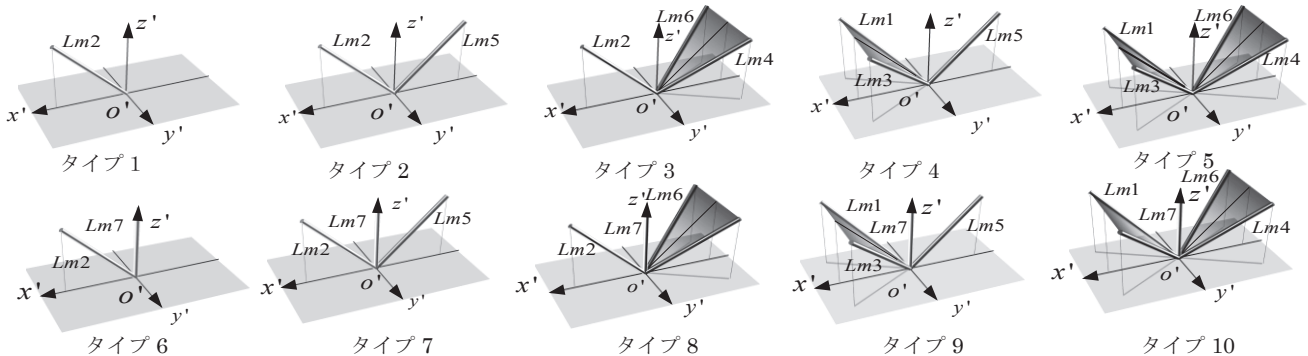


図3 枝分岐タイプ

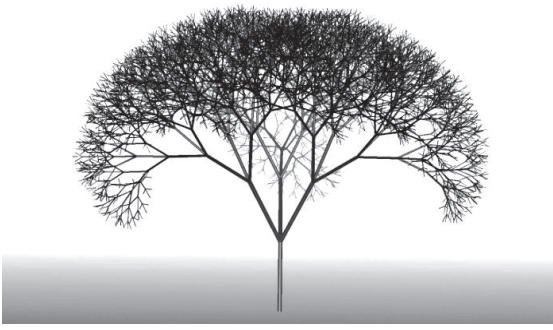


図4 ツリー形状の例

$$\begin{cases} L^{(k+1)} = \gamma L^{(k)}, & (0 < \gamma < 1) \\ s^{(k+1)} = \rho s^{(k)}, & (0 < \rho < 1) \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 k は分岐のステップ数である。

新しい枝は、 $Lm1$ から $Lm7$ を組み合わせて、図3のような10種類の枝分岐形状タイプから選択できる。例えば、5段階の分岐において、1, 2, 3, 4, 5段階でそれぞれタイプ3, 4, 4, 5, 3を用いるとき、ツリー形状生成文法を $A=(3, 4, 4, 5, 3)$ で定義する。図4は8回の分岐で $A=(3, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 4)$ としたときの結果であり、部材長と直径の標準値をそれぞれ7.5m, 0.15m, 部材長と面積の縮小率をそれぞれ $\gamma=0.7$, $\rho=0.8$ としている。図より、自然のツリー形状を良好に模擬していることが分かる。通常 $0.5 \leq \gamma \leq 0.8$, $0.65 \leq \rho \leq 0.85$ 範囲で設定すれば良好なツリー形状を形成させることができる。

ところが、上記の規則を単純に適用すると、各段階の分岐により徐々にツリーが広がることによって、下に向かう枝が多くなる。このような現象は、自然を表現するという面からみると良い現象であるが、建築の支持構造として利用するという面からは望ましくない。新しい枝の角度 $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ は、ツリー上部に向かって広がる幅と関係あり、生成しようとするツリー形状の特徴にしたがって定める必要がある。そのため、全体座標系 (x, y, z) の z 軸と局所座標系の z' 軸の角度 θ_z を求めて、次式のように β_1 が $90^\circ - \theta_z$ を超えないように制約する。

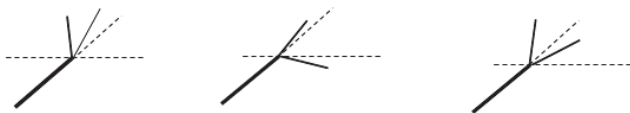
$$\beta_1 = \eta(90^\circ - \theta_z) \quad (0 < \eta < 1.0) \quad (4)$$

さらに、 β_1 と β_2 の和 $\beta_0 = 60^\circ$ を式(3)のように事前に与えて、 β_1 から β_2 を求める。

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta_0 \quad (5)$$

さまざまツリー形状を生成した結果から、 β_0 と η は $45^\circ \leq \beta_0 \leq 70^\circ$, $0.3 < \eta < 0.7$ の範囲で設定するのが適切である。

