

M. Dufllo 教授講演記録

Dufllo 教授は, 日本学術振興会の外国人招へい研究者として, 1982 年 3 月 15 日から一か月間滞日され, 多くの講演をされた. それらから重複するものを除いて記す.

1. Harmonic analysis on complex Lie algebra

(1982 年 3 月 18, 23 日於京都大学理学部)

G を複素連結リー群, $\mathfrak{g}$ をそのリー環とする. 以下 $\mathfrak{g}$ を実リー環とみなし, $\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の共役空間とする. G は $\mathfrak{g}^*$ に反傾随伴表現で作用する. $f \in \mathfrak{g}^*$ に対して, G における f の固定群を $G(f)$, そのリー環を $\mathfrak{g}(f)$ とする. 軌道 $G \cdot f$ が最高次元のとき, f は正則 (regular) であるといわれる. f が正則ならば $\mathfrak{g}(f)$ は可換である. $\mathfrak{g}(f)$ の元 X で $\text{ad } X$ が半単純となるものの全体を $\mathfrak{s}(f)$ で表す. f が正則で $\mathfrak{s}(f)$ が最高次元のとき, f は強正則 (very regular) といわれ, その全体を $\mathfrak{g}_{\text{vr}}^*$ で表す. $\mathfrak{g}_{\text{vr}}^*$ は $\mathfrak{g}^*$ の Zariski 開集合であり, G

は複素リ一群故, 任意の $f, f' \in \mathcal{O}_{V_2}^*$ に対して, $\mathfrak{s}(f)$ と $\mathfrak{s}(f')$ は共役である. $\mathfrak{s}$ をこの共役類の代表元とし, H (resp. H') を $\mathfrak{s}$ の G における中心化群 (resp. 正規化群), $\mathfrak{f}$ を $\mathfrak{s}$ と可換な $\mathcal{O}$ の元全体とする. $\mathcal{O}$ はルート空間分解されて, $\mathcal{O} = \mathfrak{f} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathcal{O}_{\alpha}$ となり, また, $W = H'/H$ は有限群である. $a_0 \in \mathfrak{s}$ を正則元とし,

$$\Delta^+ = \left\{ \alpha \in \Delta; \begin{array}{l} \textcircled{a} \operatorname{Re} \alpha(a_0) > 0 \\ \textcircled{b} \operatorname{Re} \alpha(a_0) = 0, \operatorname{Im} \alpha(a_0) > 0 \end{array} \right\} \quad \text{または}$$

$$\pi = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathcal{O}_{\alpha}, \quad \mathfrak{p} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathcal{O}_{\alpha}$$

とおく. このとき, $\mathfrak{p} = [\mathcal{O}, \mathfrak{s}]$ が成り立つ.

命題 (i) $f \in \mathcal{O}_{V_2}^*$ ならば, $G \cdot f \cap \mathfrak{f}^* \neq \emptyset$

(ii) $f, f' \in \mathfrak{f}^* \cap \mathcal{O}_{V_2}^*$ かつ $g \cdot f = f'$ ($g \in G$) ならば, $g \in H'$

(iii) $f \in \mathfrak{f}^* \cap \mathcal{O}_{V_2}^*$ ならば, $B_f(x, y) = f([x, y])$ は $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ 上非退化. ▣

dX, dY, dZ をそれぞれ, $\mathcal{O}, \mathfrak{p}, \mathfrak{f}$ 上のルベーグ測度で, $dX = dZ dY$ が成り立つものとし, $df, d\lambda$ をそれぞれ, $\mathcal{O}^*, \mathfrak{f}^*$ 上のルベーグ測度で, 各 $\alpha \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ ($\mathcal{O}$ 上の Schwartz 函数全体) に対し

$$\int_{\mathcal{O}^*} \int_{\mathcal{O}} e^{i f(X)} \alpha(X) dX df = \alpha(0)$$

($d\lambda$ についても同様) が成り立つ様に正規化する. $e_1, \dots, e_{2d}$ を $\mathfrak{g}$ の基底で, $dY = |e_1^* \wedge \dots \wedge e_{2d}^*|$ なるものとし, 各 $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ に対して, $\pi^B(\lambda) = [\det \lambda([e_i, e_j])]^{1/2}$ とおく. π^B は $\mathfrak{g}^*$ 上の多項式函数故, $\mathfrak{g}$ 上の symmetric algebra に属する. π^B が定義する $\mathfrak{g}$ 上の微分作用素を D と書く.

