

修士論文 (2003年度)

気体放電モデルのパターンダイナミクス

東京大学大学院 総合文化研究科 広域科学専攻 相関基礎科学系
菅原 武志

目次

1 序	515
1.1 目的・方針	515
1.2 本論文の構成	516
2 放電について	516
2.1 気体放電の分類	516
2.2 自続放電の条件	517
2.3 火花電圧	518
2.4 グロー放電の概観	519
2.5 準2次元系への縮約	519
3 注目する実験	522
3.1 実験	522
3.2 再現すべき振舞・示唆	522
4 モデル	525
4.1 モデル構築のための仮定	525
4.2 モデル	525
4.3 システムの操作	529
5 モデルが示す現象	537
5.1 2D パターンダイナミクス	540
5.2 現象のまとめ	556
6 展望	560
A 発展方程式の導出	563

1 序

1.1 目的・方針

本論文は、ある放電実験 ([1]) に対する理論的研究である。研究の第一の目的は、実験を再現するモデルを構築することにある。放電系を含めた様々な分野でパターン形成の研究がされているが、注目した実験はとりわけ興味深いものであり、簡単に述べると以下のような振舞いである。

- 2次元2成分反応拡散系において、定常解として知られている ([18, 10]) ような、「いくつかのスポットからなる分子的な局在解」が、極板中を動く。
- そのような局在構造をなすスポット数が増大すると、スポット数が同じでも「構造が異なる分子」が出現し、時間間欠的にスイッチする。

実験では、その他にも複雑なパターンダイナミクスが観測された。

この実験で観測された振舞いは、理論レベルではいまだ非自明であり、したがって再現するモデルの構築およびそこでの論理の解明が望まれる。

再現のために必要とされる性質 4章にて述べるが、我々は放電実験を模した人工世界を構築し、そこから発展方程式として2次元2成分反応拡散方程式を導出する。実験でみられた現象を実現するために、方程式は(実験からの要請を満たしつつ)以下の性質を示すように構成される。

- 2成分が Turing 不安定性を引き起こすような関係にある。実験で観測されるようなスポットの生成過程を、 Turing 不安定性 ([33],[35],[36]) による、初期一様状態からのパターンの自己組織化に託す (**秩序化**)。
- 系の振舞いにカオスが存在する。 Turing 不安定性によって出現すると思われる秩序パターンを破壊する機構として必要になる (**秩序の破壊**)。
- 2次元2成分反応拡散方程式に大域抑制結合を加える。これは、各サイトの変数を互いに競合するような状況下に置くことに相当し、初期にたくさん出現するスポットの淘汰、スポット数の制御に必要な (**スポットの淘汰・制御**)。その変数の空間積分が一定になるように調整することで実現できる。これは実験条件と無矛盾な仮定であることが後に分かる。

もちろん上の3つは仮定であるが、実際これらの性質およびスポットの分裂・振動 (breathing) などの interplay が、実験の振舞いを含めた非自明な現象を誘起することが後に分かるであろう。

現象論モデル – 等価回路モデル – 放電はプラズマ現象であり、その理論的研究はプラズマ物理に基づいており、従って通常は荷電粒子の運動論的記述がなされる [2][5]。

しかるに我々は、別なアプローチを試みよう。放電の振舞いを現象論的に記述する。つまり、極板間の気体を、「ローカルに位置した同様な回路が、2次元空間中でつながれた、**電気回路の結合系**」として表現する。これは、次の conjecture に基づく。

- 極板間の気体中で起こっていることは詰まるところ電荷の輸送である。従って、電荷の輸送およびそのスケールの物理を考察するだけで現象が記述できる。

このように、抵抗やコンデンサーからなる系に置き換えたものを等価回路と呼ぶ (等価回路的取り扱いのお手本のモデルとしては当然 Hodgkin-Huxley 方程式 [34] が挙げられるだろう。)。

以上のような仮定を基に、実験を再現すべくモデルを構築し、現象の論理を解明していく。

1.2 本論文の構成

第2章では放電に関する一般的な知識の紹介、および放電に関するある理論的研究の簡単な説明をする。第3章では、我々の研究の動機となった放電の実験を紹介する。第4章では、モデル構築にあたっていくつかの仮定をし、放電一般の知識と注目する実験を考慮したモデルを提示する。単一素子および global(つまり空間 decouple) なモデルの振舞いの説明をし、さらに実験と対応したコントロールパラメータの操作の説明をする。第5章ではその操作に対するモデルの示す現象を調べる。実験との対応、およびその他の興味深い振舞いについて議論する。第6章で今後の展望を述べる。

2 放電について

通常気体は非常に良い絶縁体である。しかし電場を強くしていくと、ある閾値でこの絶縁が破れ、良導体となって電流が流れるようになる。この現象は気体放電と呼ばれる。以下この章では、典型的な定常放電に関する一般的な説明 [2] と、放電の最近の研究を紹介する。

2.1 気体放電の分類

図1(a)のような装置を考える。平行平板電極間に気体を入れ、電源を接続し電流を流す。電源電圧と可変抵抗を調節しながら両極間の電圧 V と電流 I の関係を測定すると、図1(b)のような特性が得られる。 V - I 特性は大きく3つの領域に分けることが出来る。

2.1.1 領域1

極板間隙の気体中の宇宙線等による僅かな電離や、それによる電極からの電子放出等によって常に存在するイオン、電子(偶存イオン、電子という)による微小な電流が流れる。これを暗流という。暗流は偶存イオン、電子の供給源を切れば流れない。電圧を上げていくと電子は電場によって加速され運動エネルギーを得る。この電子は気体分子に衝突し、分子を電離して新たに電子とイオンの対を生ずる。この過程は鼠算的に起こり、電流は増加する。さらに電場を強くすると、電離は促進して外からの供給がなくとも電流は流れるようになる。これは自続放電と呼ばれ、この閾電圧値 V_c を火花電圧という。

2.1.2 領域2

自続放電に入った領域であり、電離が十分に起こり、多くの空間電荷が生じるため電場が大きく歪む。電場が強くなったところでは電離が加速的に進み、極板間の電圧降下は小さくなる。電離とともに気体分子の励起が頻繁に起こるため発光する。この領域はグロー領域と呼ばれる。グロー領域は3つに分類される。電流のある範囲で一定電圧を保つ領域を正常グローという。さらに電流を増すと電圧は上昇する。この領域を異常グローと呼ぶ。領域1と正常グローの間の領域は前期グローと呼ばれる。グロー放電の概観については後に述べる。

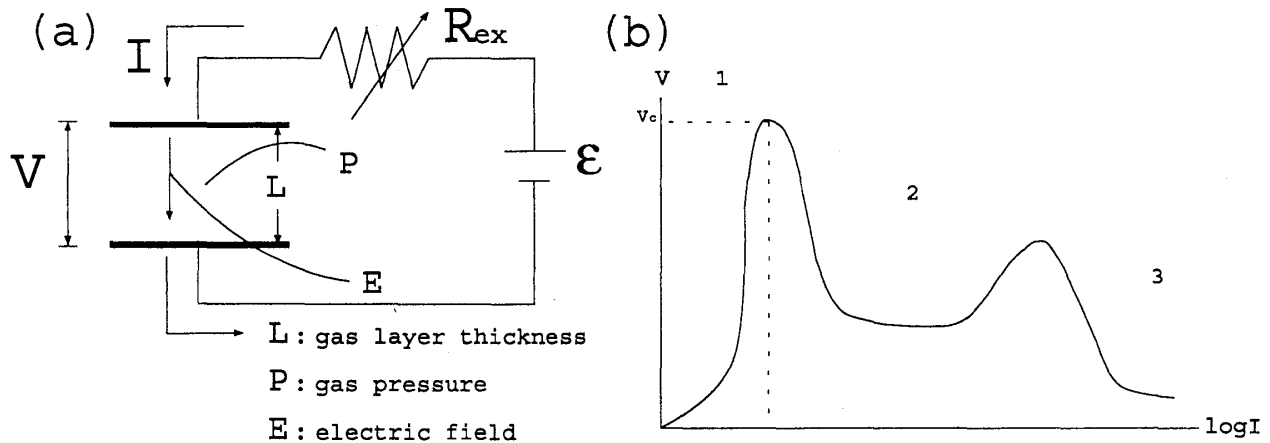


図 1: (a). 気体放電の典型的実験装置の概略図。(b). 気体放電の V-I 特性。大きく 3 つの領域に分けることができる。

2.1.3 領域 3

さらに電流を増加すると、陰極が熱せられ熱電子放出が起こり、または電極表面から電場放出が起こる。このため、陰極からの電子供給が十分になって極板間電圧は激減し、激しい発光を伴う放電に移行する。これをアーク放電という。

2.2 自続放電の条件

次に、自続放電が起こる条件について概観する。

2.2.1 電子雪崩

極板間に発生した電子は電場によって加速されエネルギーを得、気体分子を電離する。電離によって生まれた電子もこの過程を繰り返し、電子の数は鼠算的に増加して陽極に達するようになる。これを電子雪崩という。

2.2.2 自続放電の条件

ある供給のもとで偶存電子が発生している場合を考える。電子が単位距離進む間に新しく電離によって生じる電子の数を α (第 1 電離係数という) とすると、陰極を出発した 1 つの電子は、電子雪崩によって、極板間隙 L を横切ることによって陽極での電子、イオンの数を $\exp(\alpha L)$, $\exp(\alpha L) - 1$ 個に増大させる。ここで生じた $\exp(\alpha L) - 1$ 個のイオンは陰極に達し、陰極面から 2 次電子を発生させる。1 個のイオンが陰極から発生させる 2 次電子の数を γ と定義し、 γ 係数 (または第 2 電離係数) と呼ぶ。この機構は γ 作用と呼ばれる。 γ 作用によって発生した電子も電子雪崩によって陰極で $\exp(\alpha L)$ 倍の数の電子に増大する。これが繰り返し起こって定常状態になったとしよう。偶存電子による初期電流を i_0 、陰極、陽極における定常状態の電子電流をそれぞれ i_1, i とする。定常状態に関する陰極での、2 次電子による電流は上述より $\gamma i_1 [\exp(\alpha L) - 1]$ と表せるので、陰極

での定常状態を表す式は

$$i_1 = i_0 + \gamma i_1 [\exp(\alpha L) - 1]$$

よって陽極での電流 i は

$$i = i_1 \exp(\alpha L) = \frac{i_0 \exp(\alpha L)}{1 - \gamma [\exp(\alpha L) - 1]} \quad (1)$$

となる。自続放電が起こるためには、式 (1) の分母が 0、つまり

$$\gamma(\exp(\alpha L) - 1) = 1 \quad (2)$$

を満たすことが必要である。形式上 $i_0 \rightarrow 0 \Rightarrow i \rightarrow \frac{0}{0} \neq 0$ であり、 i_0 が 0 に限りなく近づいても有限の電流が流れることを要求している。この式は Townsend の火花発生条件式と呼ばれる。このときの電圧を火花電圧という。式 (2) を満足するとき、連続供給がなくともたった 1 つの偶存電子によって自動的に電流が流れる¹。

2.3 火花電圧

火花電圧 V_c と他の物理量 (電場 E 、極板間隙 L 、圧力 P (図 1)) の間に成り立つ関係がある。

2.3.1 相似則

電場が一様であるとする、 $E \propto \frac{1}{L} \propto P$ なので $EL = V = \text{const.}$ となって、積 PL を一定にしておけばいつも同じ電圧 V_c で放電を開始する。これは α 作用によって間隙 L で生成される電子の数がいつも同じであることを意味し、 $\alpha L = \text{const.}$ でもある。よって、 PL 、 $\frac{E}{P}$ が等しければ、それぞれ同じ V_c 、 $\frac{\alpha}{P}$ が得られる。

2.3.2 Paschen 曲線

上述から、 V_c は PL の、 $\frac{\alpha}{P}$ は $\frac{E}{P}$ の関数である。 $\frac{\alpha}{P}$ と $\frac{E}{P}$ に関して、気体の種類に依存する以下の半実験式が知られている。

$$\frac{\alpha}{P} = A \exp\left(\frac{-BP}{E}\right) \quad (3)$$

これと $EL = V$ および式 (2) より、火花電圧 V_c について

$$V_c = \frac{BPL}{\log APL - \log \log\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right)} \quad (4)$$

という PL の関数が得られる。これは Paschen 曲線と呼ばれる (図 2)。 V_c を最小にするような PL が存在する。

¹ 火花電圧は電子 1 個に対して 1 個の 2 次電子を生成するための電圧である。実際、電子の増殖が起こるには幾分か過剰電圧が必要になる。

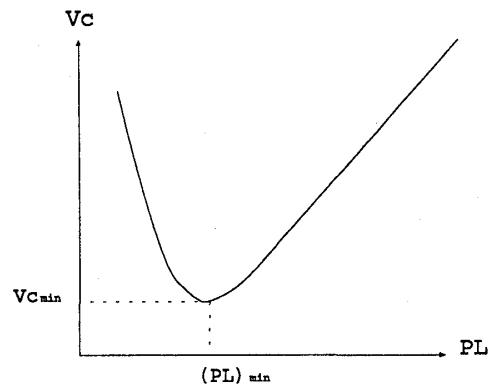


図 2: Paschen 曲線 V_c を最小にするような PL が存在する。

2.4 グロー放電の概観

図 1(b) 中の領域 2 をグロー放電という。チューブ管を用いたグロー放電の概観を図 3 に示す [2]。グロー放電は大きく分けて陰極降下部 (または陰極暗部-Cathode dark space、クルックス暗部とも呼ばれる。陰極表面から負グロー (Negative glow) の前端に到るまでの部分を Cathode layer という。) と陽光柱 (Positive column) の 2 つの領域からなる。陰極降下部は極板間の電圧降下の大部分を担っている。陽光柱は+イオン密度と電子密度がほぼ等しくプラズマ状態²にある。陽光柱は単に陰極降下部と陽極の間のリード線の一部とみなせると考えられ、実際極板間隙を小さくしていくと、その他の領域は変化せずに陽光柱のみが短くなっていく。従って十分に極板間隙が小さければ電圧降下にはほとんど寄与しないと考えられる。

陰極降下部と陽光柱の間は、負グロー、Faraday 暗部からなる。Faraday 暗部では、陽光柱から流れてきた+イオンと陰極降下部から流入してきた電子が混ざり合い、プラズマ状態を形成している。その下で、境界条件に従って+イオン、電子の拡散が起こり定常状態に到る。

2.5 準 2 次元系への縮約

2.5.1 2 層モデル

上述のように、グロー放電の機構は主に陰極降下部と陽光柱から構成される。陰極降下部は極板間の電圧の大部分を占め、電流-電圧特性にみられる非線形抵抗をもつ。一方、陽光柱は単にリード線の一部、すなわち線形抵抗とみなせる。このことを利用した理論的研究がなされている ([3] ~ [5])。電極間隙が小さい限り、放電の中心的役割を果たすのは非線形電圧降下を示す陰極降下部である。そこで、放電現象を陽極ないし陽光柱と陰極降下部からなるシステムとして考え、負グロー・ファラデー暗部をその 2 次元境界面とする 2 層モデルが考案された。これは 3 次元の現象を準 2 次元の現象に縮約したことを意味する³。実際のところ、各層が何に対応するかは問題に依存する⁴。今の 2 層の選択では、境界面は負グローおよび Faraday 暗部に対応することになる。2 層モデルのスキームを図 4 に示す。

² グロー放電は弱電離プラズマである。

³ 実験系においては昔から準 2 次元の現象が観測されている [32]。

⁴ 各層は、どの部分の発光現象が観測されるかに依存し、実際 [3],[5] では異なる選択をしている。

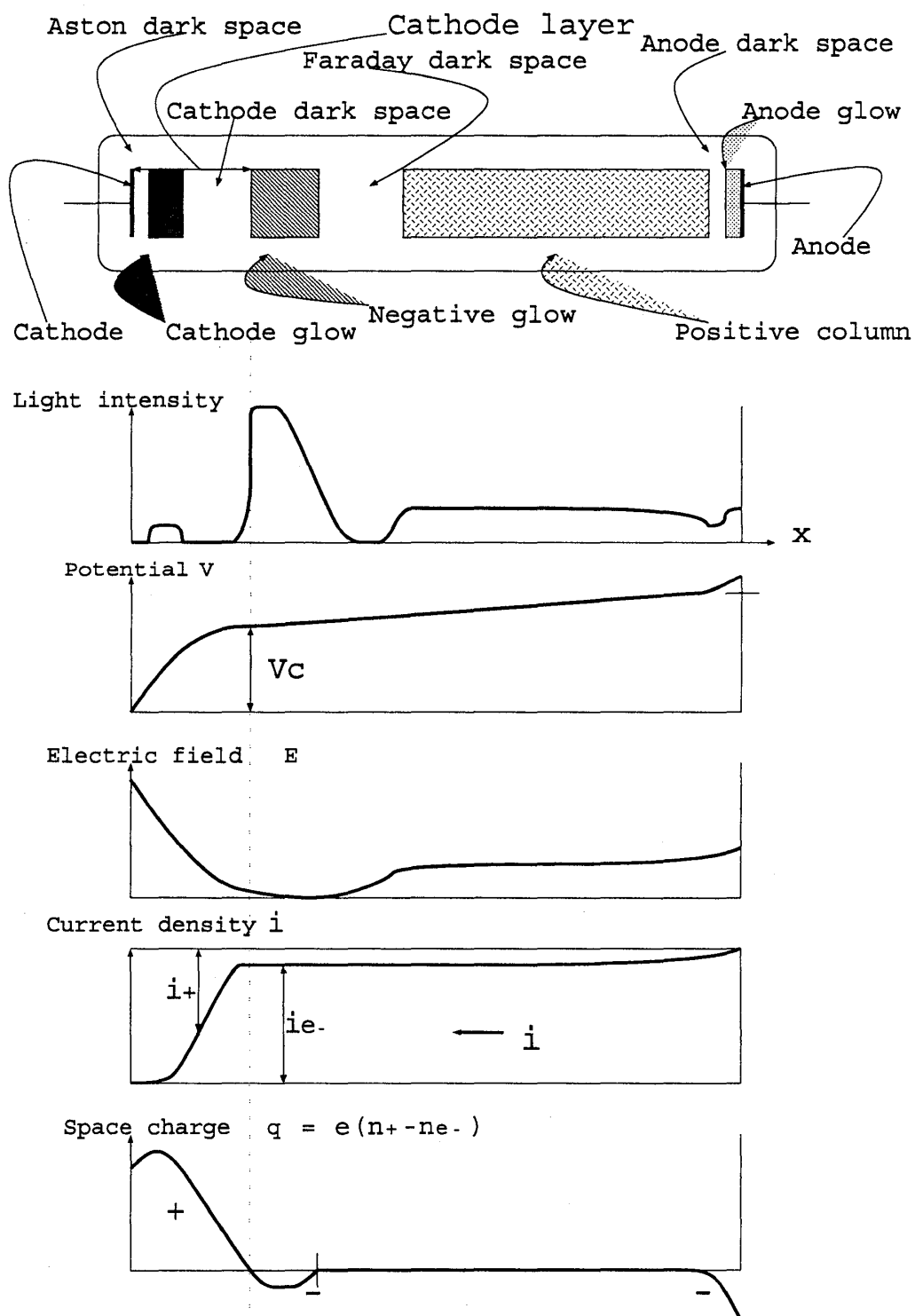


図 3: チューブ管を用いたグロー放電の概観とそれに関与する物理量の分布。各々の部分で、また、気体の種類によって発光色は異なる。 n_+ : +イオン密度、 n_e : 電子密度