以上の操作により、図5(a), (b)のような不合理な分岐や下へ向う枝が排除でき、図5(c)のような上に向かう枝によって上部の曲面構造との交差が保証できる。



(a) 不合理な分岐 (b) 下に向かう枝 (c) 枝方向の改善

図5 分岐生成の改善方法

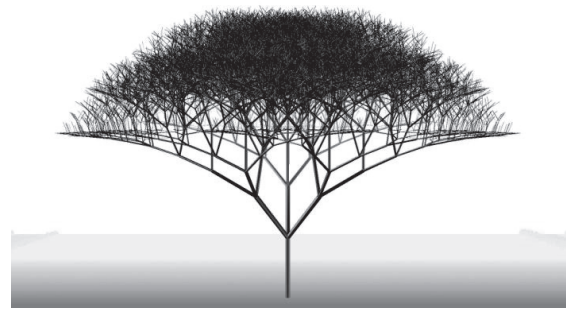


図6 修正されたツリー形状の例

図6は、図4と同じ文法 $A=(3, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 4)$ とパラメータ値を用い、式(5), (6)にしたがってツリー形状を生成した例である。 $\eta=0.7$ であり、枝全体は上部に向かって広がり、下に向かう枝は生じないことが確認できる。

以上より、次のようなアルゴリズムによってツリー構造の初期形状を生成する。

1. ツリーの数、各ツリーの支点座標、枝の分岐回数 n 、初期の枝の長さ L 、長さの縮小率 γ 、部材断面積の縮小率 ρ を定める。
2. 各ツリーについて、支点から鉛直方向に長さ L の枝を生成する。
3. 全ての枝の端点から、分岐タイプと式(4), (5)にしたがって新しい枝を生成する。
4. 分岐後の枝の長さを γ 倍、断面積を ρ 倍して、全ての枝の端点に対して2, 3の操作を繰り返す。新しい端点が次節で定義する曲面の上にあれば、その枝の分岐を終了する。

3. 自由曲面シェルのツリー型支持構造の初期形状

本論では、曲面構造は意匠性や建築計画の要求によって定められるものとし、ツリー型支持構造のみ最適化する。本節では、自由曲面シェルの形状生成法について述べる。

3.1 平面境界の設定

自由曲面シェルの平面領域の境界は、不規則な複数の曲線で表現され、各境界は直線、曲線など多種類の線で構成されるのが一般的である。このような境界は、B-スプライン関数を利用してモデル化できるが、区間ごとに異なる次数の曲線を表現できるように拡張する必要がある。また、内部に開口部がある場合には、閉曲線の数は2以上になる。

B-スプライン曲線のデータ点の数 n 、端点条件の数 q 、次数 m とノットの数 s の間には、 $s=n+q+m+1$ の関係がある。また、端点で、 $m+1$ 個のノットを重複させる必要がある。したがって、次数を奇数 $2\hat{m}-1$ とし、 $2\hat{m}-2$ 個の端点条件を与えれば、内部のノットの数 $n+(2\hat{m}-2)+(2\hat{m}-1)+1-2 \times 2\hat{m}=n-2$ となる。このようにして、ノットの数 n を内部のデータ点の数に等しくして、ノットとデータ点を一致させることができる。また支持点などの固定点をデータ点に含ませるように、あるいは、平面境界が最大範囲を越えないようにコントロールすることができる。

平面境界が N 個の閉曲線で構成され、 i 番目の閉曲線は、次数の種類によって M_i 個の区間を持っているものとする。閉曲線 i の区間 j の次数を $2m_{ij}-1$ とし、境界曲線をB-スプライン関数を拡張した式

(6)で表現する。

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \sum_{k=S_{ij}}^{T_{ij}} c_k^x B_{k,2m_{ij}}(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \sum_{k=S_{ij}}^{T_{ij}} c_k^y B_{k,2m_{ij}}(t) \end{cases} \quad (6)$$

ここに、 S_{ij} は閉曲線 i 区間 j の最初の基底関数の番号であり、最後の基底関数の番号は $T_{ij} = S_{ij} + 4m_{ij} - 3$ である。 c_k^x 、 c_k^y は $B_{k,2m_{ij}}(t)$ の線形結合係数である。 $B_{k,2m_{ij}}(t)$ は t をパラメータとした B-スプライン基底関数 (B-spline basis function) であり、Cox de Boor の漸化式¹⁶⁾により求めることができる。

外部境界と内部境界を区別するため、外部境界は時計回りに、内部境界は反時計回りにデータ点番号を付ける。境界は閉曲線であるため、各閉曲線の始点と終点が重なっているが、終点には始点と異なる番号を付ける。

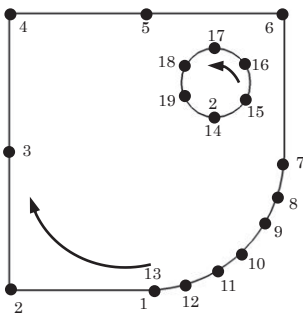


図7 境界のデータ点番号

図7の例では、1つの外部境界と1つの内部境界があり、外部閉曲線は時計回りに1から13までのデータ点で構成されている。そのうち1から7までは線形区間であり、7から13までは曲線区間であることから外部閉曲線は2つの次数の曲線で表現されることが分かる。内部境界は14から20までのデータ点で構成されているが、外部境界と異なり反時計回りに番号がつけられており、1つの曲線区間のみである。また、内部境界には周期条件を与える。