$\omega(H) = \det \text{ad}_{\mathfrak{g}}(H)$ ($H \in \mathfrak{g}$) とおき, 正則な各 $a \in \mathfrak{g}$ と $\varphi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ に対して,

$$\psi_a(\varphi) = D(\omega(Z)\varphi(\text{Ad}_g Z))|_{Z=a}$$

とおくと, $\psi_a(\varphi h) = (\det \text{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} h) \psi_a(\varphi)$ 故

$$M_a(\varphi) = \frac{id}{(2\pi)^d \#W} \int_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \psi_a(\varphi) d\bar{g}$$

が定義できる. このとき, $M_a \in \mathcal{S}'(\mathfrak{g})$ であって, $\mathfrak{g}$ が半単純ならば, Harish-Chandra の定義した不変積分に一致する.

定理 (i) $a \mapsto M_a$ は $\mathfrak{g}$ 上の $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$ 値 C^∞ 函数に拡張され, M_a の台は a の G 軌道 $G \cdot a$ であり, M_0 は Dirac の δ である.

$$(ii) \quad \Theta_a(\lambda) = \frac{1}{\#W} \sum_{w \in W} e^{i\lambda(w \cdot a)} \quad (\lambda \in \mathfrak{g}^* \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*)$$

とおき, Θ_a を G 不変性によって, $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ 上に拡張する. このとき, M_a の Fourier 変換は Θ_a である.

(iii) $\mathfrak{og}_G = \{X \in \mathfrak{og} ; \exp X = e\}$ とおく. このとき, $\eta_G = \sum_{a \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{og}_G} M_a$ は $\mathcal{Q}(\mathfrak{og})$ で収束し, $\mathfrak{og}_G$ の中に台を持ち, $0 \in \mathfrak{og}$ の近傍で Dirac の δ に等しい. ▨

(野村隆昭記)

2. An application of primitive ideals of enveloping algebras to the
harmonic analysis on Lie groups after J.-Y. Charbonnel

(1982年3月25日於京都大学理学部)

G を連結リー群, π を G の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への正規因子表現, $\vee N(\pi)$ を $\pi(G)$ で生成される因子とする. 正規因子表現は, 指標の研究に際して, Pukanszky によって導入された. $C^*(G)$ を G の群 C^* 環とすると, 正規因子表現 π は次の二条件で特徴付けられる.

(i) $\vee N(\pi)$ は semifinite

(ii) $C^*(G)^+$ に元 φ が存在して, π の $C^*(G)$ への自然な延長を再び π で表すと, $\pi(\varphi)$ は 0 でない跡族.

[1] では, G が可解のとき, 上の (ii) において, φ は G 上の台が compact な C^∞ 函数 (その全体を $C_c^\infty(G)$ で表す) からとれることが示された. 本講演の主定理は, 可解という条件を取り除いた場合の次の定理である.

定理1 $C_c^\infty(G)$ に元 φ が存在して, $\pi(\varphi)$ は 0 ではなく, $\vee N(\pi)$ に関して compact である. すなわち, $\vee N(\pi)$ の跡族のノルム閉包に属する. ▣

さて, $\mathcal{O}$ を G のリー環, $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ を $\mathcal{O}$ の複素化, $U(\mathcal{O}_\mathbb{C})$ を $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ の普遍包絡環とする. $U(\mathcal{O}_\mathbb{C})$ の元は, 自然に, G の単位元 e に台を持つ超函数とみなせる. $\mathcal{O}_\infty$ を π に関する C^∞ ベクトル全体を表し, $d\pi$ を π の微分として得られる $\mathcal{O}_\infty$ の $\mathcal{O}$ の, 従って $U(\mathcal{O}_\mathbb{C})$ の表現とする. このとき, $d\pi$ の核 I_π は $U(\mathcal{O}_\mathbb{C})$ の原始イデアルである. $U(\mathcal{O}_\mathbb{C})$ の各原始イデアル I に対して, $\hat{I} \in I' \neq I$ なる $U(\mathcal{O}_\mathbb{C})$ の原始イデアルすべての共通部分とする. 定理1は次の定理2と, $\hat{I} \neq I$ なること [2, 4.6] から証明される.