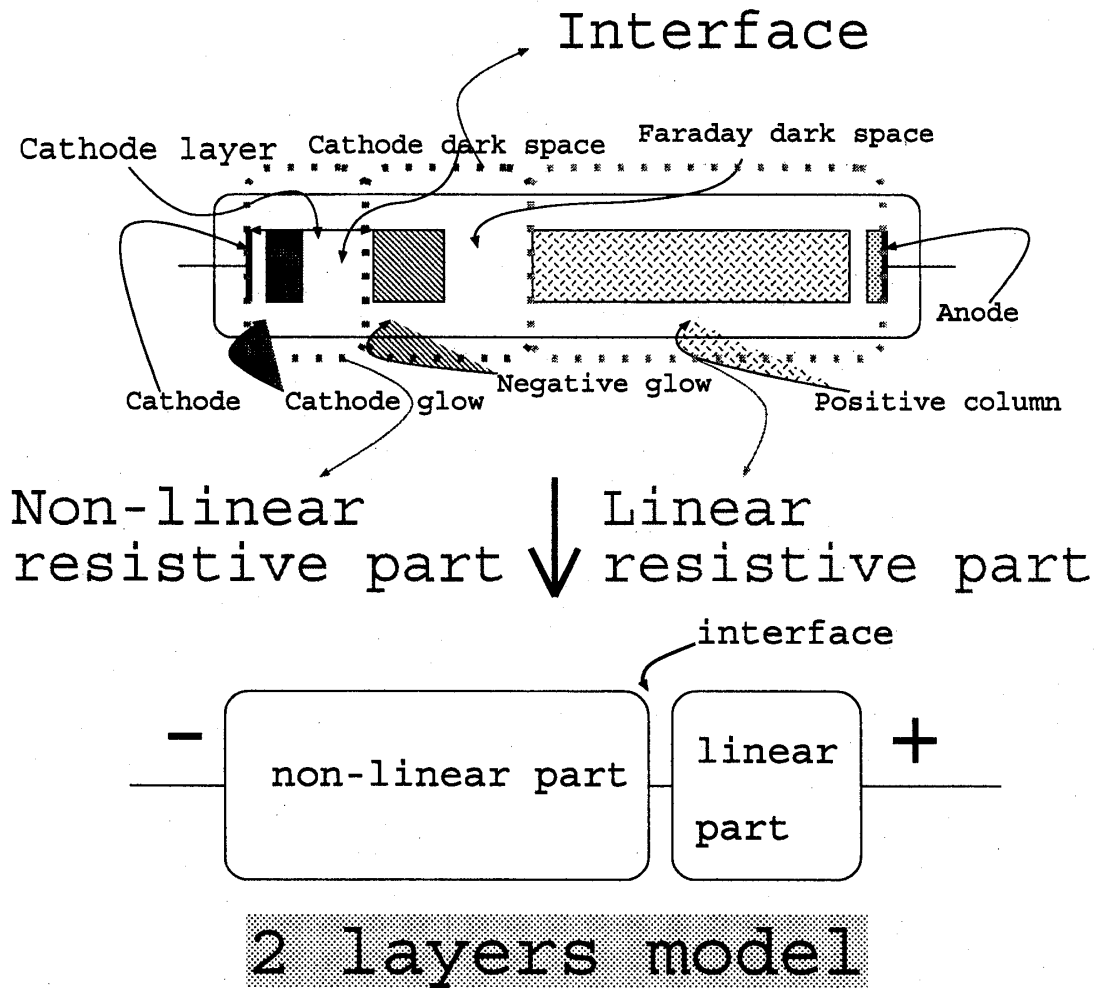


図 4: 2層モデルのスキーム。ここでは放電現象を陽極ないし陽光柱と陰極降下部からなるシステムとして考える場合。極板間隙が小さいとして各層の間隙方向の空間依存性は考えない。陽極ないし陽光柱を線形抵抗部分、陰極降下部を非線形抵抗部分とする。観測点を2層間の2次元境界面とする。境界面は負グローおよび Faraday 暗部に対応することになる。

2.5.2 2成分反応拡散系による記述

放電はプラズマ現象であり、その説明には伝統的に荷電粒子に関する運動論的記述がなされる。上述の2層モデルを採用した放電系においても同様に、運動論的記述から2成分反応拡散方程式に帰着された[6, 5]⁵。そのモデルでは、空間一次元において定常パルスや非定常なパルスの運動、パルスの分裂などの動的な興味深い現象が見られた⁶[5]。

次に、この論文の主題である実験を紹介する。

⁵[5] では、空間離散版として電気回路の結合系でも表現している (等価回路表現)。

⁶最近では極板に半導体を用いた研究が盛んなようである ([7]~[9])。

3 注目する実験

我々が注目する興味深い実験がある [1]。この章ではそれについて述べる。

3.1 実験

図 5 のような実験装置を考える。陰極にニッケル、陽極にはガラスで囲まれた透明な金属酸化物 ITO(indium-tin-oxide) からなる平面極板を用いており、放電活性部位は $3\text{cm} \times 3\text{cm}$ 、極板間距離は $100\mu\text{m}$ である。極板間には低圧の空気が入っていて、dc 電圧と直列抵抗につなげられている。光強度の空間分布は透明な陽極を通して観測される。

操作パラメータは極板に流れ込む電流 I と気体の圧力 P である。典型的な実験では、供給電圧と可変抵抗を固定して電流および極板間電圧振舞いを観測するが、この実験においては流れる電流を一定に保つように操作している。固定する電流の値に応じて放電の振舞いの変化を見ていく。

火花電圧よりも高い電圧をかける。放電開始 ($I \sim 0.1\text{mA}$) と同時に典型的サイズを持つ孤立した 1 スポットが観測される ($I < 0.3\text{mA}$)。電流を上げていくとすぐに孤立スポットは動き出し ($I \geq 0.3\text{mA}$)、数も増え出す (図 6)。このスポットは衝突しても壊れずソリトンのような振舞いにみえる。さらに上げていくと、スポットどうしは分子的局在構造を形成 (図 6(e)~(m)) しながら極板中を動き回る。スポット数や局在構造の速度は電流に対し単調に増加していく。スポット数が大きくなるほど局在構造の振舞いは複雑になる。4, 6 個のスポットからなる局在構造がそれぞれ (図 6(g),(h)), (図 6(i)~(m)) に示されている。それぞれの状態はスポット数を保ったまま図のような配置にスポットの配置換えが間欠的に起こる。さらに電流を上げていくと、スポットどうしがつながって紐状になって動く。しまいに紐は閉じたループになる (図 6(n))。操作パラメータ電流 I 、圧力 P を変えていったときの振舞いの相図は図 7 のようになる。 $I \rightarrow$ 大としていくにつれ、順に孤立スポット、分子的集合スポット、紐、ループが現れることがわかる。

3 個以上のスポットが存在する時、突然 1 個のスポットが消滅し、それと同時に別の場所に新たなスポットが出現することがしばしばある。3 つのスポットが存在する場合についてこの現象の典型例を図 8 に示す。束縛された 2 つのスポットのうちの 1 つが消滅し (図 8(a)→図 8(b))、離れた位置にあるにもかかわらず、孤立したもう 1 つのスポットの近くに新しいスポットが出現する (図 8(b)→図 8(c))。これを *Teleportation* と呼んでいる。

3.2 再現すべき振舞・示唆

再現すべき振舞 再現するべき重要な振舞いを以下に挙げる。

- スポットが出現し、 $I \rightarrow$ 大でスポット数 $\rightarrow$ 大。
- スポットが分子的な局在構造を形成し、構成スポット数 $\rightarrow$ 大では、いろんな局在構造が間欠的に出現する。
- スポット・局在構造が動く。

示唆 上述のような多様な振舞いに対する実験者 (那須野) の示唆がある。それは、固定された電流 I に対するスポット数の保存、動的な分子的局在構造の形成、および *Teleportation* が起こるには、絶縁破壊の過程での強い非線形性と電流一定下での *global constraint* が重要な役割を果たしているだろうということである。

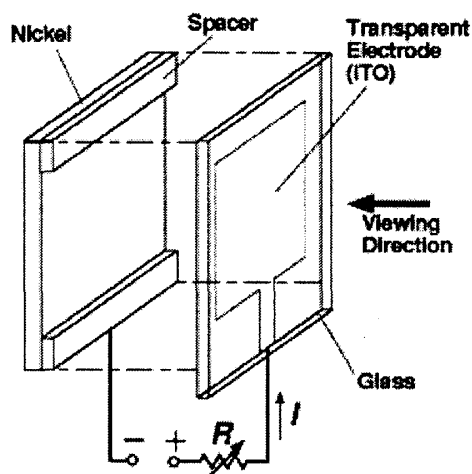


図 5: 実験装置の模式図。陰極 ($50\text{mm} \times 50\text{mm} \times 3\text{mm}$) はニッケル、陽極 (活性部位が $30\text{mm} \times 30\text{mm}$) はガラスで囲まれた透明な金属氧化物 ITO(indium-tin-oxide) からなり、 $100\mu\text{m}$ だけ隔てられている。極板間には $40 \sim 50\text{Torr}$ の空気が入れている。(S.Nasuno, Chaos 13(2003) 1010. 編集者の承諾を得て転載)

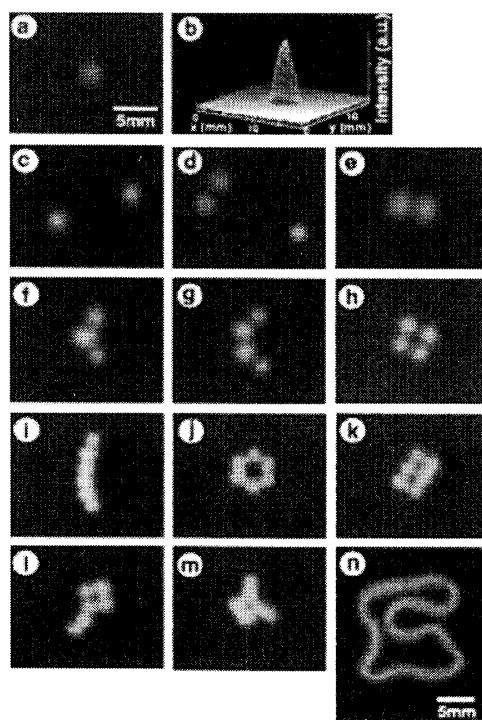


図 6: 電流 I を大きくしていったときの典型的局在パターンのスナップショット。(a) 孤立 1 スポット, (b) 孤立 1 スポットの光強度分布, (c) 孤立 1 スポットが 2 個, (d) 時間的に束縛された 2 スポットと孤立 1 スポット, (e) 2 スポットの 2 原子分子的局在構造, (f) 3 スポットの H_2O 的配置, (g) and (h) 4 スポットからなる「分子」, (i)~(m) 6 スポットからなる「分子」, (n) 波打つように動くループ (S.Nasuno, Chaos 13(2003) 1010. 編集者の承諾を得て転載)

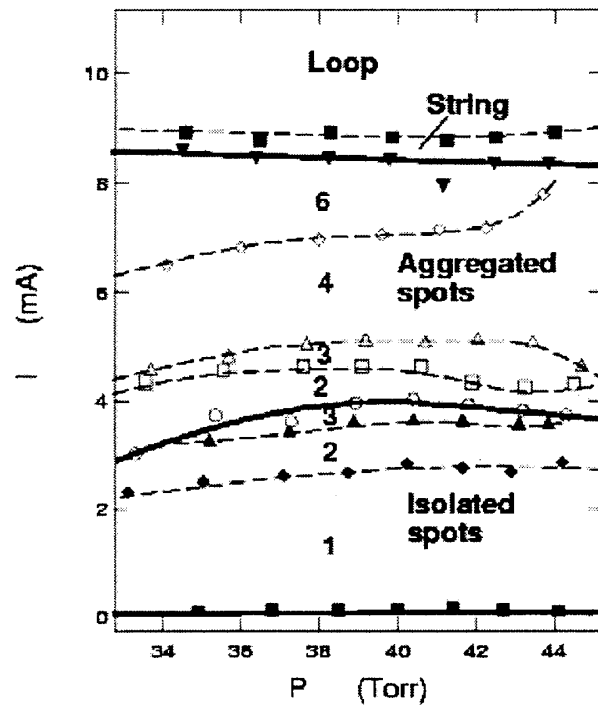


図 7: コントロールパラメータ電流 I 、圧力 P を変えていったときの振舞いの相図。(S.Nasuno, Chaos 13(2003) 1010. 編集者の承諾を得て転載)

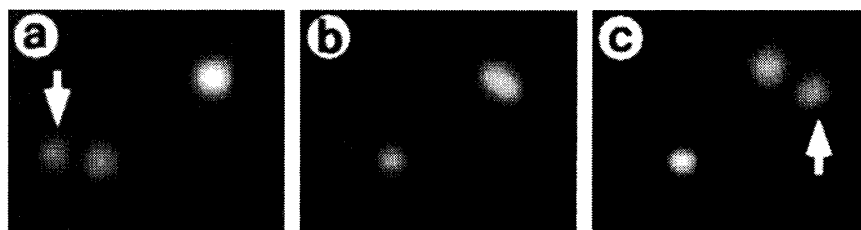


図 8: 3つのスポットが存在する場合について、[Teleportation]の典型例のスナップショット。束縛された2つのスポットのうちの1つが消滅し ((a) $\rightarrow$ (b))、離れた位置にあるにもかかわらず、孤立したもう1つのスポットの近くに新しいスポットが出現する ((b) $\rightarrow$ (c))。(S.Nasuno, Chaos 13(2003) 1010. 編集者の承諾を得て転載)

4 モデル

4.1 モデル構築のための仮定

実験を再現するモデルを構築するにあたって、以下の仮定をする。

1. 実験で観測される現象は自続放電開始直後である、つまり前期グローであるとする。
2. 上述の準2次元2層モデルを採用する。
3. 現象が電流密度と空間電荷によって記述される。ここで起こっている現象は詰まるところ電荷の輸送プロセスである。したがって、電流がどのように流れ、電荷がどのように分布するかの理解を目指す。
4. 極板間では複雑なダイナミクスが起こるが、電荷の総和は変化しないと仮定する。つまり、**総電荷が時間的に一定**であることを要求する(4.2.1 脚注および Appendix 参照)。
5. 採用する2層モデルの境界部分に、非線形層からの**電荷の流れ込み**がある。一様定常グローに関し、2層モデルの境界部分の空間電荷は0であるが⁷、境界部分での気体分子の励起、電離および再結合機構による空間電荷分布を考慮し、境界部分に電荷の次元をもつ変数を用意する。4により、総電荷一定の下でのこの流れ込みには、制限が加えられる(4.2.4 参照)。
6. 実験条件である**総電流 I は操作により一定**に保たれている。
7. 気体の圧力効果を考慮する。[6]の実験によれば、圧力効果は実効的に気体中を流れる電流密度の拡散によって表現される⁸。圧力と電流の拡散係数は単調増加の関係にある⁹。我々もこの実効的圧力効果を採用する。
8. 実験に従い、コントロールパラメータは総電流 I と圧力、すなわち電流の拡散係数とする。
9. 極板間のローカルな電流-電圧特性をこちらから与える。典型的実験において、グロー領域の一様定常状態での特性は電流に関して log-scale での S 型を与える(図 1(b))。そこで一般の場合にもローカルにはこの特性に従うものと仮定する。
10. 現象をマクロに記述する。ローカルに位置した同様な回路が、2次元平板上でつながれた、回路の結合系として表現する。

4.2 モデル

モデルを提示する。図 9 において、平方極板(面積 S) および極板内部からなる系を「システム」と呼ぶ。そのシステムとつながれる直流電源電圧 ϵ 、可変抵抗 R_{ex} からなる部分を「外部回路」と呼ぶ。外部回路に流れる電流 I は操作によって一定に保たれている。まず、空間離散版としてシステムを回路の結合系として表現する。後に空間連続極限をとる。