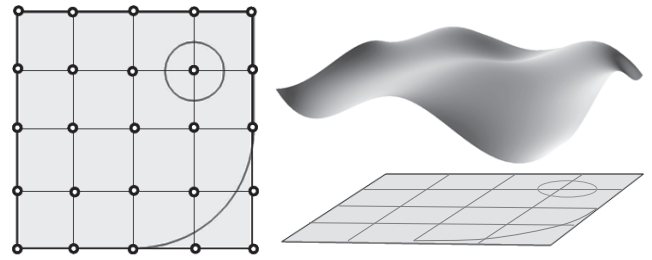
外部境界と内部境界のそれぞれについて、補間すべき点の座標列 (x_k, y_k) を点列 (t_k, x_k) 、 (t_k, y_k) に変更する。パラメータ t_k の列を指定すると、端点条件とともに式(6)を解いて線形結合係数を求めることができる。最後に、区間 (t_k, t_{k+1}) を等分割し、式(6)によって座標点を求めて、それを有限要素解析のための節点とする。

3.2 自由曲面シェル形状の生成

自由曲面シェルの形状は、意匠性と建築計画の条件から定められるものとし、テンソル積 B-スプライン曲面で表現する。ノットは一樣とするが、基底関数の次数は一般に曲線の次数より小さいものとする。 x, y 方向の次数を m, n 、B-スプライン基底関数 $B_{i,2m}(x)$ 、 $B_{j,2n}(y)$ の数を M, N 、それらの線形結合係数を $\gamma_{i,j}$ とし、曲面を平面座標 x, y の関数として以下のように $z(x, y)$ で定義する。

$$z(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \gamma_{i,j} B_{i,2m}(x) B_{j,2n}(y) \quad (7)$$

シェルの外部境界を包含する長方形領域を xy 平面上に導入し、格子点座標を (x_i, y_j) とする。格子点での曲面の高さ z_{ij} を指定し、端点条件とともに、式(7)を解いて結合係数を決定する。図8は平面領域



(a) 平面格子の設定

(b) 曲面形状

図8 B-スプライン曲面の例

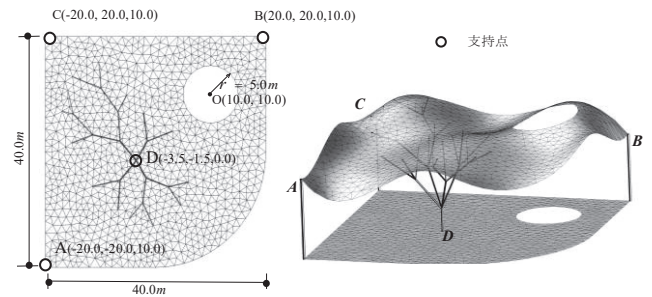
と B-スプライン曲面の例である。

3.3 初期形状の生成

3.2節までに述べた方法で、ツリー形状、平面境界形状、自由曲面形状を定義し、ツリー構造の枝と自由曲面の交差点を求めて、それを自由曲面の支持点とする。

次に、平面設計領域上で、ツリーの支持点と区別された外部・内部境界上の節点を指定してデロニー三角形分割を行なう。その際、

三角形の節点番号が反時計回りの場合、その三角形の面積は正になり、逆に時計回りの場合は負になることを利用して、デロニー三角形分割するとき生成する三角形が領域の範囲にあるかを判断することができる。また、得られた三角形要素をシェル曲面上に投影して、有限要素解析のための三角形メッシュを得る。枝と上部の曲面構造の交点は三角形要素の節点になるので、全体構造は上部の曲面連続体と下部のツリー型支持が一体化された構造になる。



(a) 三角形要素分割

(b) 初期形状

図9 初期形状形成

4. 構造形態最適化問題

4.1 ひずみエネルギー最小化問題

ツリー型支持構造の形状を最適化する。変数はツリーの節点座標であり、目的関数はシェルとツリーの自重と固定荷重に対するひずみエネルギーの和である。ひずみエネルギーを最小化することにより、剛性の大きい構造形態を得ることができる。

全体座標系で表した剛性行列を $\mathbf{K}$ 、節点変位ベクトルを $\mathbf{U}$ 、節点力ベクトルを $\mathbf{F}$ とすると、剛性方程式は次のように書ける。

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \quad (8)$$

ツリー構造の節点座標を並べた設計変数のベクトルを $\mathbf{X}$ とする。式(8)を解いて $\mathbf{U}$ が得られると、ひずみエネルギー $C(\mathbf{X})$ は次式で計算できる。

$$C(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{KU} \quad (9)$$

最適化問題は次式のように表現される。

$$\begin{cases} \text{Find } \mathbf{X} \\ \min. C(\mathbf{X}) \\ \text{s. t. } \mathbf{X} \in \Omega \end{cases} \quad (10)$$