定理2 任意の $u \in \hat{I}_\pi$, $\varphi \in C_c^\infty(G)$ に対して, $\pi(u * \varphi)$ は $\vee N(\pi)$ に関して compact である. ▣

$C^*(G)$ の各原始イデアル J に対して,

$$I(J) = \{ u \in U(\mathcal{O}_\mathbb{C}) ; u * C_c^\infty(G) \subset J \}$$

とおく. 定理2は次の定理3から証明される.

定理3 J, J' を $C^*(G)$ の原始イデアルとする. このとき, $J \subset J'$ かつ $I(J) = I(J')$ ならば, $J = J'$ である. ▣

文献

- [1] J.-Y. Charbonnel, Sur les semi-caractères des groupes de Lie résolubles connexes, J. Funct. Anal., 41 (1981), 175-203.
- [2] C. Moeglin, Idéaux primitifs des algèbres enveloppantes, J. Math. Pures et Appl., 59 (1980), 265-336.

(野村隆昭記)

3. Construction of a set of irreducible unitary representations of real algebraic Lie groups, sufficiently big to decompose $L^2(G)$

(1982年3月29日於東北大学理学部)

G を実リ一群, $\mathfrak{g}$ をそのリー環とする. 以下, Σ までに用いた記号は説明なしに用いる. $f \in \mathfrak{g}^*$ が good polarization を持つとは, $\mathfrak{g}_f$ の可解部分環 $\mathfrak{h}_f$ まで, f の polarization になっていて, しかも Pukanzky 条件を満たしているものが存在するときという. $\mathfrak{g}$ 自身が可解ならば, 任意の $f \in \mathfrak{g}^*$ は good polarization を持つ. 一方, $\mathfrak{g}$ が半単純ならば, f が good polarization を持つことと f が正則半単純であることは同値である. これはまた, $\mathfrak{g}(f)$ が Cartan 部分環になることと同値である. $B_f(x, y) = f([x, y])$ とおくと B_f は $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ 上にシンプレクティック構造を与え, シンプレクティック群 $Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$, メタプレクティック群 M_p

$(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$ を考えることができる.

$$Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)) \longleftarrow Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$$

↑

↑

$$1 \leftarrow G(f) \longleftarrow G(f)^\sim \leftarrow \{1, e\} \leftarrow 1$$

$G(f)^\sim$ の表現で

$$\tau(e) = -Id, \quad \tau(\exp X) = e^{i f(X)} Id \quad (X \in \mathfrak{g}(f))$$

となるものの全体を $X(f)$ で表す. また, その内で既約なもの全体の全体を $X^{irr}(f)$ で表す. $X(f) \neq \emptyset$ のとき, f は *admissible* であるといわれる.

さて, $f \in \mathfrak{g}^*$ を *admissible* かつ *good polarization* を持つものとし, $\tau \in X(f)$ とする.

定理 1 G のユニタリ表現 $T_{f,\tau}$ が構成できて, $T_{f,\tau}$ の commutant と τ のそれとは同型である. ▣

まず例として, G が algebraic で, f の *polarization* は $\mathfrak{h}$ で, $G(f)$ -不変かつ実 (i.e. $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g})_{\mathbb{R}}$) でしかも *good* であるものが存在する場合を考えてみよう. B_0 を $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$ に対応する G の解析部分群, $B = G(f)B_0$ とおく. B は G の閉部分群になる.

$\rho_{\mathfrak{h}}(\tilde{h}) = [\det(\text{Ad } h)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}]^{-1/2} \quad (G(f)^\sim \ni \tilde{h} \mapsto h \in G(f))$
とおく. G から τ の表現空間に値をとる函数 ψ で

$$\varphi(qh) = \tau(\tilde{h})^{-1} \rho_{\tilde{g}}(\tilde{h})^{-1} \varphi(q) \quad (G(f) \sim \Rightarrow \tilde{h} \mapsto h \in G(f))$$

$$X\varphi = -(if + \rho_{\tilde{g}}^0)(X)\varphi \quad (X \in \mathfrak{g})$$

$$(ただし, \rho_{\tilde{g}}^0(X) = -\text{tr}((\text{ad } X)_{\mathfrak{g}_{\tilde{g}}/\mathfrak{g}})) \quad (X \in \mathfrak{g}))$$

をみたすものの全体を $\mathcal{C}_{f, \tau}$ とおく.

$$T_{f, \tau, \mathfrak{g}} = \text{Ind}_B^G \left(\tau \frac{\rho_{\tilde{g}}}{|\rho_{\tilde{g}}|} e^{if} \right)$$

とおくと, Andler によって, $T_{f, \tau, \mathfrak{g}}$ の同値類は $\mathfrak{g}$ に依らないことが証明されている.