⁷ 負グローには負の空間電荷が存在するが(図 3)、ここでは無視している(4.2.4 参照)。

⁸ これは、放電系を2成分反応拡散方程式で記述し、その1成分として電流密度を採用する状況での議論である。

⁹ 電流密度の拡散係数が大きいほど放電活性領域が小さくなり、これが実験での圧力 $\rightarrow$ 大の効果に対応していることからきている。

External circuit

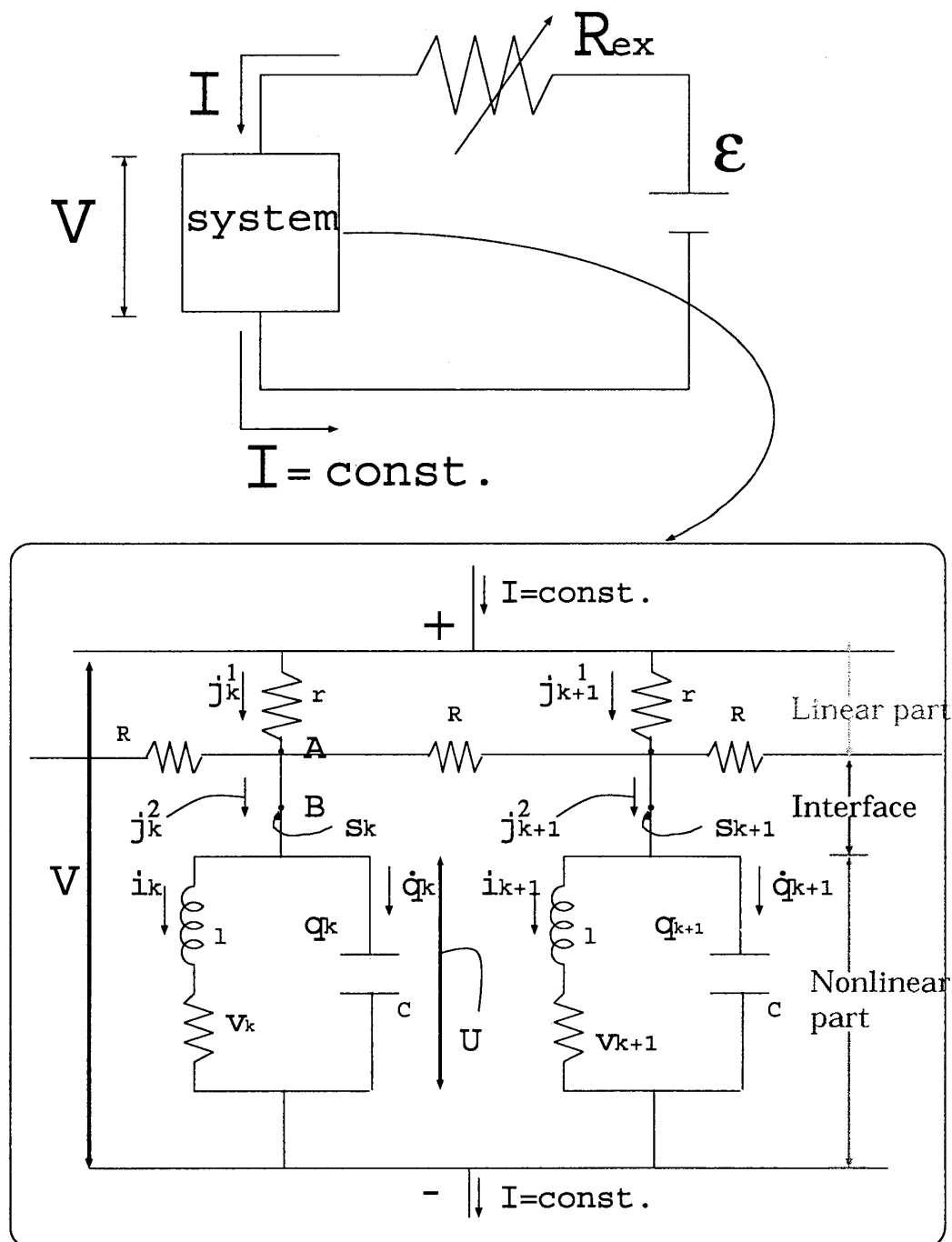


図 9: モデルの 1 次元的模式図。システムは図に示された回路 k (以下、「素子 k 」と呼ぶ) の N 個の結合系からなっている。素子 k は線形抵抗 R によって隣接した同様な回路につながれ、その各々が外部回路とつながれている。実際に扱うのはこれを 2 次元に拡張したモデルである。

4.2.1 システム - 回路結合系モデル -

システムに対するモデルを考える。図9において、システムは図に示された回路k(以下、「素子k」と呼ぶ)のN個の結合系からなっている。その素子kは線形抵抗Rによって隣接した同様な回路につながれ、その各々が外部回路とつながれた回路の結合系からなる。k番目の回路について、図において、線形抵抗r、AB間を流れる電流をそれぞれ j_k^1, j_k^2 、コンデンサーに蓄えられている電荷を q_k 、ローカルな電流-電圧特性として電流のlogの3次関数で与えられた非線形電圧降下を v_k 、コイルの自己インダクタンスを l 、コイルと非線形抵抗に流れる電流を i_k と表示する。

線形抵抗rは陽光柱および陽極で構成される線形層に、図のUの部分は陰極降下部からなる非線形層に、その中間がそれらの境界面(負グローおよびFaraday暗部)に相当する。実際の放電現象における陰極降下部での正の空間電荷分布に帰因する電圧降下に対応するように、Uの部分の電圧降下が主に空間電荷 q_k によって担われるように構成されている(図3,9)。

流れ込み電荷 (flowing charge) s_k がB点に存在するものとする¹⁰。B点に、コンデンサーと性質が同様であるが由来の違う「電荷溜め」があると考えても良い。これは、気体分子の励起、電離および再結合機構を考慮するものである。また、モデルに対し総電荷が一定であると仮定する¹¹。この結果、この流れ込み電荷 s_k がこの仮定と総電流一定の条件を満たすように定義される。

このモデルは、[4]・[5]の電気回路モデルをアレンジしたものである。

A点での電荷保存則(キルヒホフ第1)より、

$$j_k^1 - j_k^2 + \left[-\frac{1}{RC} \{ (q_k + s_k) - (q_{k-1} + s_{k-1}) + (q_k + s_k) - (q_{k+1} + s_{k+1}) \} \right] = 0 \quad (5)$$

B点での電荷保存則より、

$$j_k^2 - (i_k + \frac{dq_k}{dt}) = \frac{ds_k}{dt} \quad (6)$$

領域Uでの電圧のバランス(キルヒホフ第2)から

$$l \frac{di_k}{dt} + v_k - \frac{q_k}{C} = 0 \quad (7)$$

(5),(6),(7)に加えて上述の総電荷一定、総電流一定、それらを満足する流れ込み電荷 s_k の定義、それに圧力効果を考慮し、変数変換 $q'_k = q_k + s_k$ 、および空間連続極限(例えば i を電流密度として、 $i_k \rightarrow idS$ など)をとると、以下の2成分反応拡散方程式になる(導出はAppendix)。

$$\frac{dq'}{dt} = \frac{V}{r} - \frac{q'}{rC} - i + D_{q'} \Delta q' \quad (8)$$

¹⁰B点にて流れ込み電荷 s_k があるとするには理由がある。B点は2層モデルの境界面に対応しており、定常グローにおける負グローおよびFaraday暗部の位置に対応する(図3)。この領域では、陰極降下部(非線形層)から流れてくる電子と陽光柱(線形層)からの+イオンが混ざり合い、拡散・気体励起・衝突電離および再結合が起こっており、複雑な「反応過程」が存在すると考えられる。一方、一様定常グローでは、この領域は陽光柱のように極板方向2次元平面中の放電領域の任意の点でプラズマ状態にあり、空間電荷は0である(図3、ただしここでは負グローでの負の空間電荷を無視する)。これらを総合して、初期(不安定)一様定常状態において0となるような流れ込み電荷 s_k がB点にて存在すると仮定する。

¹¹極板間隙が微小であるという設定の下で、ローカルな空間電荷の初期値からのずれの和 $\sum_{k=1}^N \{ (q_k + s_k) - q_k^0 \}$ が0であること、すなわち総電荷一定を仮定する。というのも、システムにおいて極板に流れ込む総電流が正味0で時間的に一定という条件下では、ローカルな空間電荷の変化は極板内部の原因でのみ起こりうる。つまり電離による電荷の生成、消滅と、隣接素子からのコンデンサーCへの電荷の流れ込みなどの輸送によってのみ起こるので、総電荷は決して変化せず初期値 Q_0 のままであると考えられるからである。 s_k は一般に $i_m, q_m (m = 1, 2, \dots, N)$ の未知関数であり、こちらから定義することになるが、その際総電荷一定をア・プリオリに要請することでその関数形が制限される。

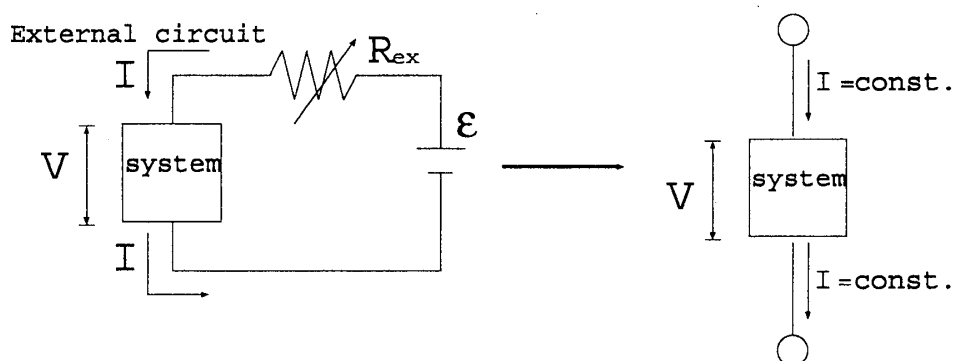


図 10: I = 一定を認めると、システムは自身で閉じる。よって外部回路は以降考えなくて良い。

$$\frac{di}{dt} = \frac{q'}{lC} - \frac{s}{lC} - \frac{v(i)}{l} + D_i \Delta i \quad (9)$$

$$s \equiv \frac{i}{I} \{Q' - C \int v(i) dS\} \quad (10)$$

ただし、 $D_{q'} = \frac{1}{RC}$ 、 $Q' = \int q' dS$ (= システム内総電荷) とする。

4.2.2 無次元化

上で得られた方程式 (8),(9),(10) を無次元化する。

$\tilde{i} = \frac{i}{i_c}$ 、 $\tilde{v} = \frac{v}{v_c}$ 、 $\tilde{q} = \frac{q'}{Cv_c}$ 、 $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$ とし、再び $\tilde{i} \rightarrow i$ 、 $\tilde{v} \rightarrow v$ 、 $\tilde{q} \rightarrow q$ 、 $\tilde{t} \rightarrow t$ とすると、以下の式になる。

$$\tau \frac{dq}{dt} = V - q - ai + \Delta q \quad (11)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{a} \{q - s - v(i)\} + D \Delta i \quad (12)$$

$$s \equiv \frac{i}{I} \{Q - \int v(i) dS\} \quad (13)$$

ただし、

$$\tau = \frac{rC}{I}, \quad a = r \frac{i_c}{v_c}, \quad D' = \frac{D_i}{D_q}, \quad D = \frac{D'}{\tau}, \quad \xi^2 = rCD_q \text{ (特徴的空間スケール) である。}$$

4.2.3 外部回路

那須野の実験と対応させるため、今のモデルでは I が一定に操作されているが、 I は一般にはシステム内のダイナミクスによって決まり、したがって時間変化する。 I を一定に操作するためにはシステムで I が時間変化するのを抑制する機構が必要となる。これは電源電圧 ϵ または外部抵抗 R_{ex} が時間変化するを意味している。

このような操作は、実験では「定電流動作」によって可能であると考えられる。 ϵ ないし R_{ex} がそれ自体でシステムになっていて、 I が一定になるように時間変化するというものである。いずれにせよ我々のモデルでは I が一定に操作されていると認めることにする。

I = 一定を認めると、システムは自身で閉じる。以後外部回路を考慮する必要はない (図 10)。

4.2.4 流れ込み電荷 s の意味

モデルはグロー放電に関して開発された 2 層モデルを採用しており、実際以下にみるようにシステムの初期条件を一樣グロー放電と選択する。グロー放電に対応するように、電圧降下の大半を担う陰極降下部 (非線形抵抗) に大きい正の空間電荷が分布するが、陽光柱 (線形抵抗部分) はプラズマ状態にあるとして、空間電荷ははじめから考慮されていない。一方負グローおよび Faraday 暗部からなる境界部分には「流れ込み電荷 s 」の変数が用意されていて、空間電荷が分布する余地を残している。

一樣グロー放電について、境界部分全体の空間電荷は殆んど無視できるとしている¹²。しかし、我々の観測する領域は主に自統放電開始付近であり、境界部分では気体励起・電子の衝突電離および再結合による複雑な動的振舞いが期待される¹³。つまり、境界部分での空間電荷が 0 の状態は不安定であり、正ないし負の空間電荷の分布が起こると思われる¹⁴。従って、境界部分には総電荷一定という制約の下で、上述の効果による流れ込み電荷 s という形で空間電荷が分布する。正の空間電荷が分布するとき¹⁵、マクロには非線形層の電荷 (つまり総電荷) の一部が境界部分に流れ込む¹⁶ (図 11(a))。負の空間電荷が分布する時は、陰極降下部にはじめよりも大きい正の空間電荷が分布することを意味する。この流れ込みの総量は s の積分

$$h \equiv \int s dS \quad (= Q - \int v(i) dS) \quad (14)$$

である。 h は非線形層から境界部分へ移る電荷の総量であり、間隙方向のマクロなダイナミクスとしての変数になっている。我々が観測するのは、間隙と垂直な方向の準 2 次元上のパターンダイナミクスであり主に local な反応拡散プロセスによって発展するが、一方間隙方向では、非線形層と境界部分の間での電荷の global な授受プロセスが行なわれる¹⁷。これらのプロセスのスキームを図 11(b) に示す。この h はシステムの振舞いを制御するパラメータであることを後に見ることになるだろう。

4.3 システムの操作

実験と同様なパラメータ操作を行い、システムの振舞いを観察する。 $i \geq i_u$ にて放電が起きているとして、それを満足する i のパターンダイナミクスをみていく。パターンダイナミクスの自己組織化という観点も考慮に入れ、初期条件、システムの操作の設定をする。システムの初期条件は (i, q) を [一樣定常状態 $(i_u, q_u) + \text{ノイズ}$] とする。まず、この設定下におく素子や、空間 decouple なシステムがどのような性質をもつかを見る。その後問題とするシステムの初期値と操作について述べる。

¹² 実際負グローには負の空間電荷が分布する。

¹³ 定常グローに関する境界部分は、電離と再結合の競合の結果至る (プラズマ) 定常状態にある。

¹⁴ 現実の現象では自統放電開始直後に Townsend 放電が観測される。この場合間隙方向の空間電荷の非一様性は供給電圧による電場の分布を乱すほどではない。我々が注目するのは Townsend 放電から一樣グロー放電への過渡期である (前期グロー)。

¹⁵ 境界部分に関して、電離が盛んな状況では通常負の空間電荷が分布する。(グロー放電ではこれが負グローに対応する。) 従って、正の空間電荷が分布する場合は初期一樣グローの場合よりも再結合が盛んであると解釈する方が適切なかもしれない。

¹⁶ 間隙が小さいとして間隙方向の空間依存性を無視しているので、非線形層・境界部分という「サブシステム」の間での電荷の授受という意味である (ただし、モデルに関して実際境界部分に分布する電荷は小さい)。

¹⁷ 電流に関する global 結合と総電流一定の操作の下で総電荷一定を要求した結果、このような global な授受プロセスに帰着する (Appendix 参照)。

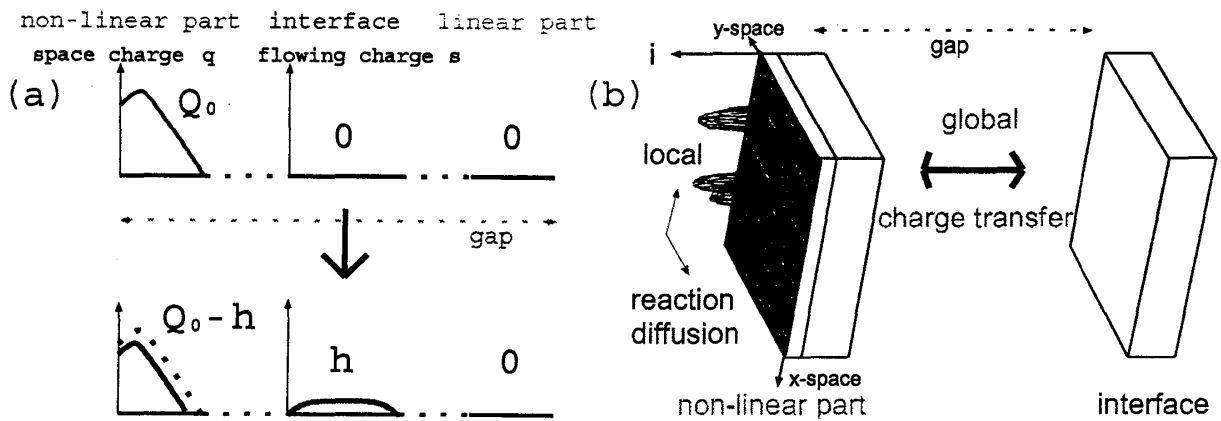


図 11: (a). 非線形層・境界部分間の電荷の授受プロセスのスキーム。h は $Q_0 - h$ に比べて十分小さい。(b). 非線形層での local な反応拡散プロセスと非線形層・境界部分間の電荷の global な授受プロセスの概略図。例として、非線形層での電流密度 $i(x, y)$ のパターン (3-spots) を示した。

4.3.1 素子の性質

decouple で電流が一定という操作のない素子のヌルクライン図 12 を示す。定常状態は図 12 の点 S である。 $i_u < i_c$ では定常状態は安定であり、 $i_u > i_c$ で定常状態が不安定化し振舞いがリミットサイクル¹⁸になるようにパラメータ $a(= r \frac{i_c}{v_c})$ を選ぶ。

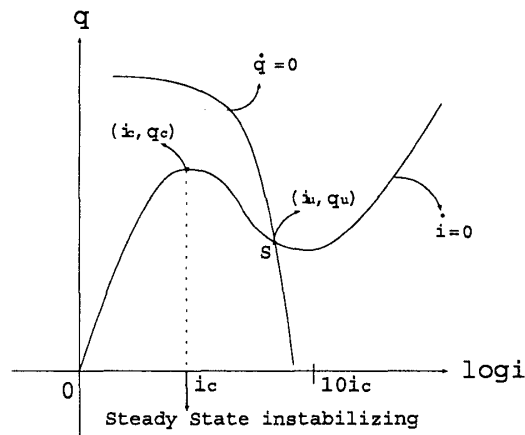


図 12: decouple な素子に関するヌルクライン。 $i > i_c$ で定常状態 i_u が不安定化するように線形抵抗 r を選ぶ。

4.3.2 空間 decouple なシステムの性質

空間 decouple なシステムの振舞いを見ておくことは、後のモデル (11)~(13) の振舞いの理解を助けると思われる。上述のリミットサイクル素子の空間 decouple、すなわち global 結合になって

¹⁸弛張振動 (relaxation oscillation) である。

いるシステムの無次元化した方程式は、

$$\tau \frac{dq_k}{dt} = V - q_k - ai_k \quad (15)$$

$$\frac{di_k}{dt} = \frac{1}{a} \{q_k - s_k - v(i_k)\} \quad (16)$$

$$s_k \equiv \frac{i_k}{I} \left\{ Q - \sum_{m=1}^N v(i_m) \right\} \quad (17)$$

$$\left(\tau = \frac{rC}{I}, \quad a = r \frac{i_c}{v_c}, \quad V = a \frac{I}{N} + \frac{Q}{N} \right) \quad \text{である。}$$