ここで、 Ω は $\mathbf{X}$ の許容領域であり、ツリー構造の上端節点が上部シェル構造上を移動する制約条件を満たす解集合である。制約条件としては、最大応力や最大変位、座屈荷重などのさまざまな力学条件を考慮することも考えられる。しかし、本論では、構造計画段階の設計に着目して、ひずみエネルギーを最小化することによって、軸力のみで荷重を基礎までスムーズに伝える支持構造の形状を求めることを主目的とする。最適解において応力制約などが満たされない場合は、断面形状の変更によって改善できる。

4.1 ひずみエネルギーの感度係数

自由曲面シェル構造と骨組構造の一体化された構造の剛性行列は、平面三角形要素と梁要素で構成され、それらを $\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_h$ で表すと、 $\mathbf{K}$ は次式で表現できる。

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_h \quad (11)$$

ツリー構造の支点位置は固定し、曲面支持点の曲面上の位置は変数とする。したがって、変数ベクトルを、自由に移動させることができる自由節点 $\mathbf{X}^f$ と曲面上に制約される曲面上の制約付き節点 $\mathbf{X}^c$ に分類する。自由節点と関連している要素は梁要素のみであり、制約付き節点と関連している要素は三角形シェル要素と梁要素の 2 種類である。

i 番目の自由節点の座標 (x_i^f, y_i^f, z_i^f) に関するひずみエネルギーの感度係数 $d_{ix}^f, d_{iy}^f, d_{iz}^f$ は次式で求めることができる。

$$\begin{cases} d_{ix}^f = -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_h}{\partial x_i^f} \mathbf{U} \\ d_{iy}^f = -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_h}{\partial y_i^f} \mathbf{U} \\ d_{iz}^f = -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}_h}{\partial z_i^f} \mathbf{U} \end{cases} \quad (12)$$

ここで、剛性行列の微分には、該当する節点に接続する要素の剛性行列のみが関係する。

制約付き節点の z 座標は x, y 座標の関数であることから、 i 番目の制約付き節点の x, y 座標 x_i^c, y_i^c に関するひずみエネルギーの感度係数 $\alpha_{ix}^c, \alpha_{iy}^c$ は次式で求めることができる。

$$\begin{cases} \alpha_{ix}^c = -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial x_i} \right) \mathbf{U} \\ \alpha_{iy}^c = -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial y_i} \right) \mathbf{U} \end{cases} \quad (13)$$

式(7)を式(13)に代入することにより、 i 番目制約付き節点の x, y 座標に関するひずみエネルギー感度係数 $\alpha_{ix}^c, \alpha_{iy}^c$ が求められる。

$$\begin{cases} \alpha_{ix}^c = -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N \gamma_{k,j} \frac{\partial B_{k,2m}(x)}{\partial x_k} B_{j,2n}(y) \right) \mathbf{U} \\ \alpha_{iy}^c = -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial y_i} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N \gamma_{k,j} \frac{\partial B_{k,2m}(x)}{\partial y_k} \frac{\partial B_{j,2n}(y)}{\partial y_j} \right) \mathbf{U} \end{cases} \quad (14)$$

4.2 自由曲面のツリー型支持構造形態創生方法

節点座標ベクトル $\mathbf{X}$ に関するひずみエネルギーの感度係数が得られると、 $C(\mathbf{X})$ の勾配ベクトル $\nabla C(\mathbf{X})$ を求めることができる。勾配ベクトルを用いて、最急降下法によって最適解を求める。

k ステップでの解 $\mathbf{X}^{(k)}$ から、ステップサイズ $\lambda^{(k)}$ を用いて解を以下のように更新する。

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} - \lambda^{(k)} \nabla C(\mathbf{X}^{(k)}) \quad (15)$$

ステップサイズは黄金分割探索法で定める。

目的関数の感度係数の絶対値の最大値が ε 以下になれば収束とみなす。

本論で提案する自由曲面のツリー型支持構造形態創生アルゴリズムは、以下のようにまとめられる。

1. 平面の矩形領域に含まれる閉領域に自由曲面シェルを配置するための建築平面境界を設定する。曲面形状は、建築計画、意匠、構造に関する要求などによって定められるものとする。
2. 2, 3 節の手法によってツリー形状を生成し、同時に上部構造との交点を求め、ツリー型支持構造を形成する。
3. 建築平面境界上の点に加えて、支持構造の支点と上部構造との交点の平面上への射影点を指定して、デロニー三角形分割を行う。この三角形節点をシェル曲面に射影させることで、曲面の有限要素解析のための三角形分割を完成させ、上部構造と下部構造が一体化された初期構造形態を形成する。
4. 有限要素法により構造解析を行い、ひずみエネルギーを求める。さらに、式(12)、(14)を用いて自由節点、制約付き節点の座標に関するひずみエネルギーの感度係数を求める。
5. 式(15)により節点座標を更新する。
6. 収束条件を検定、満足する場合は操作を終了する。満足しない場合は 3~5 の操作を与えられた回数まで繰り返す。

5. 数値計算例

5.1 矩形平面モデル

40.0×40.0 m の矩形内に設定した平面領域を図 9(a)に示す。A, B, C において剛な柱にピン支持を設定し、D の位置には鋼管部材のツリー型支持を設定する。平面の曲線部分は 3 次、直線部分は 1 次の B-スプライン基底関数を用いる。曲面の次数も 3×3 である。