次に, G が連結かつ reductive のときを考える. このとき得られる $T_{f, \tau}$ ($\tau \in X^{\text{irr}}(f)$) は, 正則な infinitesimal character を持つ, tempered な既約表現である.

そして, G の単位元の連結成分 G_0 が reductive のときは, Mackey の obstruction を, Vogan による Kostant-Borel-Weil-Bott の定理の一般化を用いて計算する.

一般には, 定理 1 は $\mathfrak{g}$ の次元に関して帰納的に構成される: $\mathfrak{u}$ を $\mathfrak{g}$ の最大べき零イデアルとし, $u \in f$ の $\mathfrak{u}$ への制限, $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}(u)$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}(u) \cap \text{Ker } u$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{f} / \mathfrak{g}_0$ とおく. $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}_1$ のとき, u は単射で, $\mathfrak{g}$ は reductive となって先の構成が適用される. $\dim \mathfrak{g}_1 < \dim \mathfrak{g}$ のときは, 帰納法の仮定が適用される. $\mathfrak{g}$ が reductive で u が単射でないとき, 構成の仕方が二通りできるが, これらは勿論整合

している. 詳しくは [1] を参照.

次に, この様にして構成された $T_{f,\tau}$ の全体が, G のユニタリ双対 $\hat{G}$ の中での位大きいかが問題となる.

例 1. G が amenable のとき.

定理 2 I を $C^*(G)$ の原始イデアルとする. このとき, admissible かつ good polarization を持つ $f \in \mathfrak{g}^*$ と $\tau \in X^{\text{irr}}(f)$ が存在して, I は $T_{f,\tau}$ の $C^*(G)$ への核に一致する. 

従って, 定理 2 にいう様な f と τ の組 (f, τ) の全体を X^{irr} とおくと, G が I 型のとき, $\hat{G}$ は X^{irr} の G 軌道に parametrize される.

例 2 G が algebraic のとき (このとき, G は I 型)

$\mathcal{J} = \{T_{f,\tau}; (f, \tau) \in X^{\text{irr}}\}$ が $\hat{G}$ において Borel 集合と仮定する (G が複素のときは成り立っている).

定理 3 (i) $\hat{G} - \mathcal{J}$ の Plancherel 測度は 0 である.

(ii) $T_{f,\tau}$ が自乗可積分 $\Leftrightarrow G(f)$ が compact かつ f は強正則. 

文 献

- [1] M. Duflo, Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie, Cours d'été du C.I.M.E., Cortona, 1980.

(野村隆昭記)

4. Sur les idéaux induits dans les algèbres enveloppantes

(1982年4月6日於広島大学総合科学部)

可換体 k を固定し, 以下に出てくるベクトル空間, テンソル積, 多元環等はすべて k 上で考えるものとする. $\mathfrak{g}$ をリー環とするととき $\mathfrak{g}$ の上の包絡多元環を $U(\mathfrak{g})$ で表す. $u \in U(\mathfrak{g})$ に対して, $u \mapsto \check{u}$ は $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\check{X} = -X$ によって定まる $U(\mathfrak{g})$ の主反自己同型とする. $\mathfrak{g}$ 上の一次形式 λ が $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 上で消えているとき, $u \mapsto u^\lambda$ は $X \in \mathfrak{g}$ に対して $X^\lambda = X + \lambda(X)$ によって定まる $U(\mathfrak{g})$ の自己同型とする. $\mathfrak{g}$ が有限次元のとき, $\mathfrak{g}$ のモジュール関数は一次形式 $X \mapsto \text{ad } X$ である.

今 $\mathfrak{g}$ を有限次元リー環, θ をそのモジュール関数とし, A は $U(\mathfrak{g})$ を含み同じ単位元を持つ結合的代数とする. 更に A は $U(\mathfrak{g})$ 上の左・右加群として自由加群であると仮定する. F を $\text{ad } \mathfrak{g}$ の作用で安定な A の有限次元部分空間とすれば, F 上に自然に $U(\mathfrak{g})$ の表現が引き起される. この表現に関して $I \subset U(\mathfrak{g})$ を I がその核となるようなイデアルとする. また π をあるベクトル空間 V 上の $\mathfrak{g}$ の表現とし, I および J をそれぞれ, π から定まる $U(\mathfrak{g})$ の表現および $F \otimes V$ 上の表現の核が I および J となるような $U(\mathfrak{g})$ のイデアルとする. このとき次の定理が成り立つ.