同様にリミットサイクル素子を非線形 global 結合させたことで、システムとしては複雑な振舞いになることが期待される。カオスの次元という観点からシステムの大域的性質をしてみる。図 13(a),(b) にそれぞれ $I=1.1N$ ¹⁹, $2.1N, 5.1N$, $N=20, 40, 80, 160$ に関する、システムのリアプノフスペクトル密度^{20,21}[37]と素子のダイナミクスを示す。図 13(a-1) の $i_u=1.1$ に関してはリアプノフ数が N オーダーであり、システムは高次元カオスの状態にある (高次元カオス相)。各素子のダイナミクスは非常に複雑であり、互いに「電流の取り合い」をしているかのようなのである (図 13(b-1))。 $i=2.1$ では互いに同期したいくつかのグループに分かれて時間変化するクラスター状態にある (クラスター相 ($i=2.1$ では 5-clusters))。 $i=5.1$ ではリアプノフ指数の大半が 0 に集中しており、ダイナミクスは高次元カオス状態とクラスター状態の間で間欠的に振舞う (間欠相)。システムが時間変化するパラメータ領域において、特徴的性質は上述の 3 つの相に分かれる。図 14 に (リアプノフ指数が正の個数)/(システムサイズ N) ($=d_\lambda$ とする。)を示した。この図は、カオスの次元という観点において大まかな相図としての資格を持つ²²。

上の 3 つの特徴的な相は、global 結合モデルのプロトタイプである Globally Coupled Map (GCM)[23][24] の振舞いと良く似ている。GCM はカオス素子を結合したもので、上述の、各素子が流れ込み電荷の和 $\sum_{k=1}^N s_k$ ($\equiv h$ と定義) を通してのみ互いに相互作用する [リミットサイクルの非線形結合モデル] とは異なるが、結合系としてのシステムの振舞いは同等であるようにみえる。上のモデルの高次元カオス相、クラスター相、間欠相がそれぞれ GCM の非同期相、秩序相、部分秩序相と対応していると考えられる。クラスター相、間欠相は素子のダイナミクスを見る限り GCM との対応があるようである。GCM の非同期相の特徴は、マクロ変数 (平均場) が集団運動²³ ([24]~[30]) することである。GCM の非同期相の特徴は素子のダイナミクスから判断することはできず、マクロ変数のダイナミクスの特徴から判断される。モデル (15)~(17) の高次元カオス相は GCM の非同期相と対応しているだろうか？

¹⁹ 各素子の初期値が、 $1.1+$ (初期揺らぎ) ということの意味する。

²⁰ 素子の内部自由度が 2 なので、システムサイズ N といったとき、自由度は $2N$ である。システムのリアプノフ指数のうちその半分は負になるので、大きい方の N 個について「密度」を考えている。

²¹ 図 13(a) を見る限り、システムサイズが小さ過ぎない限りでシステムは extensive 性に漸近すると考えられる。

²² 間欠相は、高次元カオス相、クラスター相とは対称的に、初期条件に依存して振舞いが大きく変わるので、本来はもっと多くのサンプルを示すべきである。しかし、ここではシステムの大域的性質を、やや粗く、薄目でみて性質がいくつかに分かれるのを見ることだけを目的としているので詳しくは調べていない。

²³ システムが高次元カオスにありながら、マクロ変数が長時間スケールの秩序的振舞いをするということが知られていて、集団運動と呼ばれる。集団運動は、GCM において金子が発見したのが最初である [25]。当初、hidden coherence と呼んでいた。

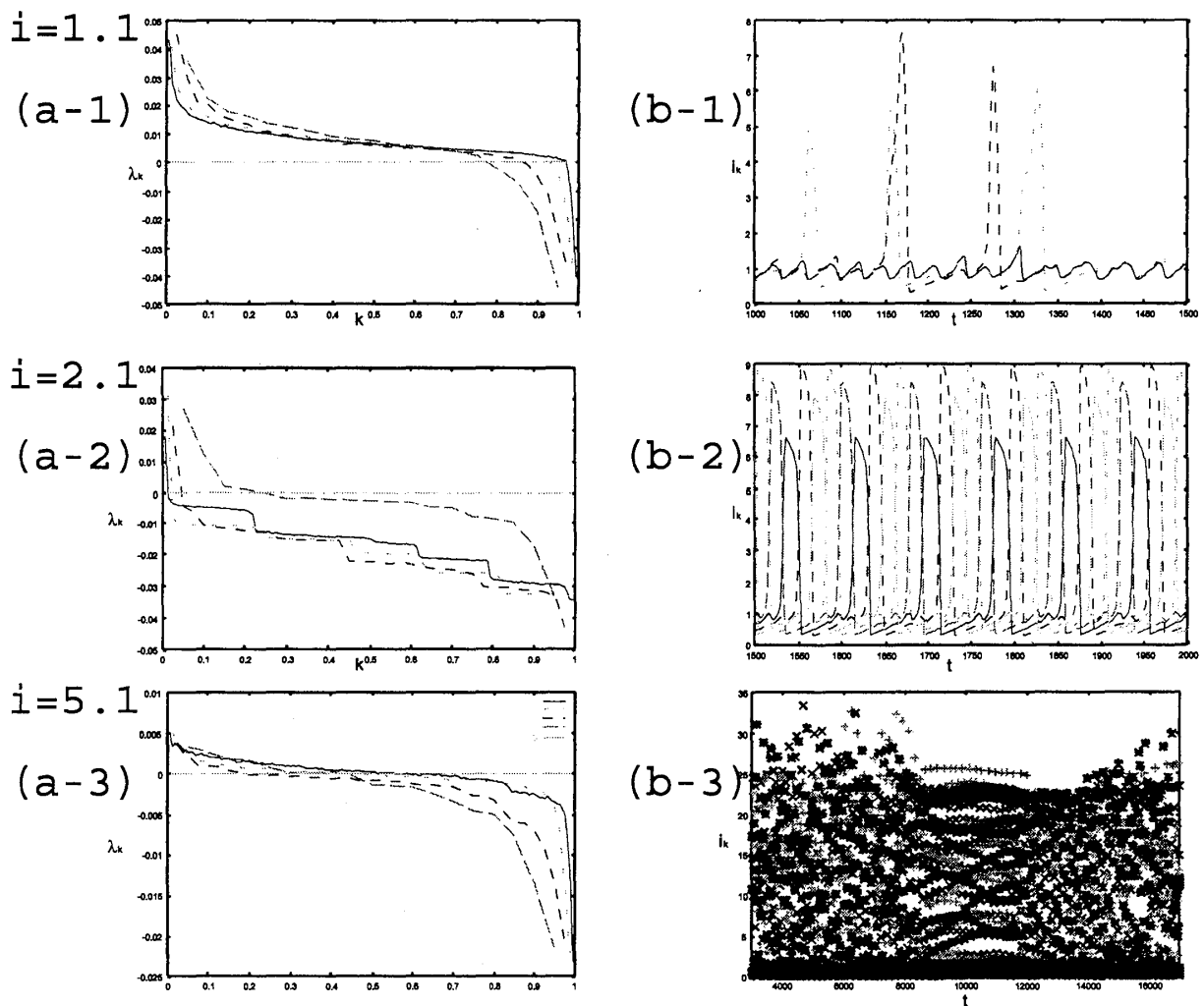


図 13: (a). $i_u = (1)1.1, (2)2.1, (3)5.1$ に関するリアプノフスペクトル。おおまかに分けられる 3 つの相に特徴的なスペクトルになっている。

(b). (a) に対応する各素子の時系列。(1) $i_u = 1.1$ 高次元カオス相, 電流 i の大きい値をとれるものが限られているので「競合」しているように見える。(2) $i_u = 2.1$ クラスタ相。ここでは 5 クラスタ状態である。(3) $i_u = 5.1$ 間欠相。高次元カオス $\rightarrow$ クラスタ $\rightarrow$ 高次元カオスとシステムの振舞いの性質が時間的に変化する。状態の移り変わりの分かりやすさのため $t=6$ ごとにプロットしている。

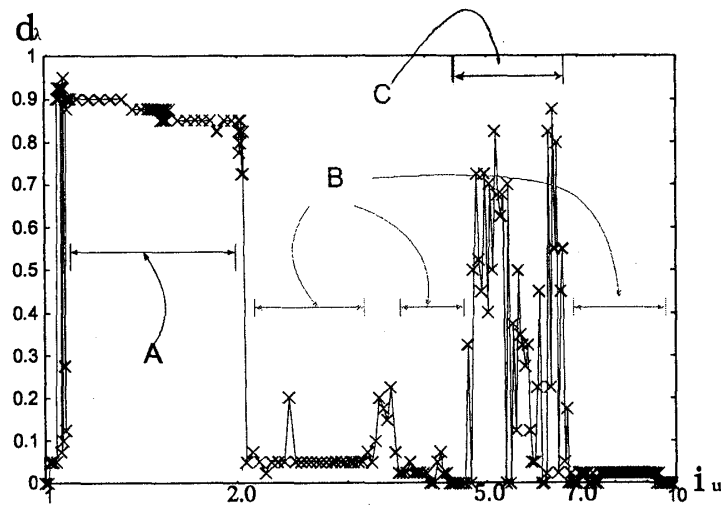


図 14: $N=40$ についての (リャプノフ指数が正の個数)/(システムサイズ N) ($=d_\lambda$) の初期電流 i_u 依存性。相図として見やすいようにプロットをつないでいる。 $i_u < 1.0$, $10.0 < i_u$ では一様定常状態で自明なので省いた。横軸 log スケール。 A. 高次元カオス相 B. クラスター相 C. 間欠相

高次元カオス相 -集団運動- 高次元カオス相 (図 14 の A 領域) についてやや詳しく見ていこう。

この相ではシステムの振舞いは非常に複雑であり、図 13(b-1) の時系列を見ると、互いに同期しておらず、かつ「電流の取り合い」をしているかのようである。図 15 は、 $I=1.1N$ に関する N 個の素子の $i-q$ 平面上の分布のスナップショット ($q > 0.95$ の部分) である。しばらく i の小さい値に滞在したのち、図の A 点で i の大きい値に「汲み上げられる」。リミットサイクルとは異なって軌道は時々刻々その形を変え、軟らかい。総電流が制限されているためか、素子は皆軌道を回転するわけではなく A 点で i の小さい値に引き戻されるものもある。図の赤矢印は途中まで i が大きくなっていった一部の素子が B 点にたどり着けず途中で i が小さくなることを示している。分布のダイナミクスをみていると、システムはある特徴的タイムスケールをもつ。それは特に A 点での素子の「汲み上げ」のタイムスケールで判断すると分かりやすい。このタイムスケールは、素子が単一であるときの特徴的タイムスケールと同じオーダーであるが、今の場合総電流が一定という制約が原因で、システム中の素子では弱い (素子と h のパワースペクトルを図 17 に示す)。

システムのマクロ変数である「流れ込み電荷の和 $\sum_{k=1}^N s_k$ ($\equiv h$ と定義)」の時系列を図 16 に示す。明らかに上で述べた特徴的タイムスケール τ を持っている。しかし、集団運動に対応するゆっくりしたモードがあるかは時系列からは良く分からない。そこで、過去の集団運動研究の知見から、各素子にノイズを入れ、 τ 毎に h の時系列をプロットしてみた (図 18(a-1)~(c-1))。この時系列と合わせてパワースペクトルも示した (図 18(a-2)~(c-2))。 (a)~(c) はそれぞれノイズの大きさが 0.03, 0.05, 0.07 の場合である。図 18 をみると、(a)(c) のタイムスケールが $\sim 10^3$ であるのに対して、(b) のそれは $\sim 10^4$ である。一般にノイズの大きさによってタイムスケールは変化する。これはノイズの大きさに依存して h が分岐することによると考えられる。運動はいずれも弛張振動に近いようである。この長時間モードは集団運動が起きていることを示唆している。一般にノイズが大きいほど、 h の時系列は (τ 毎にプロットした時系列も例外なく) なめらかになっていく。これはノイズが強いと、図 15 A 点での素子の流れがスムーズになるからだとおもわれる²⁴。

²⁴GCM の集団運動における同様な振舞いに関して、[26] をみよ。

モデル (15)~(17) に関して、各素子にノイズを入れた際にみられた長時間モードは次のように解釈できる。高次元カオス相では、総電流一定の制限が原因で、各素子の電流 i_k はある種「競合」状態にある。流れ込み電荷の和 h は、その下で単一素子由来のタイムスケール τ のみならず、より大きいタイムスケールで振動している。各素子の競合的振舞いと h の振舞いは独立ではない。言い換えると、各素子の競合状態の時間変化は h の長時間スケールの規則的振舞いを実現し、逆に h のゆっくりした振舞いに基づいて、各素子は系として安定な競合状態に向かう、ということが逐次起こっていると考えられる。(15)~(17) より h は i が大きい値をとる (以下、「励起」と呼ぶ) 素子の数が大きい程大きい。つまり、 h のこのような振動は励起している素子の数 (のオーダー) が τ だけでなく、より大きいタイムスケールで変動していることを意味している²⁵。

従って要約すると、高次元カオス相において一見単に競合的に振舞っているだけと思われる各素子間の関係が、実は h のより大きなタイムスケールの振舞いを実現するような非自明な相関をもっている。励起状態にある素子の数が τ の他にそれよりずっと大きいタイムスケールで規則的に変動するような振舞い、つまり集団運動が高次元カオスの裏に隠れている、ということである。

h は流れ込み電荷の和なので $N \rightarrow \infty$ (熱力学極限) においてマクロ変数である。モデル (15)~(17) の単位タイムスケールが、観測のそれよりも十分に小さければ、われわれにみえるのは h の長時間スケールの振舞いであるだろう。

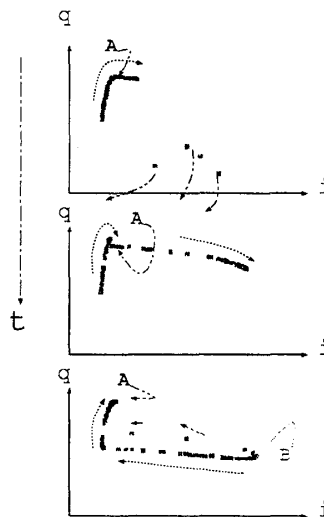


図 15: 高次元カオス相での分布の連続スナップショット ($q > 0.95$) の例。図中の A 点が「ポンプ」のような働きをしている。黒矢印は各要素の軌道方向。赤矢印は B 点までたどり着けずに i が小さくなる少数派の要素の軌道方向。 $i_u = 1.1, N = 1000$

安定性 モデル (15)~(17) のコントロールパラメータは i_u であり、いま、素子の i, q の平均は変化しない。つまり、図 15 の分布のダイナミクスはその「重心」が固定されている。ここでは「重心」は素子の初期値でもある。この初期値 (i_u, q_u) の位置によって、システムの安定性が決まって

²⁵ 総電流一定なので、説明としては不十分であるが、 h と素子の数の関係についてこのように言うのは、素子のダイナミクスが弛張振動的であるという理由に基いている。

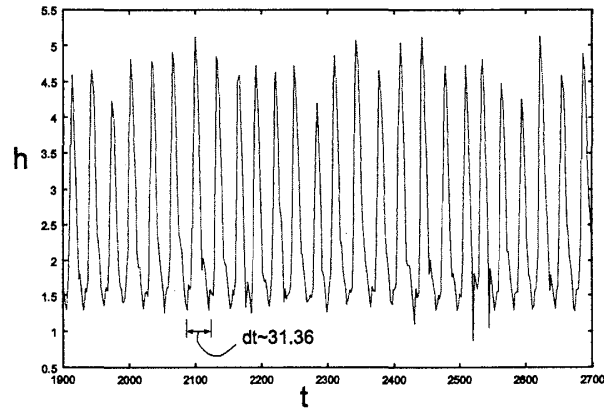


図 16: 流れ込み電荷の和 $\sum_{k=1}^N s_k$ ($\equiv h$ と定義) の時系列。 $t \sim 31.36$ の特徴的タイムスケールがあることが分かる。生のデータのままだではより大きいタイムスケールがあるかは分からない。
 $i_u = 1.1, N = 1000$

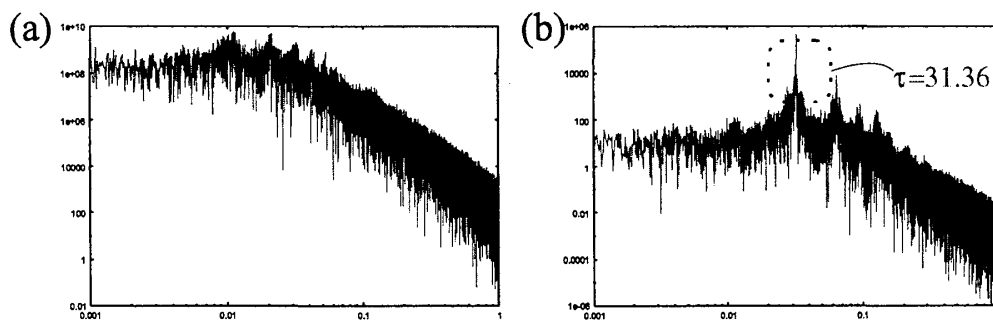


図 17: 素子 i_k と h のパワースペクトル。(a) 素子のパワースペクトル。総電流一定が原因で、単一素子の時の特徴的スケールは弱い。(b) h のパワースペクトル。 $t = 31.36 (\equiv \tau)$ にピークを持つ。
 $i_u = 1.1, N = 10000$