ツリー形状は文法 $A=(5, 4, \dots)$ により形成する。すなわち、1 回目はタイプ 5、2 回目以降はタイプ 4 を用いる。幹(最下層の鉛直方向部材)の長さとして直径をそれぞれ 3.5 m, 0.25 m とし、部材長と直径の標準値をそれぞれ 6.0 m, 0.2 m とする。また、分岐にともなう部材長と面積の縮小率をそれぞれ $\gamma=0.7$, $\rho=0.8$ とする。分岐のパラメータは $\eta=0.7$ とする。鋼管部材の標準厚さは 0.02 m にする。上部自由曲面シェルは厚さ 0.1 m の鉄筋コンクリートである。鋼管のヤング係数及びポアソン比はそれぞれ 210 GPa, 0.3 とし、コンクリートのヤング係数及びポアソン比はそれぞれ 30 GPa, 0.2 とする。本例では収束条件として $\varepsilon=0.1 \times 10^{-3}$ と指定する。

図 9 のモデルを初期形状とした進化過程を図 10 に示す。平面図と立面図において、細い点線はツリーの初期形状位置を、太い実線は進化ごとのツリー形状を表している。また、平面図と立面図のそれぞれの図は、立面図に示すステップでの形状を表している。図 10

からわかるように、自由節点は進化ごとに徐々に移動し、最終的には初期形状位置とかなり離れた位置で収束している。初期形状で真直であった幹は、徐々に傾いて短くなり、枝の長さも変化している。自由節点に比べ、制約付き節点の位置の変化は小さいことも確認できる。

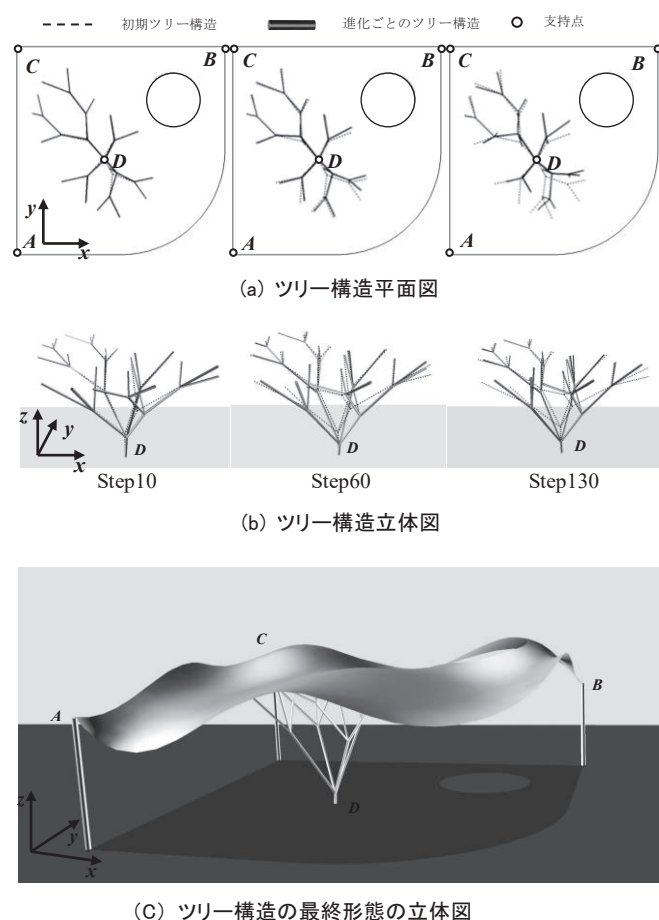
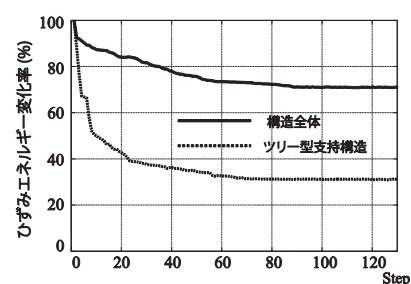


図 10 ツリー構造の進化過程(矩形モデル)

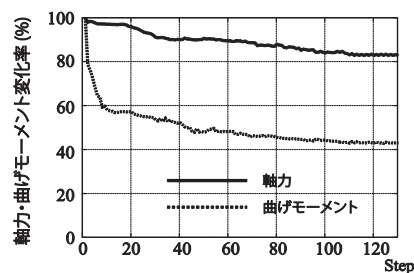
図 11(a)は進化過程での構造全体とツリー型支持構造のひずみエネルギーの初期構造に対する割合を示している。ツリー構造のひずみエネルギーは step 1～step 20 で初期構造の 40%まで急速に減少し、その後徐々に 30%程度まで減少している。構造全体のひずみエネルギーは徐々に 70%程度まで減少して収束している。初期構造では上部の曲面と下部のツリー構造のひずみエネルギーはそれぞれ全体の 67.8%, 32.2%であるが、最適化後はそれぞれ 85.7%, 14.3%になり、ツリー構造の剛性が高くなっていることが確認できる。