定理1 F が AJ に含まれるならば F は $I^{-\theta}A$ に含まれる。 $\square$

$\mathfrak{o}$ は $\mathfrak{f}$ を含むリ-環とし, η をそのモジュール関数とする。
 ψ は $\psi(X) = \eta(X) - \theta(X)$, ($X \in \mathfrak{f}$) によって定まる $\mathfrak{f}$ 上の一次形式を表すとし, I を $U(\mathfrak{f})$ のイデアルとする。

定理2 $U(\mathfrak{o})I$ に含まれる $U(\mathfrak{o})$ の最大イデアルは $I^\psi U(\mathfrak{o})$ に含まれる $U(\mathfrak{o})$ の最大イデアルと一致する。 $\square$
 (江口正晃記)

5. Mackey's theory for algebraic groups

(1982年4月8日於九州大学理学部)

G を標数0の局所体 k 上定義された線形代数群 $\underline{G}$ の k 有理点全体のなす群とし, G の既約ユニタリ表現の同値類の集合 $\hat{G}$ を記述する問題を考える. $\underline{G}$ が reductive な場合には多くの仕事かなされているが, 今だに完全な結果からは程遠い. ここでは $\underline{G}$ が reductive な場合 $\hat{G}$ は記述されるとして一般の場合を考えてみる. その為には正に Mackey 理論が効果的である.

U を G の閉正規部分群として, $\hat{U}$ から $\hat{G}$ を計算する手続きが Mackey 理論である. $\underline{G}$ が reductive ならばこれは何も得られないが, $\underline{G}$ が reductive でないなら, U を $\underline{G}$ の unipotent radical として Mackey 理論を適用する.

結果を述べる為, いくつかの概念を導入する. $\underline{G}$ のリー環を $\mathfrak{g}$, その共役空間を $\mathfrak{g}^*$ で表す. $\mathfrak{g}^*$ には G 及び $\mathfrak{g}$ が coadjoint 表現を作用するが, この作用に関し, G 及び $\mathfrak{g}$ の $f \in \mathfrak{g}^*$ における stabilizer をそれぞれ $G(f)$, $\mathfrak{g}(f)$ で表す. $f \in \mathfrak{g}^*$ に対し $\mathfrak{g}$ 上の反対称双一次形式 B_f を $B_f(X, Y) = f([X, Y])$ ($X, Y \in \mathfrak{g}$) で定義する.

定義 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の部分リー環, $f \in \mathfrak{g}^*$ とする. B_f に関する $\mathfrak{h}$ の直交空間を $\mathfrak{h}^f$ で表す. $\mathfrak{h}$ が (f に関し) coisotropic とは $\mathfrak{h}^f \subset \mathfrak{h}$ となることを意味する.

$\mathfrak{g}$ の部分リー環 $\mathfrak{u}$ に対して, $\mathfrak{u}$ をリー環とする $\mathfrak{g}$ 上で定義された $\underline{G}$ の代数的部分群 $\underline{H}$ が存在するとき, $\mathfrak{u}$ は代数的であるという. この場合 $\mathfrak{u}$ を $\underline{H}$ の unipotent radical としそのリー環を $\mathfrak{u}$ で表す.

定義 $f \in \mathfrak{g}^*$ とする. $\mathfrak{g}$ の coisotropic な部分リー環 $\mathfrak{h}$ が強巾単型であるとは, $\mathfrak{h}$ が代数的でかつ $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(f) + \mathfrak{u}$ なることをいう.

定義 次の二条件が満たされるとき, $f \in \mathfrak{g}^*$ は巾単型であるという.

- (i) 強巾単型の coisotropic 部分リー環 $\mathfrak{h}$ が存在する.
- (ii) $\text{Ker } f$ に含まれる $\mathfrak{g}(f)$ の reductive factor が存在する.