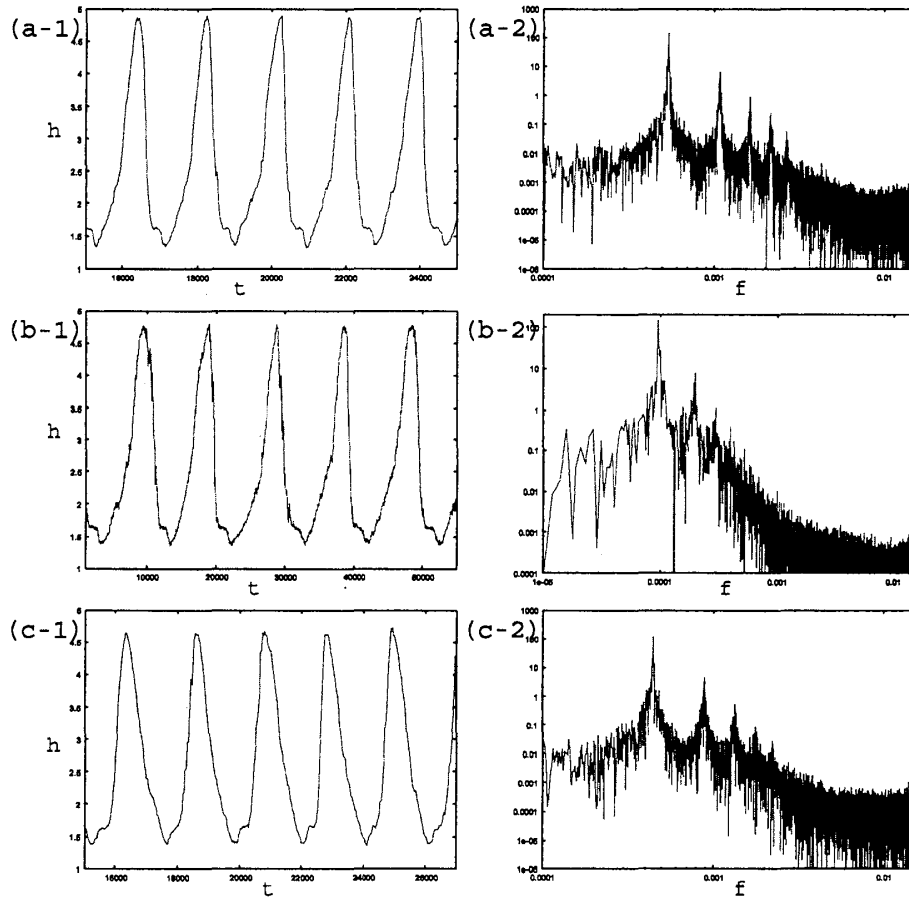


図 18: 素子にノイズを加えた時の τ step 毎の h の時系列とそのパワースペクトル。(a. 大きさ 0.03 のノイズ, b. 大きさ 0.05 のノイズ, c. 大きさ 0.07 のノイズ, 1. 時系列, 2. パワースペクトル) (a)(c) のタイムスケールが $\sim 10^3$ であるのに対して、(b) のそれは $\sim 10^4$ である。一般にノイズの大きさによってタイムスケールは変化する。これはノイズの大きさに依存して h が分岐することによると考えられる。運動はいずれも弛張振動に近いようである。 $i_u = 1.1, N = 10000, \tau = 31.36$

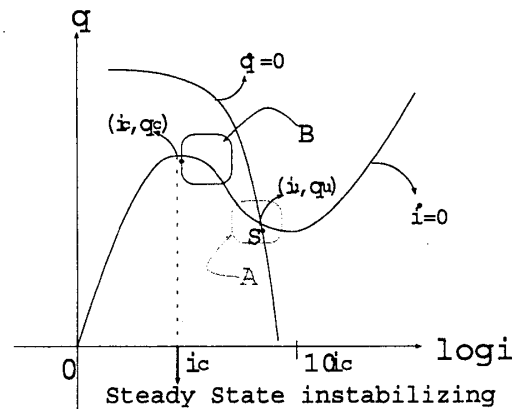


図 19: 素子のヌルクライン。領域 A,B の近くでシステムは不安定であると考えられる。

くると考えられる。一般に、初期値が図 19 の A,B の近くにあるとシステムは不安定な度合いが高いと思われる (図 14 はこのことに対応しているだろう)。この解析は今後行なうつもりである。

次章見ていくモデルは、このような系に空間結合を施したものである。

4.3.3 システムの初期条件・操作

モデル (11) ~ (13) に関して、 (i, q) の初期値 (i_0, q_0) を [一様定常状態 (i_u, q_u) + ノイズ] に選ぶので、総電流は $I = i_u S$ に決まる。総電荷一定、総電流一定を課しているので、 I, Q, V は一定であり²⁶、 Q, V の値もまた $(i_0, q_0) = (i_u, q_u)$ によって決まる。

実験ではコントロールパラメータとして一定総電流 I と、気体の圧力 P を操作する。これまでの議論により、 $D (= \frac{D_i}{D_q \tau})$ が P の増加関数であるという仮定に注意し、実験における (I, P) に対応して、我々のモデルでは (i_u, D) を操作する。ここでは特に興味のある $i_u > i_c$ の振舞いについて詳しく調べる。一様な放電流 i_u が流れている状態から始まって²⁷どのようなパターンが自己組織化されるかをみていく。

特に断らない限り、 i_u, D 以外のパラメータは次の値に固定する。

$$\tau = 20, \xi^2 = 0.004, a = 400 \frac{i_c}{v_c}, S = \frac{1}{\xi^2} \quad ^{28}, \text{メッシュサイズ } 128 \times 128$$

5 モデルが示す現象

前章で得られた 2 成分反応拡散方程式 (11)~(13) の振舞いを観測する。放電における発光強度が気体中を流れる電流密度に比例するとして、モデルの電流密度の時空間パターンをみていく。 $i \geq i_u$ にて放電が起きているとして、それを満足する i のパターンダイナミクスをみていく (極板を陽極側から観測しているとして、2 次元の極板を 2 次元空間として以下、図に表現する。)。一

²⁶ Appendix を参照。

²⁷ 理想的操作として、瞬間的に一様な電流を流すということをいっている。

²⁸ S は無次元化面積。

様状態からの自己組織化という観点から、モデルが実験で観測された現象を再現出来るか、およびそれ以外にも興味深い振舞いが観測されるかを検証する。

相図 はじめにモデルの大域的振舞いをみておくことは便利である。図 20 に相図を示す。コントロールパラメータは総電流 I と圧力効果としての拡散係数 D であり、境界条件は断らない限り周期境界条件を用いた²⁹。ただし、相図を描く際の状態の定義には、実験のそれを考慮している。

i_u が比較的小さい領域 ($i_u \sim 1.0$) では D に依存して大まかに 3 つの相に分かれる。図 20 のように $\alpha \sim \gamma$ 相と呼ぶ。いずれの相もスポットが出現し、系全体のパターンダイナミクスのユニットとしての役割を担う。詳しくみていくと、その各々の相でスポット数 (またはスポット密度) などによって相がさらに細かく分類される。 i_u が大きくなると ($i_u \sim 3.0$)、 δ 相が現れる。 δ 相は境界条件依存性が強く効いている。 $i_u \geq 9.0$ になると自明な一様グロー放電が起こる。

- α 相 — i_u が小さいと、サイズが均等で孤立した少数のスポットが定常的に配置するのがみられる。 i_u を大きくしていくと、ほぼ当間隔に配列する定常スポットパターンが観測され、スポット間距離が小さくなっていく。スポットが極板上を動くのは規則的な配置への緩和の際の移動ぐらいである。 i_u が小さくなければスポットの分布は一様である。
- β 相 — 実験と対応するとおもわれる領域である。 α 相とは異なって、スポットは格子上的配置となっておらず、「分子」的な配置をする。スポットは生成・消滅を繰り返し、パラメータで決まると考えられる特徴的な局在構造の形成プロセスを繰り返す。
- γ 相 — 動的なスポットが観測される領域である。スポット数 1 のときは、動いても壊れないソリトンの振舞いをする。「分子」状の配置をしないことから β 相とは分類される³⁰。その形状によって進行方向が変化する。
- δ 相 — 極板全域にわたって周期的パターンが観測される。各サイトの素子が同期的傾向が強いことによると考えられる。

秩序パラメータ モデル (11)~(13) は、4.3.2 でみた空間 decouple なシステム (15)~(17) の空間拡張版であるとみなせる。どちらのモデルにも時間変化するマクロな変数「 s の積分 $\int sdS$ 」が存在する。実は、系のパターンの時空間的振舞いは、この流れ込み電荷 s の積分 $\int sdS (\equiv h$ と定義) と対応関係にあると考えられる。

スポット数が増えるほどこの h は大きくなり、 D を固定した場合スポット数に対して概ね h の値が決まっている。これが分かれば、とくに β 相などではスポット数が変化していく過程を調べていくのに便利である³¹。というか、本質として、 h は系の振舞いを決める秩序パラメータとしての資格をもつと思われる。各々の相の性質を見ていく際、必要に応じてこの h の振舞いも見ていくことにしよう。

²⁹ 実際の境界は Dirichlet 境界条件であるが、モデルのもつ保存量との相性を考えてそれを避けた。実際の実験の現象は、極板という狭い ($\frac{\epsilon}{S^{\frac{1}{2}}}$ が小さい (ϵ : 特徴的空間スケール、 $S^{\frac{1}{2}}$: 極板サイズ)) 有界領域で起こると考えられ、境界の壁との相互作用を考慮すべきだが、今はその影響を考えず周期境界条件を採用することにした。しかし、 $i_u \rightarrow$ 大になると、実際の現象において境界との相互作用が無視できず、Dirichlet 的な境界壁が必要になると思われる。後述するが、 δ 相では境界の強い影響を受けた振舞いになる。実際の現象では、たとえば実験で観測される「紐 (string)」、 γ 相などがその領域の振舞いにあたるだろう。6. 展望にて再考する。

³⁰ スポット数が 1 のときは、それが動くならば γ 相に分類される。

³¹ β 相の振舞いにおいて、スポット数は大事である。

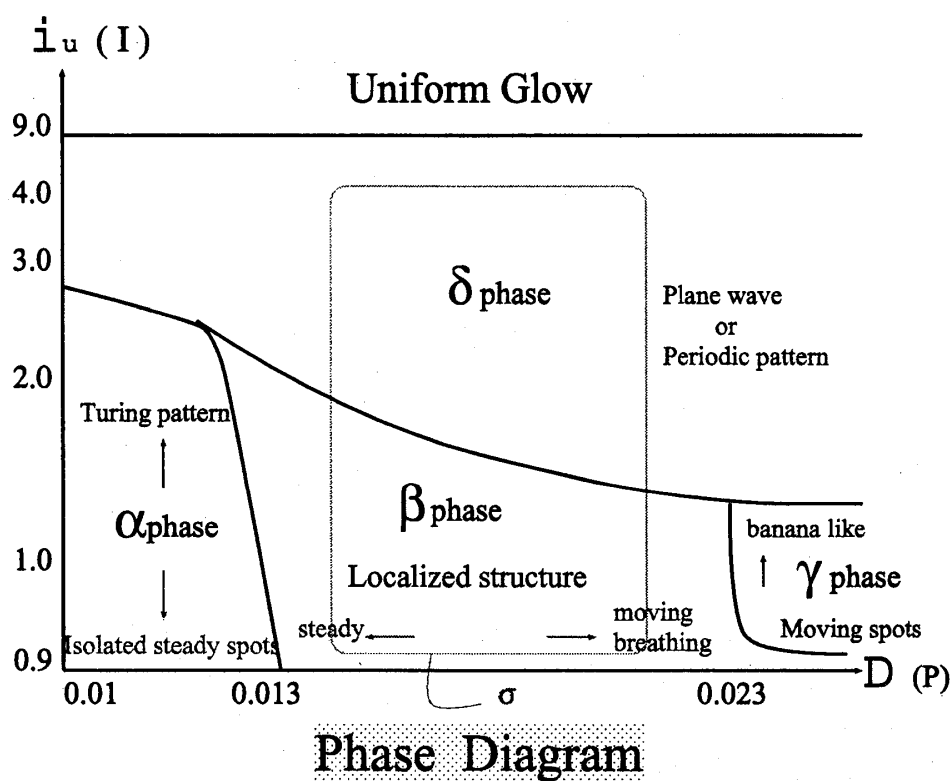


図 20: コントロールパラメータを i_u (総電流 I に対応)、 D (気体の圧力 P に対応) とする相図。縦軸は対数軸であるとする。モデルの大域的性質はおおまかに 5 つの相に分かれる (うち 1 つは自明な一様グロー放電)。定性的性質が実験と対応すると思われるのは β 相の存在する D の領域 σ である。

5.1 2D パターンダイナミクス

5.1.1 α 相

この相では孤立定常スポット (Isolated steady spots) と Turing Pattern が観測される。

4-3 の素子に関するヌルクラインから分かるように、 $i \geq i_u$ において一様な素子の各定常状態、つまり一様定常状態が不安定化している。また、 i の空間積分 I は一定に固定されているので、全ての素子が同期して振動することは実現し得ない。従って今の状況は、素子間のあらゆる一様状態が不安定化しているものと考えられる。

Isolated steady spots $i_u \sim 1.0$ のとき、 α 相では図 21 左のような定常スポットが観測される。「孤立」と呼ぶのは、スポットが少数だけ存在し、その生成過程が以下見るような分裂によるものではないことに帰因する。[一様定常+ノイズ] の初期条件からはじめると、極板各所で電流の競合が起こり、その結果局所的にいくつかのスポットが現れる。個々のスポットは非常に長い間ゆっくり動いて、存在するスポットがなるべく等間隔に位置するようになると静止する。一度スポットが出現してしまうと、もはや互いに電流を取り合うこともなく、各スポットは配置の関係でのみ相関をもっているようにみえる。つまり、スポットの生成と極板方向の移動のタイムスケールが分離している状況であると考えられる³²。

$i_u \rightarrow$ 大 につれてスポット数が増大する。

Turing-like pattern i_u を大きくしていった、 $1.5 \leq i_u \leq 2.0$ になるとき、スポット数が増大していき、図 21 右のように 2 次元定常スポットパターンが観測される。この領域でも、スポットの生成とスポットの移動のタイムスケールが分離しており、出現したスポットは互いに相互作用しながらゆっくり動く。図 21 左上を見ると、スポットサイズやスポット間距離が概ね一様である。 $i_u = 2.0$ に関する 2 次元空間パワースペクトルをみると (図 22)、特徴的波数が選択されていることが分かる (Turing pattern)。

i_u と D を大きくしていくと、スポットの生成と移動の分離が explicit でなくなる。スポットが分裂しきれずくっついたままの状態になり、しばしば格子的配置の生成と崩壊を繰り返すようになる。一般に不安定な度合が高まると、スポットの生成は主にスポット自身の分裂によって起こるようになり、スポットパターンはスポットどうしが相互作用しながらある安定であると思われるモードに各々が配置することによって形成される。スポット自体は breathing してしばしば不安定であり、breathing の増幅によって「破裂 (burst)」して消滅する³³。

他の相との境界 γ 相との境界では、図 23(a-1) のように個々のスポットはほぼ等間隔に関係を保ちながら breathing しているように見え、その一連の振舞いが間欠的に繰り返され、非定常である。パターンダイナミクスと対応する流れ込み電荷の積分 h もまた、微小振動の増幅により間欠的な振舞いをしている (図 23(a-2))。 β 相との境界の近くでは、もはや特徴的波数はみられない。各スポットは動いているように見え、主に自身の分裂によって生成され、(不安定な場合は) breathing によって消滅する (図 23(b-1))。複雑なパターンダイナミクスに対応して、 h の振舞いも複雑になっている (図 23(b-2))。

³²[3]-[10] はこの性質を利用し、各々 2 次元 1 成分・2 次元 2 成分反応拡散系によってスポットの分子的配置の定常状態を実現した。スポットの生成が十分はやく完了すると仮定し、はじめから安定な定常 1 スポット解を用意する。その解をいくつか重ね合わせてスポット集団を構成する。集団中の各スポット間の相互作用を導入し、スポットを「粒子」とみなして運動方程式を解くというものである。他の文脈での、スポットの「粒子」的取り扱いについて [19]~[22] 参照。

³³一般に D が大きいほど不安定であり、breathing が増幅して破裂するまでの lifetime が短くなる。

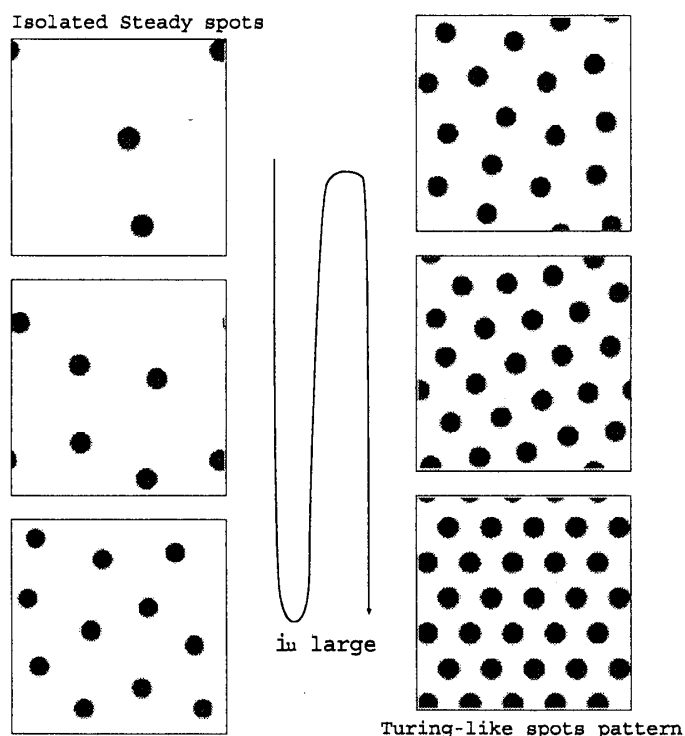


図 21: α 相での振舞い。定常パターンを示した。スポット生成と移動のタイムスケールが分離している。すぐにスポットが出現し、その後それらはゆっくり移動する。

左—Isolated steady spots。生成過程が分裂ではない。定常までの振舞いについて、各々相関が無いように見える。 $i_u \rightarrow$ 大につれてスポット数が増大する。左上 $i_u = 0.87, D = 0.01$, 左中 $i_u = 0.93, D = 0.01$ 左下 $i_u = 1.0, D = 0.01$

右—Turing-like spots pattern。定常スポットパターンが2次元格子状になる。 $i_u \rightarrow$ 大とすると、放電領域が極板のかかなりの部分を占め、スポットはお互いの特徴的な距離において安定な状態であることができず、非定常な振舞いになる(図 23(a))。右上 $i_u = 1.2, D = 0.01$, 右中 $i_u = 1.5, D = 0.01$ 右下 $i_u = 2.0, D = 0.01$ メッシュ 256×256

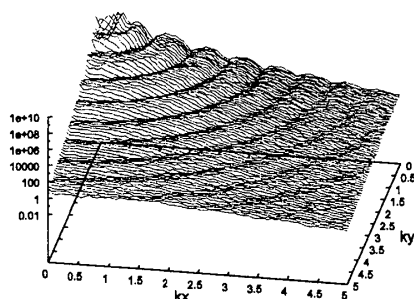


図 22: α 相で Turing-like なパターンがみられるときの2次元空間パワースペクトル。2次元空間中において、特徴的波数 $((k_x^2 + k_y^2)^{\frac{1}{2}} \sim 0.443)$ が選択されている。図は、その整数倍の成分のピークが存在することを示している。 $i_u = 2.0, D = 0.01$, メッシュ 256×256 , 50 サンプルで平均