ツリー構造の軸力と曲げモーメントによるひずみエネルギー（以下、軸力、曲げモーメントと省略）の初期値に対する割合を図 11(b)に示す。軸力は約 82%まで、曲げモーメントは約 42%まで減少し、軸力の変化に比べて曲げモーメントの変化が大きい。また、曲げモーメントは step 10 までの初期進化段階での変化が大きく、最適解では軸力主体の抵抗構造となっている。

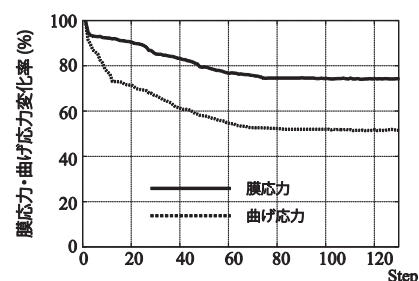
図 11(c)に、上部自由曲面の膜応力と曲げ応力によるひずみエネルギー(以下、膜応力、曲げ応力と省略)の変化を示す。上部自由曲面の膜応力は初期構造の 75%、曲げ応力は初期構造の 51%まで減少し、



(a) 構造全体とツリー構造のひずみエネルギー



(b) ツリー構造の軸力と曲げモーメント



(c) 上部自由曲面の膜応力と曲げ応力

図 11 力学的性能の変化図

ツリー構造の節点位置の最適化によって、上部自由曲面構造の力の流れも合理的に再配分されることがわかる。ツリー構造の軸力と曲げモーメントの最大値、最小値、平均値を表 1 に示す。表 1 より、軸力と曲げモーメントともに、最大値よりも平均値の変化率が小さく、力の分布が平均化されているわけではないといえる。

表 1 ツリー構造の軸力と曲げモーメント

		初期形状	最適形状	変化率(%)
軸力	最大値	5770(KN)	5970(KN)	103.5(%)
	最小値	73.3(KN)	2.9(KN)	3.4(%)
	平均値	904(KN)	751(KN)	83.1(%)
曲げモーメント	最大値	668(KNm)	337(KNm)	50.4(%)
	最小値	23.0(KNm)	12.1(KNm)	52.6(%)
	平均値	145(KNm)	62.5(KNm)	43.1(%)

以上の考察から、ツリー構造の最適形状には以下の特徴があることが分かる。

1. ツリー構造の節点位置を調節することで、ツリー構造のみならず、構造全体の剛性を改善することができる。
2. ツリー構造のひずみエネルギーは、曲げの成分が大きく減少し、軸力のみで荷重を基礎まで伝達する構造が生成される。

3. 下部のツリー構造の節点位置の変更により、上部曲面構造の応力分布も改善され、膜応力を主とした構造に進化する。
4. 初期の進化段階で、わずかな節点修正により大幅に力学性能が改善される。

5.2 片持ち自由曲面モデル

片持ち自由曲面は、空間構造として野外舞台や体育館のスタンドによく使われる構造形式である。100×46.2 m の矩形内で図 12(a)のように平面を設定し、図 12(b)のような自由曲面シェルが設計されているものとする。点 F と H の 2 か所に、生成文法によってツリー型支持構造を設定し、A, B, C, D, E で固定支持する。上部曲面のコンクリートの厚さは 0.15 m, ツリー支持構造の直径の基準値は 0.5 m, 長さの標準値は 7.0m, 分岐ごとの面積の縮小率を 0.8 とする。また、鋼管部材の標準厚さは 0.03 m にする。その他のパラメータは矩形モデルと同じである。収束条件として $\varepsilon=0.5 \times 10^{-4}$ と指定する。

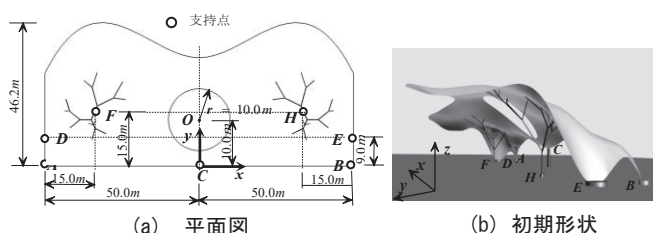
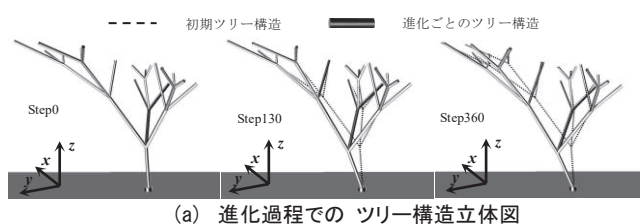
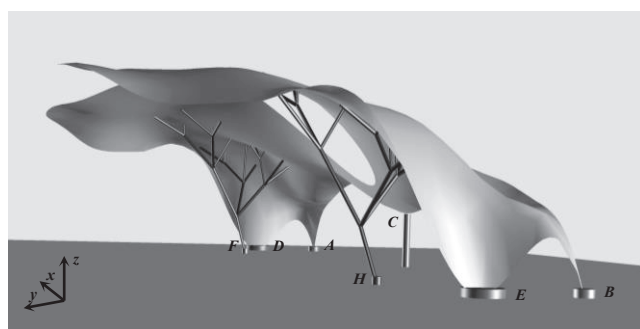