さて、 κ の自明でない $\mathbb{C}$ -値指標 κ を固定しておく。 $f \in \mathfrak{g}^*$ として、双一次形式 B_f は $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ 上にシンプレクティック構造を与え、我々はシンプレクティック群 $Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$ 、メタプレクティック群 $Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$ を考える。

$p: Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)) \rightarrow Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$ を被覆写像とし、 $G(f)^\sim = p^{-1}(G(f))$ とおく。 $G(f)^\sim$ は $G(f)$ の二重被覆群である：

$$1 \rightarrow \{1, e\} \rightarrow G(f)^\sim \xrightarrow{p} G(f) \rightarrow 1$$

$$\mathbb{Z}^{\text{irr}}(f) = \{ \tau \in G(f)^\sim; \tau(e) = -id \}$$

$$\tau(\exp X) = \kappa(f(X))id \quad (X \in \mathfrak{u}_{\mathfrak{g}(f)})$$

$$\mathbb{Z}^{\text{irr}} = \{ (f, \tau) \in \mathfrak{g}^* \times G(f)^\sim; f \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の単型}, \tau \in \mathbb{Z}^{\text{irr}}(f) \}$$

とおく。このとき、 G は自然に $\mathbb{Z}^{\text{irr}}$ に作用し次の結果を得る。

定理 $\mathbb{Z}^{\text{irr}}/G \simeq \hat{G}$ ▣

この証明において、我々はメタプレクティック表現と Mackey 理論を用い $(f, \tau) \in \mathbb{Z}^{\text{irr}}$ から $T_{f, \tau} \in \hat{G}$ を構成する手続きを与える。

(藤原英徳記)

6. A criterion for type I connected Lie groups

(1982年4月13日於京都大学理学部)

まず Pukanszky による結果を復習しよう. 以下講演録に用いられた記号, 用語は説明なしに用いる. G を連結かつ単連結なリー群とし, $\mathfrak{g}$ をそのリー環とする. Ado の定理により, $\mathfrak{g}$ はある有限次元実ベクトル空間上のすべての準同型がなすリー環の部分環と同一視できる. $\tilde{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ を含む最小の代数的リー環, $\tilde{G}$ を $\tilde{\mathfrak{g}}$ に対応する連結かつ単連結なリー群とすると, G は $\tilde{G}$ の単連結な閉かつ不変な部分群である. $\mathcal{L} = [G, G] = [\tilde{G}, \tilde{G}]$ もまた $\tilde{G}$ の閉かつ不変な部分群で $\mathcal{L}$ は I 型になる. 従って, $\tilde{G}$ は $\mathcal{L}$ のユニタリ双対 $\hat{\mathcal{L}}$ に Conjugation の反傾で位相変換群として働き, 軌道空間 $\hat{\mathcal{L}}/\tilde{G}$ は countably separated である. さて, 各 $\pi \in \hat{\mathcal{L}}$ に対して, 次の性質を持つ G の閉部分群 $K_\pi \supset \mathcal{L}$ を見つけることができる.

(i) $\rho \in \hat{K}_\pi$ が存在して, ρ の $\mathcal{L}$ への制限は π に等しく,

$T(\rho) = \text{Ind}_{\mathcal{L}}^G \rho$ は G の因子表現である.

(ii) $\pi_j \in \hat{\mathcal{L}}$ とし, $\rho_j \in \hat{K}_{\pi_j}$ ($j=1, 2$) を (i) にいうものとする.

$T(\rho_1)$ と $T(\rho_2)$ が quasi-equivalent であるための必要十分条件は, $K_{\pi_1} = K_{\pi_2}$ かつ ρ_1, ρ_2 の G における固定群 G_{ρ_1}, G_{ρ_2} が一致することである. そしてこのとき, $T(\rho_1)$ と $T(\rho_2)$ はユニタリ同値になる.

(iii) 各 $\pi \in \hat{L}$ と $\alpha \in \tilde{G}$ に対して, $K_{\alpha\pi} = K_\pi$

この条件(iii)によって, K_π が π の $\tilde{G}$ 軌道 E によって決まるので, K_π を $K(E)$ と記すことにし, 各 $E = \tilde{G} \cdot \pi \in \hat{L}/\tilde{G}$ に対して

$F(E) = \{f \in K(E)^\wedge; f|_L \in E\}$, $\Omega = \bigcup_{E \in \hat{L}/\tilde{G}} F(E)$ とおく. このとき, $F(E)$ は $K(E)^\wedge$ の部分空間として局所 compact な Hausdorff 空間である. $f \in \Omega$ に対して, $J(f)$ を $T(f)$ の $C^*(G)$ における核とすると, 写像 $J: f \mapsto J(f)$ は Ω/Σ から $\text{Prim } C^*(G)$ への双射を引き起こす. ここで, Σ は Ω の同値関係を次の性質を持つものである. すなわち, $f_1 \Sigma f_2 \iff E \in \hat{L}/\tilde{G}$ が存在して, $f_j \in F(E)$ ($j=1,2$) であり, f_2 は軌道 $G \cdot f_1$ の $F(E)$ での閉包に属する. また, $\text{Prim } C^*(G)$ は $C^*(G)$ の原始イデアルの全体である.