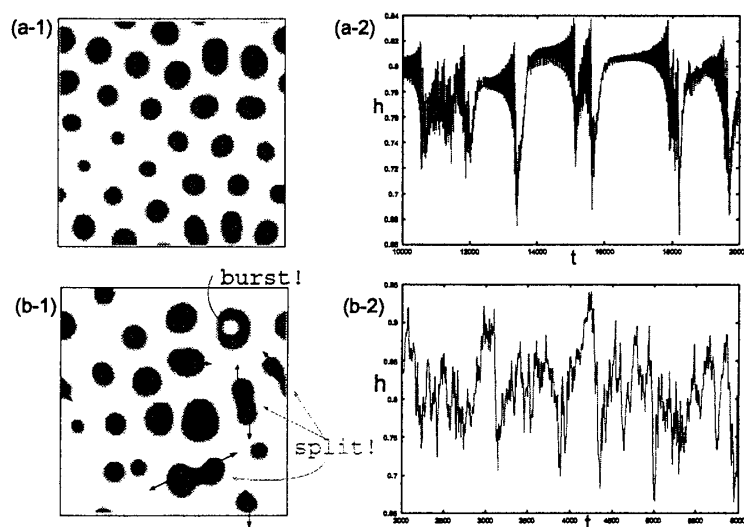


図 23: (a) α 相と δ 相の境界領域、(b) α 相と β 相の境界領域での、(1) パターンダイナミクスのスナップショット、(2) 対応する流れ込み電荷 s の積分 h の時系列。(a) 上の Turing pattern のように個々のスポットは等間隔に関係を保ちながら breathing しているように見える。 h は間欠的に振舞う。(b) 特徴的波数というものはみられない。各スポットは動いているように見え、主に自身の分裂によって生成され、(不安定な場合は) breathing によって消滅する。複雑なパターンダイナミクスに対応して h の振舞いも複雑になっている。(a) $i_u = 2.4, D = 0.01$, (b) $i_u = 2.0, D = 0.012$ メッシュ 256×256

Turing Pattern などの α 相での振舞いは、実験では観測されたという報告はないが、実験でもより圧力 $P \rightarrow$ 小とすることで観測されるかも知れない。

5.1.2 β 相

この相は、実験で観測された現象との対応があると考えられる領域である。この相では、出現したスポットが実験と似た分子的な局在構造を構成する。

i_u を徐々に大きくしていくと、はじめみられる 1 個のスポットの定常状態から 2 個のスポット、3 個のスポット、...、と存在できる最大スポット数が増えていく (図 25)。しかしながらスポットは不安定であり、breathing が増幅して消滅しては分裂によって生成される。特徴的なのは同じ i_u に対して、個々のスポットは生成・消滅を繰り返しながらも、その一連の過程で全体の定性的性質が保たれるということである。例えば、あるプロセスを経て最大 4 個のスポットが現れるところでは、スポットの消滅過程が起こりその数が減少するが、同様のプロセスを経て 4 個のスポットが再び構成される (その生成プロセスの例は、図 26)、というように。以後、これを「4 個のスポットが安定な場合」ということにし、簡単のためさらにそれを「 sp_4 が安定な場合」と表示することにしよう³⁴。

³⁴ sp_4 は「スポットが 4 つである状態」を指す。「 sp_4 が安定」は時間的に常に sp_4 であるということではないことに注意せよ。

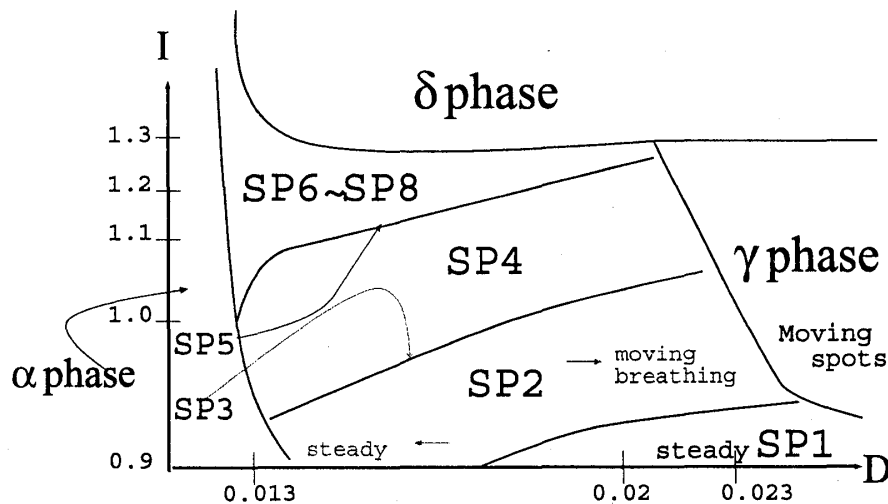


図 24: β 相内の相図。同様なプロセスを経て、再構成される最大スポット数をその状態として選ぶ。sp3 と sp5 は lifetime が短く、存在領域も非常に狭いため、相図にかけなかった。sp3 は sp2 と sp4 の境界に、sp5 は sp4 と sp6(以上) の境界に存在すると思われる。sp1 が最大スポット数であるとき常に steady state である。これは γ 相との大きな違いである。また、実験の相図との対応は良い方である。ただ実験の相図での「複数の孤立スポット」は β 相には存在しない。

β の相図 β に関する相図をはじめに示しておく (図 24)。同様なプロセスを経、再構成される最大スポット数をその状態、つまりここでいう「安定」な状態で β 相を分類した。実験の相図との対応を見ると、スポット数が増えていくところなどは非常に良い。実験の観測では sp1 は動的なのに対し、我々の β 相では常に静止状態にある。この相でスポット数が 2 つ以上になると動き出すのは、主にダイナミクスがスポットの breathing による消滅と分裂による生成が起こるからである³⁵。

局在構造 $i_u \rightarrow$ 大につれて最大スポット数が大きくなっていく。スポットは分裂によってその数を増やし、ある決まった距離まで互いに離れて配置する傾向にあり、「局在構造 (localized structure)」をなしているように見える³⁶。スポット間距離がある値に近づくとつれてスポット速度は減少し、その後スポットのいくつかは breathing をはじめ、それが増幅していきやがて消滅する (breathing の増幅によるスポットの消滅の例として、sp2 の連続スナップショットを図 29 に示す。)。スポット数が維持されようとする傾向があるので、存在するスポットのうちのいくつかは「安定」な個数になるまで分裂する。安定な個数 ≥ 6 では再構成される度にいろいろな局在構造が形成される (図 25)³⁷。その過程は、より長時間スケールの観測では、異なる局在構造の「間欠的出現」としてみえるかも知れない。また、局在構造は、分裂を経てスポットどうしの関係から新たな配置が決定されるので、長時間スケールでは、局在構造が時間的に空間を移動しているようにも見える。

³⁵これに対して、後で見る γ 相ではスポットが 1 個の状態から壊れずに極板上を動く。スポット 1 個が安定な場合における β と γ はこの違いで分類される。

³⁶この時スポットは、分裂時に受けた「力」によって動いているかのようである。

³⁷スポットの分裂による生成・breathing による消滅の過程が組合わさることで、より複雑な局在構造が可能になっている (図 25sp6(c)(d) など)。

局在構造の空間移動の例として、sp2,sp4 が安定な場合について見てみよう。図 27 は sp2 が安定: $i_u = 0.93, D = 0.014$, sp4 が安定: $i_u = 0.98, D = 0.014$ についての連続スナップショットである。sp2,sp4 の準安定状態の位置が時間変化していることが分かる³⁸。長時間スケールだとふらふら動いているように見える。

また、この章の冒頭にて定義した秩序パラメータ h も並行してみていくことは理解の助けになる。図 28(a) に sp2, (c) に sp4 に関する h の時系列を示す。なお、図 28(b) は sp3 が安定な場合の h の時系列であり、sp2,sp4 が安定な場合との比較のために示した³⁹(D を固定し i_u のみを変えた。)。

図 28 をみると、sp2 が安定な場合 (a) について、sp2 が準定常に存在しているときは h もほぼ同じ値を保っている。しかし、いずれか一方のスポットが breathing しそれが増幅して消滅するとき、 h はまず、breathing の過程で振動をはじめてその振幅が増大していく。そして消滅の過程で間欠的に変化してその値が小さくなる。再び sp2 が形成されると h はまえとほぼ同じ値で準定常になり、同じことを繰り返す。一連の過程で h の変化のタイムスケールおよび準安定なときの値はほぼ変わらない。

上でみた sp2 が安定である場合の h の時系列を sp4 が安定な場合に関する h のそれと比較する。sp4 が安定な場合に形成される sp4 は、典型的に $sp1 \rightarrow sp2 \rightarrow sp4$ のプロセスを経て、スポットが消滅して sp3 ないし sp2 になって、そしてついには sp1 になり...、と繰り返す。それに応じて、 h も上述のような準定常な状態ではほぼ一定の値をとる。その状態が sp2 になっている時の h は、上で見た sp2 が安定な場合の、sp2 になっている時の値と同じ値をとる。また、sp4 が安定な場合に、状態が sp1 であるときの h の値は sp2 にあるときのそれよりも小さく、sp4 であるときはそれよりも大きい。sp3 が安定な場合についても同様なことがいえる。一般に、スポット数が大きい程 h の値は大きくなっている。sp8 まではこれを確認した。つまり、 h が局在構造の状態を指定する秩序パラメータの役割を担っていると考えられる⁴⁰。 h はもともと global 変数なので、位置情報をもたない。その局在構造がどの位置にあったとしても、局在構造が同じならその値も変化しないのである。

図 28 右に、各々(a-1)~(c-1)を三次元に埋め込んだときの相空間の様子を示す⁴¹。(a-2)についてみると、sp2 に対応する点に近付いていきあるところまで達すると、今までの軌道と垂直な方向に回転しながらその点から離れていく。その後軌道は sp1 に対応する点に向かっていくが、その点は不安定であり、すぐに sp2 に対応する点に向かっていき、同様の振舞いを繰り返す⁴²。

この軌道の実際のパターンとの対応をみていく。上述の「サドル」のような点は、スポット間距離がある決まった値を持つ sp2 状態に対応している。sp1→sp2 の分裂後、スポット間距離が大きくなるにしたがって、スポット速度が小さくなるので、その状態に達するには長時間かかる。その点から渦状に離れていく軌道は、2つのスポットが互いに逆位相で breathing し、それが増幅していくことを示す(図 29)。その後の軌道の振舞いが、いずれか一方の消滅→sp1→分裂→sp2 というパターンダイナミクスに相当することも容易に分かる。

(b-2)sp3、(c-2)sp4 についても同様の議論が出来る。

³⁸これは、分裂が非対称であることが原因であると考えられる。

³⁹局在構造の長時間観測は sp2,sp4 が安定な場合以外は未確認である。しかし、我々は以下の議論が存在する任意の sp が安定な場合に対して成立することを信じる。

⁴⁰ α 相と δ 相の境界などでは多くのスポットが現れるが、必ずしもスポット数と h は対応しない領域がある。

⁴¹データは少なめにとっている。sp1~sp4 に対応する点はこの時刻においても同じであるが、スポットが breathing している状況では、潜在的な高次元性が効いて、その度毎にやや異なった軌道を描き、実のところ三次元埋め込みでは不十分であるように見える。今は、軌道の概形を示すことに目的があり、見づらくなるのを避けている。

⁴²(a-2) の相空間構造は、レスラー方程式に見られるシルニコフ型のそれを、軌道の向きを逆にしたものに似ている。

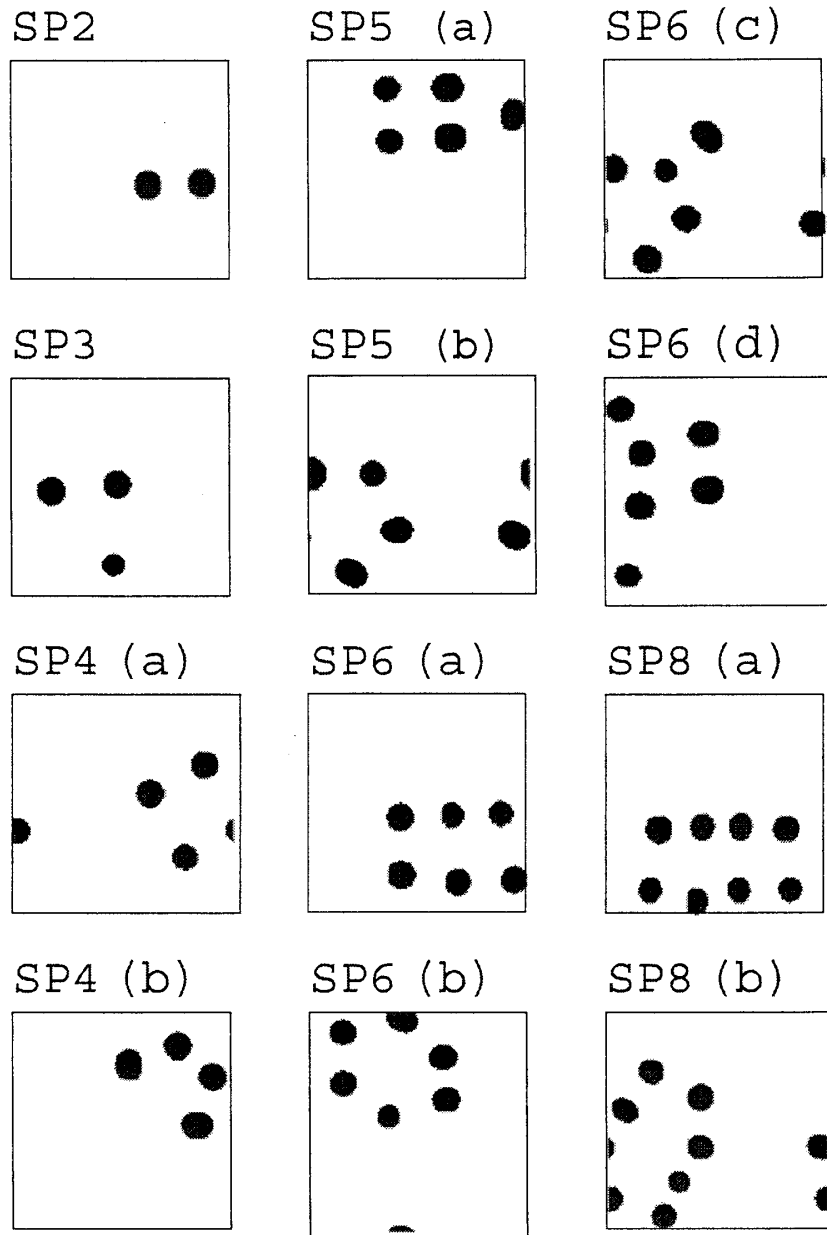


図 25: 典型的局在構造のスナップショット。sp2-sp8 まで示してある。よりスポット数の大きい局在構造はそれより小さい局在構造からのスポットの分裂によって形成される。各局在構造はその形成までに特定のパスを経るように見える。

sp3:sp2 からの分裂の過程で一方しか分裂しないとき、sp3 が生成される。sp4(a):sp4-正方形, sp4(b):sp4-台形, sp2→sp4 の過程で、2 つのうち 1 つが遅れて分裂し、その結果対称性が悪くなり sp4-台形になる。sp4-台形は sp5(b) へのパスになる。sp6(a):sp6-長方形, sp6(b):sp6-正六角形。sp3→sp6 および sp4→sp6 の過程で生成されることが多い。sp6(c),(d):sp6 の例。sp8(a):sp8-長方形, sp8(b):sp8-八角形。sp4→sp8 の 4 スポット分裂過程で生成されることが多い。(26,30 参照) $D=0.014$, メッシュサイズ 128×128

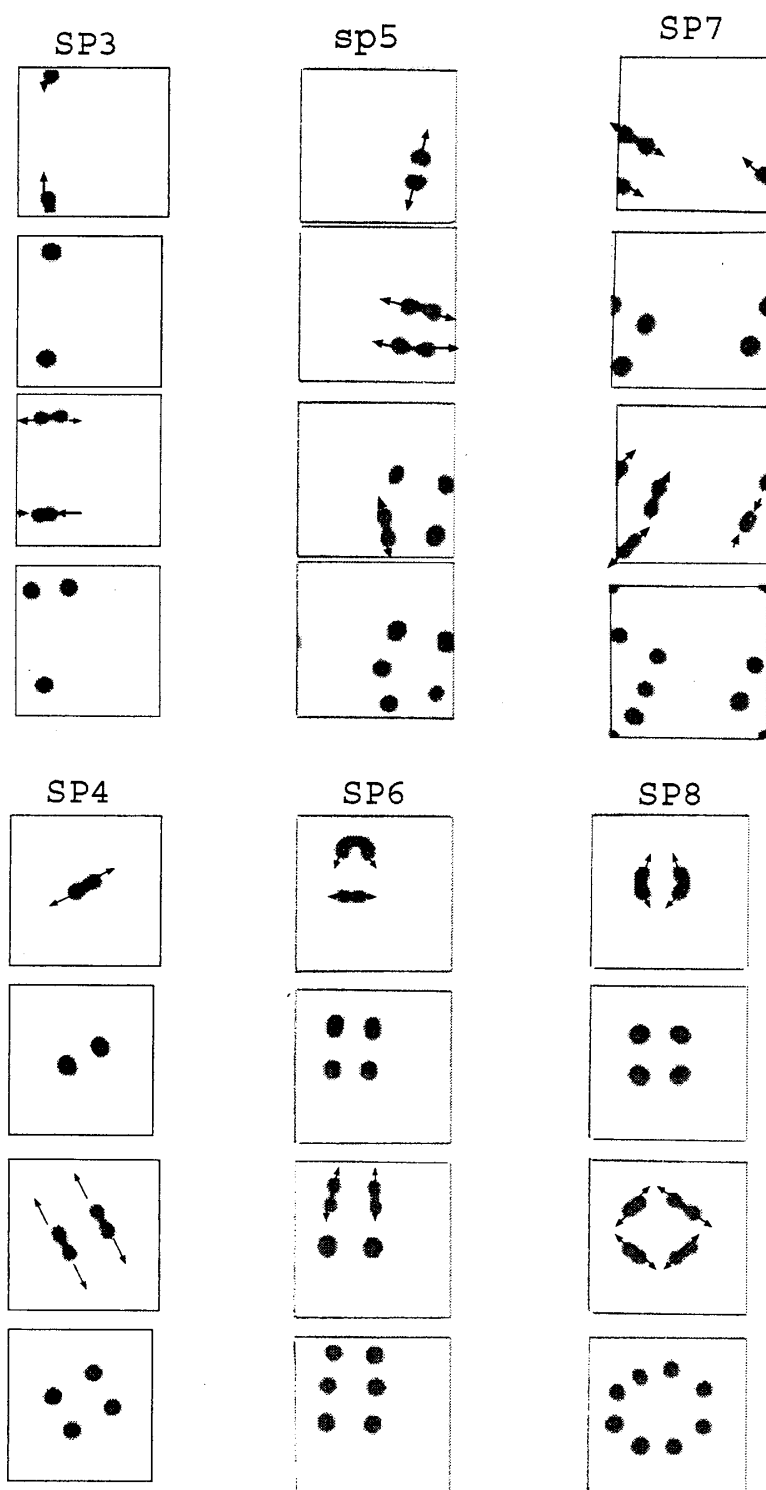


図 26: $sp_3 \sim sp_8$ 生成プロセス。 sp_3 : $sp_1 \rightarrow sp_2 \Rightarrow sp_2 \rightarrow sp_3 \Rightarrow sp_3$ の準安定状態 $i_u = 0.939, D = 0.014$, sp_4 : $sp_1 \rightarrow sp_2 \Rightarrow sp_2 \rightarrow sp_4 \Rightarrow sp_4$ の準安定状態 $i_u = 0.98, D = 0.014$, sp_5 : $sp_2 \rightarrow sp_4 \Rightarrow sp_4 \rightarrow sp_5 \Rightarrow sp_5$ の準安定状態 $i_u = 1.06, D = 0.013$, sp_6 : $sp_2 \rightarrow sp_4 \Rightarrow sp_4 \rightarrow sp_6 \Rightarrow sp_6$ の準安定状態 $i_u = 1.08, D = 0.013$, sp_7 : $sp_2 \rightarrow sp_4 \Rightarrow sp_4 \rightarrow sp_7 \Rightarrow sp_7$ の準安定状態 $i_u = 1.1, D = 0.013$, sp_8 : $sp_2 \rightarrow sp_4 \Rightarrow sp_4 \rightarrow sp_8 \Rightarrow sp_8$ の準安定状態 $i_u = 1.1, D = 0.013$