図 12 片持ち自由曲面構造モデル



(a) 進化過程での ツリー構造立体図



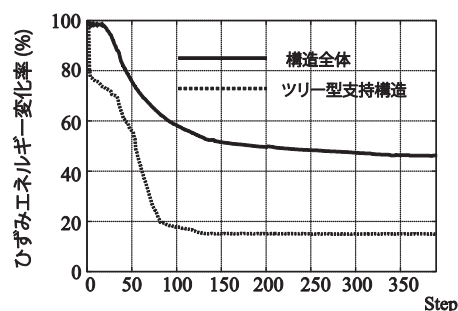
(b) 最終結果の立体図

図 13 ツリー構造の進化過程 (片持ちモデル)

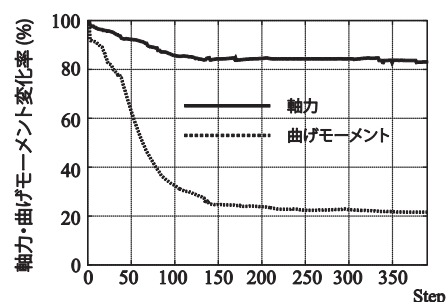
図 13(a)に 1 本のツリー構造の進化過程を示す。最適化の過程で対称性は考慮しないが、モデルの形状と荷重条件の対称性から、2 本のツリー構造は対称に進化する。図 13(b)には最終のツリー支持構造全体形状を示す。最適化により、鉛直であった幹は斜め方向を向き、枝も徐々に傾いていることが確認できる。

構造全体のひずみエネルギーとツリー支持構造のひずみエネルギーの初期構造に対する割合を図 14(a)に示す。最適化により、初期構造の 53.1% と 15.4% にそれぞれ減少している。一方、上部の曲面

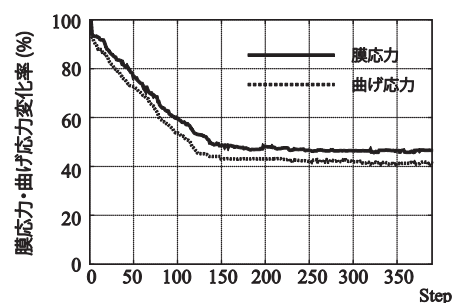
と下部のツリー支持のひずみエネルギーは初期形状ではそれぞれ全体ひずみエネルギー 71.5%, 28.5% になっているが、進化により最終的にはそれぞれ 90.6%, 9.4% になっている。このように、ツリー支持構造の最適化によって、ツリー支持構造自身の剛性のみならず、構造全体の剛性も向上することが確認できる。



(a) 構造全体とツリー構造のひずみエネルギー



(b) ツリー構造の軸力と曲げモーメント



(c) 上部自由曲面の膜応力と曲げ応力

図 14 力学的性能の変化図

また、図 14(b)から分かるように、ツリー支持構造の軸力は初期構造の 84.3% であるのに対して、曲げモーメントは 27.8% まで減少している。したがって、本論で提案した最適化手法によって、上部の荷重を軸力形式で基礎まで伝達する合理的な構造を創生できることが確認できる。

図 14(c)に上部構造の膜応力と曲げ応力の最大値の変化率を示す。上部の曲面構造の形状は変化しないが、ツリー支持構造の形状変化は上部曲面構造の応力に大きく影響を与えることが分かる。ツリー支持構造の形状の変化により膜応力は 45.0% まで、曲げ応力は 55.0% まで減少している。ツリー構造の軸力と曲げモーメントの最大値、最小値、平均値を表 2 に示す。この例でも、軸力と曲げモーメントともに最大値よりも平均値の変化率が小さく、力の分布が平均化されているわけではないことがわかる。

表 2 ツリー構造の軸力と曲げモーメント

		初期形状	最適形状	変化率(%)
軸 力	最大値	13400(KN)	11900(KN)	88.8(%)
	最小値	413 (KN)	75.1 (KN)	18.2(%)
	平均値	2590 (KN)	2157(KN)	83.3(%)
曲 げ モー メント	最大値	1990 (KNm)	865 (KNm)	43.5(%)
	最小値	128 (KNm)	13.0 (KNm)	10.1(%)
	平均値	710 (KNm)	154.8(KNm)	21.8(%)

6. まとめ

本論では、自然界のツリー形状の特性に着目して、自由曲面構造を支持するためのツリー型構造の形態創生法を提案した。本論で得られた成果は以下のとおりである。

1. フラクタル幾何学の手法の一つである IFS を用いて、現実的な形状のツリー型支持構造を生成できる。
2. 曲面の境界形状を、投影水平面上で指定することにより、境界形状とその高さを正確に指定できる。その際、奇数次数の B-スプライン曲線を用いるのが有効である。
3. B-スプライン曲面上に拘束された節点の座標に関するひずみエネルギーの感度係数を定式化した。
4. 上部構造の形状を固定して支持構造を最適化することで、上部構造を含む構造全体の剛性が大きく改善されることを示した。