さて, $f \in F(E)$ とする. G_f, G_π (G の π の固定群) は E によってのみ決まるので, それらをそれぞれ $U(E)$, $G(E)$ と表す. ここで, $K(E) \subset G(E)$ に注意する. そして $\Gamma(E) = U(E)/K(E)G(E)_0$ とおく. ただし, $G(E)_0$ は $G(E)$ の単位元の連結成分である. また, 各 $J \in \text{Prim } C^*(G)$ に対して

$$\mathcal{A}(J) = \{f \in \Omega; J(f) = J\}$$

とおく.

定理1 (Pukanszky) $J \in \text{Prim } C^*(G)$ が I 型であるための必要十分条件は次の (i), (ii) がみたされることである.

(i) G は $A(J)$ に推移的に作用する.

(ii) $\# \Gamma(E) < +\infty$ ▣

ここで、 $J \in \text{Prim } C^*(G)$ が I 型であるとは、その核が J となる様な G の因子表現が I 型となることである. G が I 型であるとは、すべての $J \in \text{Prim } C^*(G)$ が I 型であることだから、定理1は G が I 型であるための条件を与えていることになる. さて、 G が可解リー群のとき、定理1は G の $\mathfrak{g}^*$ への作用で記述できることがわかっている (単連結という仮定は落とせる).

問題 一般のリー群 G に対して、定理1を coadjoint 表現による作用で記述せよ.

以下この問題を考える. $f \in \mathfrak{g}^*$ とし、 $\mathfrak{h}$ を f に関して coisotropic な $\mathfrak{g}$ の部分環とする.

定義 $\mathfrak{h}$ が Pukanszky 条件をみたすとは、任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^\perp$ ($\mathfrak{g}^*$ における $\mathfrak{h}$ の annihilator) に対して、 $\mathfrak{h}^{f+\lambda} = \mathfrak{h}^f$ が成り立つことである.

定義 $\mathfrak{h}$ が可解型であるとは、 $\mathfrak{h} = \mathfrak{r}\mathfrak{h} + \mathfrak{h}(f|_{\mathfrak{r}\mathfrak{h}})$ となることである. ここで、 $\mathfrak{r}\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ の solvable radical である.

$\omega(f|_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}})$ は $\mathfrak{g}$ における $f|_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}}$ の固定環である.

定義 ω が強可解型であるとは, $\omega = \omega^\sim + \omega(f)$ が成り立つことである.

定義 f が可解型であるとは, Pukanszky 条件をみたし, $\mathfrak{g}$ が f に関し coisotropic な任意の可解型部分環が強可解型になっているときをいう.

$\mathfrak{g}$ の solvable radical, R を対応する G の解析部分群とする.

定義 f が $\mathfrak{g}$ -admissible であるとは $R(f)^\sim$ のヌータリ指標 η_f が存在して, 次が成り立つことである:

$$\eta_f(e) = -1, \quad \eta_f(\exp X) = e^{if(X)} \quad (\forall X \in \mathfrak{g}(f))$$

$\mathfrak{g}_\mathbb{R}^*$ を可解型かつ $\mathfrak{g}$ -admissible な $f \in \mathfrak{g}^*$ の全体とする. $\Sigma^{\text{irr}}(f)$ を講演録 5 と同様に定義されたものとする.

($\omega(f)$ を $\omega^\sim(f)$ に $\chi(y)$ を e^{iy} に換える.)

定理 2 (Duflo) G を連結とする. このとき, G が I 型であるための必要十分条件は次の (i), (ii) が成り立つこと.

(i) $\forall f \in \mathfrak{g}_\mathbb{R}^*$, $G \cdot f$ は $\mathfrak{g}^*$ において局所閉である.

(ii) $\Sigma^{\text{irr}}(f)$ は I 型である. ▣

ここで, $\Sigma^{\text{irr}}(f)$ の元は, $G(f)/R(f)$ (半単純群になる) の projective 表現とみなせることに注意する.

(野村隆昭記)