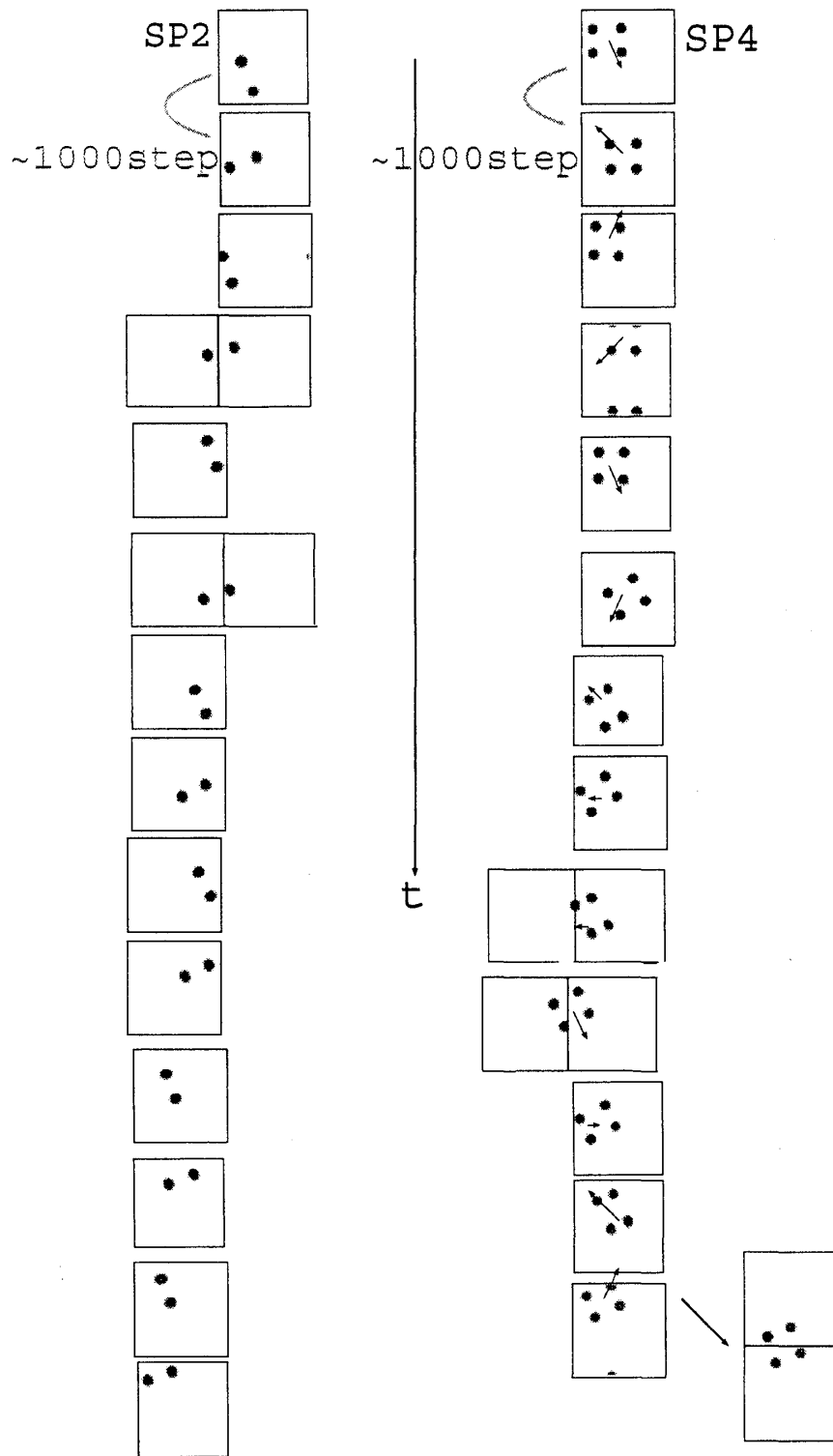


図 27: sp2,sp4 の準安定状態の連続スナップショット。sp2,sp4 の位置が時間変化していることが分かる。長時間スケールだと、ふらふら動いているように見える。sp2: $i_u = 0.93$, sp4: $i_u = 0.98$, $D=0.014$

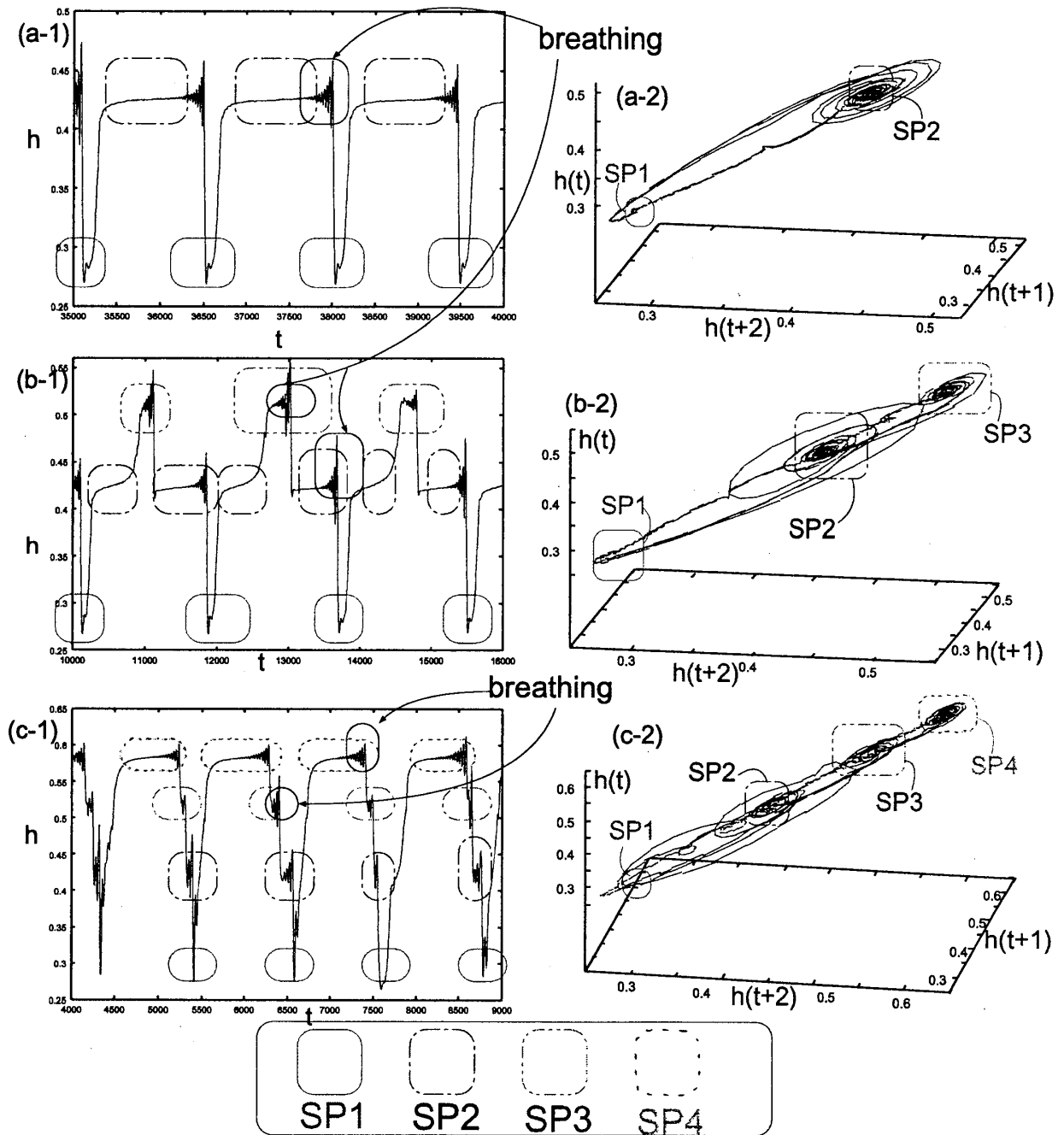


図 28: (a)sp2 が安定な場合 ($i_u = 0.93$)、(b)sp3 が安定な場合 ($i_u = 0.939$)、(c)sp4 が安定な場合 ($i_u = 0.98$) の (1)h の時系列。(2)h の時系列の 3 次元埋め込み。異なる i_u に対して sp2, sp3, sp4 に対応した同じ h の値がある。スポットの消滅は、自身の breathing の増幅に起因している。それに対応して h の値は、準定常値からの微小振幅の増大により急激に減少する。一連の局在構造の形成プロセスは 10^3 オーダーの特徴的タイムスケールをもつ。 $D = 0.014$

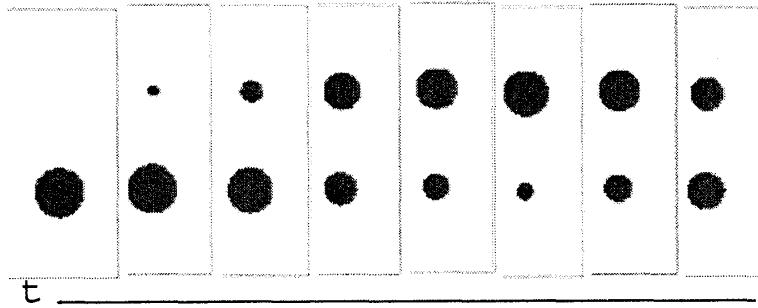


図 29: $sp2$ が breathing の増幅によって消滅する時の様子。スポットは互いに反位相で振動し、その振幅が増大し、やがて一方が消滅する。 $i_u = 0.93, D = 0.014$

局在構造の lifetime 個数が増えるとその lifetime が短くなる。個数のより大きい局在構造は配置の組合せが多くなる。局在構造不安定化の要因は個々のスポットの breathing とその増幅のほか、局在構造の対称性も関係しているように思われる。たとえば、 $sp5$ -5 角形は $sp4$ -正方形に比べて、すぐ breathing が起こって構造は壊れる。スポットの分裂によってその状態が実現したとしても、スポット数が大きいほど対称性が良くなくその状態が不安定化しやすい。それゆえその状態が存在する時間がみじかくなってしまふのである。たいていの場合、最大スポット数が大きいほど、ここでの意味で「安定」だとは explicit にいいづらい。典型的に $sp4$ まで、およびスポット数が偶数の場合がより安定に存在できるようである⁴³。

また、不安定な度合は D にも依存する。 D が大きいほど不安定性が大きくなり、 β 相でのスポット、局在構造の大域的振舞いに効いてくる。一般に $D \rightarrow$ 小ほど steady、 $D \rightarrow$ 大ほど breathing, moving な状態になる (図 24)。実際 β 相では、スポット・局在構造の breathing $\rightarrow$ 消滅までの lifetime は $D \rightarrow$ ほど小さくなる。スポットの分裂に関しては、 $D \rightarrow$ 小であるほど静的で対称に、 $D \rightarrow$ 大ほど動的で非対称に分裂しやすくなる。

局在構造の形成プロセス ところで、 $i_u \rightarrow$ 大のときスポット数が増えていくプロセスは、具体的にどのようなになっているだろうか？ i_u を変えていくと、A) $sp1 \rightarrow sp2$, B) $sp2 \rightarrow sp3$, C) $sp2 \rightarrow sp4$, D) $sp4 \rightarrow sp5$, E) $sp4 \rightarrow sp6$, F) $sp4 \rightarrow sp7$, G) $sp4 \rightarrow sp8$ という分裂がこの順序で出現しはじめる。 $i_u \rightarrow$ 大ほどこれらの多くのプロセスが組み合わさって、よりさまざまな局在構造が形成される。

各々の振舞いは、次のようなプロセスで実現する。

A). $sp2$ が安定な場合などは互いに反対方向に分裂する。一般には、 $i_u \rightarrow$ 大、 $D \rightarrow$ 大だと同じ方向に分裂することもある。図 26 の $sp4$ の形成過程の例では前者の分裂である。B). A) を経た後、一方のスポットが再び分裂してできる ($sp2 \rightarrow sp3$, 図 26)。この際、分裂しない方のスポットが頂角となる 3 角形を構成するようにスポットの移動が起こるのが特徴である。C). A) を経た後、再び 2 つとも分裂してできる。 $sp4$ -正方形と $sp4$ -台形を形成する場合が典型的である ($sp2 \rightarrow sp4$ -正方形, $sp4$ -台形, 図 25, 26)。 i_u が大きい程台形が形成されやすくなる。D). C) を経て $sp4$ -台形を形成した後、4 つのうち 1 つが分裂してできる ($sp4$ -台形 $\rightarrow sp5$, 図 26 $sp5$)。E). C) を経た後、4 つのうち 2 つのスポットが再び分裂してできる。F). C) を経た後、4 つのうち 3 つが再び分裂し

⁴³ $sp4$ が存在可能なパラメータ領域においてその lifetime が短くないという意味。

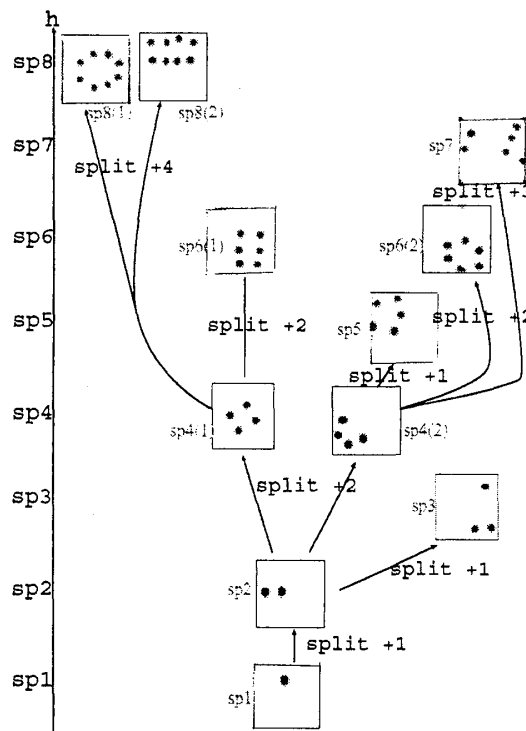


図 30: 分裂による sp_n の生成経路 ($n=2, \dots, 8$)。分裂によって生成される典型的な状態のみを示し、breathing を経た消滅によって生成される状態は考えていない。

てできる (図 26 sp7)。G). C) を経た後、4 つすべてのスポットが分裂してできる (図 26 sp8)。分裂する方向によって、形成される局在構造が異なる。特に sp5 や sp7 の形成は、他よりも非対称性が大きいにもかかわらず実現することは興味深い。それ以外の $sp_2 \sim sp_8$ の形成は、それよりもスポットの多い局在構造からのスポットの消滅によって生まれる、などのプロセスがある。分裂のみによって生成する局在構造および生成経路を図 30 に示す。ただし、いろいろな i_u について、分裂によって出現できる (典型的な) 局在構造をまとめて図示してある。

一連の局在構造の生成過程が上のような規則性を持っているのに対し、局在構造をなす個々のスポットの消滅過程は スポット数が増えるほど不規則になるように見える。状況によっては同時に 2 つ以上のスポットが消滅する。たとえば A), B) によって生成された sp_3 についてみると、 $sp_3 \rightarrow sp_2$, $sp_3 \rightarrow sp_1$ の 2 通りあり、各々 sp_2, sp_1 になって、その後、A), B) を組み合わせた過程を経て再び sp_3 を構成する。2 つの過程をどのように経て、再び sp_3 にいたるかが規則的であるかはよく分からない。その直前の sp_3 の局在構造の状況によって決まるようにも見える。 $sp_4 \sim sp_8$ についても、途中の過程が多くなるだけで基本的なところは同じである⁴⁴。

局在構造間の遷移ルール スポットの生成・消滅による、準定常状態間の遷移についてより詳しくみていこう。図 31 を見て欲しい。I $\rightarrow$ 大とした時に、準定常状態間の遷移がどのように変化するかを模式的に示したものである。上向き実線矢印は、スポットの分裂増殖過程を示し、その太さはその過程の出現頻度と単調な関係にある。下向き点線矢印は、スポットの breathing 消滅過程を示す。図 30 の典型的な準定常状態 ($sp_{4(1)}$ などと記す) を並べたものである。振舞いの変化は以下