参考文献

- 1) 坪井義昭他: 力学・素材・構造デザイン, 建築技術, 2012
- 2) M. Neureither: Rechnerische generierung von baumstrukturen, SFB230, Stuttgart, Vol. 4, Universitat Stuttgart Verzweigungen, Natürliche Konstruktionen-Leichtbau in Architektur und Natur, pp. 57-63, 1992.
- 3) A. Bejan: Shape and Structure from Engineering to Nature, Cambridge University Press, 2000.
- 4) Ellen Thro 著, 米津光浩, 神成淳司 訳: 人工生命, カットシステム, 1994.
- 5) 日本建築学会 編: やさしくわかる建築・都市・環境のためのソフトコンピューティング, 丸善, 2009.
- 6) 日本建築学会 編: 建築形態と力学的感性, 丸善, 2014.
- 7) M. Kolodziejczyk: Verzweigungen mit Fäden, Einige Aspekte der Formbildung mittels Fadenmodellen. Verzweigungen, Natürliche Konstruktionen - Leichtbau in Architektur und Natur., pp. 101-126, 1992.4
- 8) P. von Buelow: Following a thread: a tree column for a tree house, Proc. IASS Symposium, Beijing, 2006.
- 9) P. von Buelow: A geometric comparison of branching structures in tension and compression versus minimal paths, Proc. IASS Symposium, Venice, 2007.
- 10) J. Hunt, W. Haase and W. Sobek: A design tool for spatial tree structures, J. Int. Assoc. Shell and Spatial Struct., Vol. 50(1), pp. 3-10, 2009.
- 11) C.-Y. Cui and B.-S. Jiang: A morphogenesis method for shape optimization of framed structures subject to spatial constraints, Eng. Struct., Vol. 77, pp. 109-118, 2014.
- 12) ベンワール・マンデルブロ 著, 広中平祐 監訳: フラクタル幾何学, 日経サイエンス, 1984.
- 13) 谷口健男: FEMのための要素自動分割, 森北出版株式会社, 1992.
- 14) P. Prusinkiewicz and A. Lindenmayer: The Algorithmic Beauty of Plants, Springer-Verlag, 1990.
- 15) C. Bovill: Fractal Geometry in Architecture and Design, Birkhäuser, 1996.
- 16) 桜井 明 監修 吉村和美, 高山文雄: パソコンによるスプライン関数, 東京電機大学出版局, 1988.

SHAPE GENERATION OF TREE-TYPE SUPPORT STRUCTURE
OF FREE-FORM SHELL USING FRACTAL GEOMETRY*Jinglan CUI**, *Guangchun ZHOU*** and *Makoto OHSAKI****

* Grad. Stud., Dept. of Architecture and Architectural Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University, M.Sc.

** Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Harbin Institute of Technology, Ph.D.

*** Prof., Dept. of Architecture and Architectural Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University, Dr.Eng.

Owing to recent progress of computational methods and manufacturing technology, free-form shells are widely used for designing complex shapes of long-span roof structures. However, in most of studies on design and optimization of free-form shells, the shells have fixed and/or pin supports, and stiffness and deformation of the supporting structures are not considered.

Tree-type frame is an aesthetically and mechanically efficient structural system, which has been used as supporting structures for roofs of moderately large scale such as train stations and airport buildings. The natural forms including the shapes of trees can be modeled using the methods of bio-mimetics, or bio-inspired engineering. Among those methods, fractal geometry can be effectively used for generating tree-type frames.

In this paper, an optimization method is presented for design of tree-type frames as supporting structures of free-form shells. The boundary of the roof, projected to the horizontal plane, is divided into several parts, and are modeled using the B-spline curves of different orders. A unified algorithm for modeling complex external boundary as well as the internal boundary is presented utilizing the B-spline curves of orders with odd numbers.

The finite-element (FE) mesh is generated by constrained Delaunay triangulation, where the points along the boundary, the bottom node of support structure, and the intersection points between the tree-type support structure and the upper shell surface are constrained to be included in the FE-mesh.

An algorithm for generating tree-type frame is presented based on iterative function system (IFS) of fractal geometry. The type of branching of the tree is selected from the list of preassigned types. Formulations of sensitivity analysis is presented for total strain energy with respect to the nodal coordinates including those constrained to move on the shell surface. The optimal solution to minimize the total strain energy is found using the steepest decent method.

It is demonstrated in the numerical examples that the nodal locations of the tree-type support structure can be optimized to minimize the total strain energy of the structure including the roof and support frame. It is shown that the strain energy due to bending deformation is mainly reduced through optimization; thus, an ideal load path utilizing axial forces to the ground is achieved. It is notable that the bending deformation of the upper shell roof can be reduced by optimizing only the nodal locations of the support structure. The present study explains how the IFS of fractal geometry can be combined with an optimization method to be applied to a practical engineering problem.

(2016年3月8日原稿受理, 2016年6月27日採用決定)