⁴⁴ スポット数が多くなると局在構造の lifetime が短くなる傾向があるという違いはある。

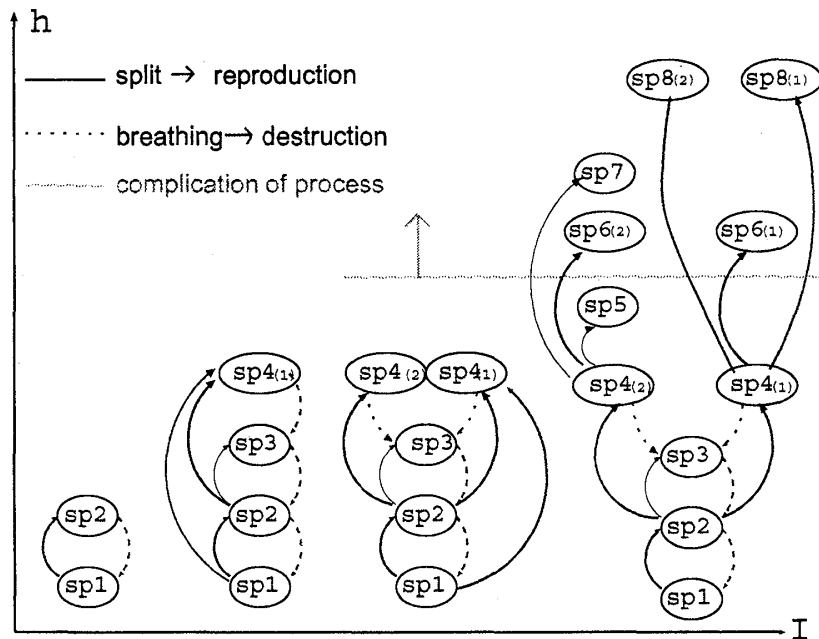


図 31: 準定常状態間の遷移規則の模式図。上向き実線矢印は、スポットの分裂増殖過程を示し、その太さはその過程の出現頻度と単調な関係にある。下向き点線矢印は、スポットの breathing 消滅過程を示す。ただし、スポット数 ≥ 6 では消滅過程に多様性が生じ、多くの準定常状態が出現するが、典型的なもののみを表示しそれ以外は省略してある。

のようである。

- I が小さいとき、 $sp1 \rightleftharpoons sp2$ の状態が実現する。
- $I \rightarrow$ 大で $sp3, sp4_{(1)}$ が出現し、 $sp1 \sim sp4_{(1)}$ の遷移過程が実現。
- さらに $I \rightarrow$ 大で、 $sp4$ 台形 ($sp4_{(2)}$) が出現し、 $sp1 \sim sp4$ の遷移過程が 2 つになる。
- さらに $I \rightarrow$ 大で、 $sp5 \sim sp8$ が出現し、上の 2 経路をさらに分割する多様な経路が出現する。

上のような準定常状態間の遷移規則が、 $I \rightarrow$ 大につれてどのように生成され、どのような性質を持つかを以下のようにまとめることができる。

- 一般に、 $I \rightarrow$ 大につれて以前あった遷移過程に、新たに出てきた準定常状態が付け加えられていく。
- スポット数 ≥ 4 では、同じスポット数で異なる配置の局在構造、すなわち縮退状態⁴⁵が現れる。
- スポット数 ≥ 6 では、消滅過程に多様性が生じる (ただし、図 31 では典型的なもの以外省略している。)
- それに対応し、 h のダイナミクスも複雑化する。

⁴⁵ 縮退しているいくつかの状態に関し、 h の値はほぼ等しい。

- 準定常状態間の遷移は、スポットの増殖・消滅のいずれかのプロセスによってのみ可能なので、縮退状態間の遷移は不可能である。

また、初期条件は、[一様状態 + ノイズ] であった。このような典型的な初期条件に対して上述の振舞いが観測される。詳述すると次のようである。

- はじめ平方極板上にいくつかのスポットが出現するが、電流の制限が原因でスポットの淘汰、つまり breathing → 消滅が至るところで起こる。その後存在するスポット数が減少し、安定に存在できるスポット数よりも小さくなると、分裂過程がはじまり上述の振舞いに収束していく。

上述の遷移過程がこのように自己組織化されることを考えると、以下のようなことが分かる。

- スポット数 ≤ 4 では、一連の準定常状態間の遷移過程自体が一種のアトラクターとみなし得る状態にある⁴⁶。
- スポット数 ≥ 6 では、スポットの増殖・消滅過程の多様化が原因で、準定常状態間の遷移ルールが複雑に入り組み、簡単でなくなる。従って、アトラクターとみなすことは不可能である。

このような見方について、より力学系的な観点からのシナリオも含めて展望で議論する。

実験との対応 実験と対応すると思われる振舞いをまとめておく。

- $I \rightarrow$ 大で最大スポット数 $\rightarrow$ 大。
- 分子的な局在構造が形成される。スポット数は時間的に変化するが、決まったスポット数の局在構造が再構成される。
- 長時間スケールでは、局在構造が動いているように見える。それは、再構成される度に局在構造の位置がずれるからである。
- スポット数 ≥ 6 では、再構成される度にいろいろな局在構造が形成され、長時間スケールでは、それらの「間欠的出現」とみなし得る。

5.1.3 γ 相

この相においてはソリトン的な動くスポットが観測される。

図 20 において、 $0.93 \leq i_u \leq 1.0$ ではソリトン的な動くスポット (Soliton-like spot) がみられる。 $i_u \rightarrow$ 大では複数の breathing する動的スポット、および banana-like なスポットがみられる。

⁴⁶脚注 41 で述べたように、スポットの breathing の際、潜在的な高次元性が回復するようにみえ、振舞いはやや複雑になる。しかしながら、一連の (例えば、 $sp1 \rightleftharpoons sp2$ など) 過程の特徴的タイムスケールが常に同じオーダーであれば、不完全ではあるが、アトラクターのような振舞いであると言える。

Soliton-like spot γ 相では $0.93 \leq i_u \leq 1.0$ にて ソリトンの動的 1 スポット (moving 1spot $\rightarrow$ ms1 と呼ぶ) が観測される。この領域では、ms1 は breathing することなく、消滅せずに動き続ける。周期境界条件を用いた ms1 の例を図 32 に示した。図 32(a) 中の赤線は ms1 の重心を表す⁴⁷。このパラメータだと「尾部」⁴⁸が延びて、やや螺旋形をし、重心は 2 次元空間中を円運動している。図 32(b) は図 32(a) のときの秩序パラメータ h の時系列である。 h のダイナミクスは ms1 のそれと対応していて、 h の振幅が大きくタイムスケールが小さいほど、ms1 の円運動の半径が小さく速度が大きくなる。

ある i_u で ms1 が現れ動き出すのは、ms1 の形状に非対称性が存在するからだと考えられる。ms1 の出現直後はスポットの非対称性が小さく、等速直線運動するが (図 33, $i_u=0.925$)、 $i_u \rightarrow$ 大で ms1 は等速円運動をはじめる。一般に $i_u \rightarrow$ 大につれて ms1 の移動速度およびスポットのサイズ⁴⁹は大きくなり、ms1 の移動に伴ってその形がいびつになる傾向がある。図 32 と同様に、ms1 の軌道とそれに対応する h の時系列の i_u 依存性を示しておいた (図 33)。

周期境界条件では、上のように ms1 の振舞いははじめ等速直線運動で、 $i_u \rightarrow$ 大で等速円運動するという単純なものであったが、ノイマン条件を採用すると、「壁」との相互作用のため興味深い振舞いが観測される。図 34 にノイマン境界条件での ms1 の振舞い、図 35 にそれに対応する h の時系列を示した。ノイマン境界条件だと ms1 は「壁」で跳ね返るため、 i_u の値によっては複雑な軌道を描くものがある ($i_u=0.94$) が、周期軌道を描くものもある ($i_u=0.93, 0.935, 0.945$)。 $i_u=0.95, 0.97$ などはほぼ円運動であるが、少しずつ軌道中心がずれていくのが観測される。これらの振舞いは、ms1 の軌道半径と極板サイズの比によって決まっていると思われる。

軌道が複雑なものは h も複雑なダイナミクスをしていることが分かる。ms1 が「壁」で跳ね返るとき、 h はそれに対応して大きく変化する。 i_u の値によって、 h の振動の時間および振幅のスケールが異なることに注意せよ。

モデル (11)~(13) における ms1 の振舞いは、螺旋の feedback-control, meandering の研究 ([14][15]) でみられる振舞いとの関係が示唆される。

Multi moving spots さらに i_u を大きくすると、ms の分裂が起こる (図 36)。いびつな ms1 は「尾部」が延び出す。延びた部分が小さいと、ms1 は回転しながら尾部を伸ばしたり引っ込めたりする。延びた部分が「頭部」と同じくらいになると分裂して互いに反対方向に動き出す (ms2 の生成)。しかし、ms2 はいつもソリトンのではないように思われる。ms の一方がすぐにしぼむ、もしくは breathing して消滅する、のいずれかによってすぐに ms1 になってしまうのである。その ms1 は再び上の過程を繰り返し、動きながら分裂する。スポット数を保とうとする機構はあるようである。現象のタイムスケールが小さいことを考えると、長時間でみれば、ソリトンの ms2 が実現しているようにみえるのかもしれないが...。現時点では、ソリトンの ms が 2 個以上存在できるかは分かっていない。

Banana-like spots $1.2 \leq i_u \leq 1.5$ で観測される Banana-like spots について。 i_u が大きい程スポットの速度が大きくなり、また自らのサイズも大きくなるので、スポットはその運動の垂直な方向に延び出して banana-like になる (図 37)。壊れずに直進し続けるが、あまり長くなり過ぎるとちぎれてスポットになる。また延びて banana-like になり...、の繰り返し。この状態になると、衝突の際互いに merge するようになる。

⁴⁷ここで ms1 の軌道を追うために、ms1 の重心を「 $i > i_u$ なるサイトの平均位置」と定義している。

⁴⁸ms1 の進行方向とは反対側というニュアンスでこう呼ぶ。同様に、進行方向側を「頭部」と呼ぶ。

⁴⁹今、2 次元パターンは $i \geq i_u$ なるサイトにて放電が起きている、として観測していることに注意せよ。

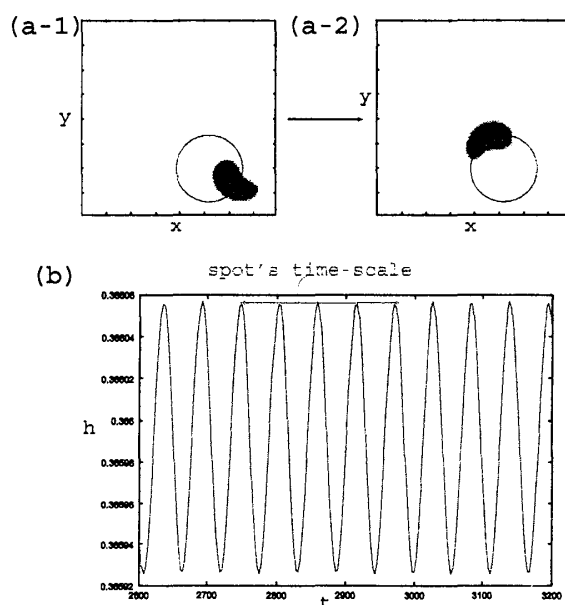


図 32: 周期境界条件でのソリトンのな moving spot(ms1) の例。(a-1),(a-2).ms1 の運動の経過。赤線は ms1 の重心の軌道である。矢印の方向に動く。このパラメータだと「尾部」が延びて、螺旋形をしている。重心は 2 次元空間中を円運動している。(b).(a) に対応する秩序パラメータ h の時系列。 $i_u=1.0, D=0.027$, メッシュ 256×256

γ 相では周期境界条件の場合に限り、next nearest neighbor(4 次の精度)を採用している。

実験との対応 γ 相の振舞いは、実験での「Isolated spots」とよく似ている(図 6(a)(c)(d),7)。

実験と対応すると思われる β 相では、局在構造をなす sp2 以下は sp1 の静止状態のみである⁵⁰が、一方で実験では局在構造がみられるより $I \rightarrow$ 小の領域で、孤立した ms1 が複数存在するのが観測される。

β 相と実験の、上のような不一致は以下のように考えることで改善できるかも知れない。「 γ 相と実験の Isolated spots が対応しているにもかかわらず、圧力効果として仮定した電流密度の拡散 D_i の選択が不十分であった。」(6. 展望参照)

5.1.4 δ 相

次に、 i_u が大きいとき、いたるところで現れる δ 相について。

Plane wave 振舞いが「Plane wave」になる場合がある(図 38(b))。素子自体はリミットサイクルを用いているので、一般に $i_u \rightarrow$ 大だと同期する傾向が強い。周期境界条件とのからみで図のような、波と垂直な方向に同期していると思われる。ただ、トポロジ的には Loop ともみなせ、紐や Loop に関する今後の研究に期待が持てる。

Periodic pattern Plane wave と同様な理由で現れると考えられる(図 38(a))。至るところで定性的に似たパターンになるので、素子の性質が強く効いているようである。図 38(a) の他にもさ

⁵⁰我々は β 相を「分裂により駆動され、スポットが動く」相であると位置付けており、分裂しなければ動かないこの sp1 状態をも β 相に含めると定義している。

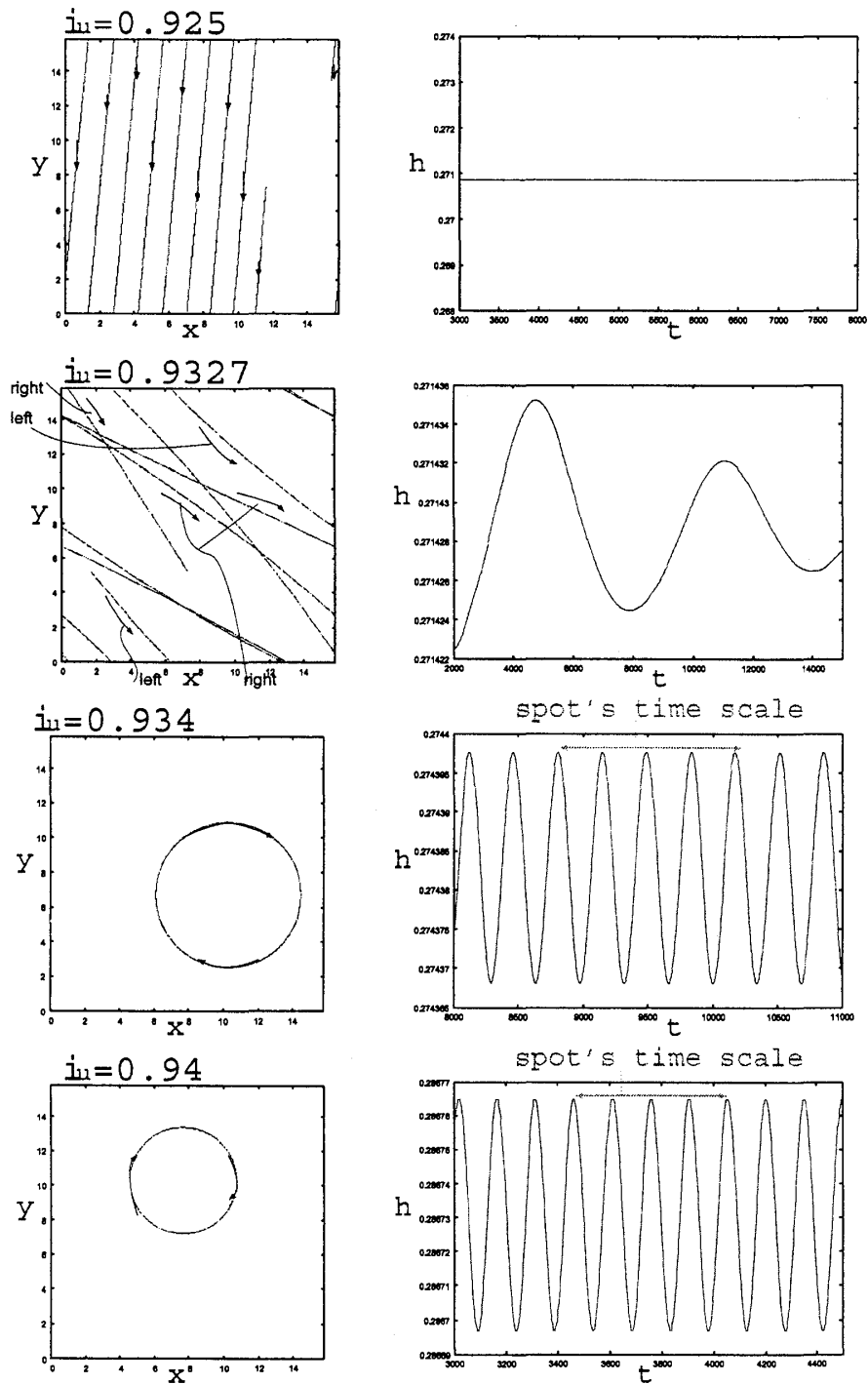


図 33: 周期境界条件での ms1 の軌道とそれに対応する秩序パラメータ h の時系列の i_u 依存性。ms1 の進行方向を矢印で示した。 $D=0.027$, メッシュ 256×256
 h の振幅は空間刻み $dx \rightarrow 0$ で 0 に向かう可能性がある。一方、 $i_u = 0.925$ のような直進する ms1 の場合、ほぼメッシュ依存せず 0 になる。

まざまな周期パターンが観測されるが、ここではこれについて深く追求していない⁵¹。

5.1.5 Teleportation

3章で紹介した実験にてみられる *Teleportation* に対する、我々の解釈を述べる。

初め束縛された2つのスポットから離れた1スポットは、この2つよりも幾分大きい (図 8a)。束縛された2つのスポットのうち1つが消滅する時、離れたスポットはやや楕円上に膨張しているように見える (図 8b)。消滅と同時に、膨張したスポットは分裂し、2スポットになる (図 8c)。

スポット数を保存しようとする傾向があるために、スポットの消滅と生成のプロセスが組合わさって、スポットが *Teleportation* したように見える。この解釈が妥当であるならば、これまでの議論から我々のモデルに *Teleportation* を見出すことが可能であるはずである。「breathing→消滅」「分裂→生成」過程によって、図8の現象が再現されることは容易にわかる。

5.2 現象のまとめ

5.1 で述べたことをまとめる。

注目する実験を再現する目的でモデルを構築した。振舞いは大まかに5つの相に分けられる。 $i_u \geq 9.0$ では一様定常状態 (一様グロー)、およそ $2.0 \leq i_u \leq 9.0$ では δ 相になる。 δ 相は境界条件依存性があると思われるのでここでは詳しく扱わなかった。比較的 i_u が小さいと以下に述べる $\alpha \sim \gamma$ の3つの相に分けられた。

振舞いを特徴づける秩序パラメータとして、流れ込み電荷の積分 $\int sdS (= h$ と定義) を紹介した。この h は非線形層・境界部分間の、極板間隙方向に関する電荷の授受プロセスを意味している。以下に述べる Localized structure 中のスポット数と h が対応関係があり、これを観測することは、その構造のダイナミカルな振舞いを見ていく際に便利であった。

$\alpha \sim \gamma$ の3つの相ではスポットが出現し、系全体のパターンダイナミクスのユニットとしての役割を担う。

α 相 α 相では、孤立スポット (Isolated steady spots)、Turing pattern などの定常なパターンが観測された。これらは、スポットの生成と極板方向の移動のタイムスケールが分離している状況で出現し、各スポットは互いの距離が等間隔になるように非常に長い間ゆっくりと動いていた。とくに $I \rightarrow$ 大では特徴的波数をもつ Turing pattern が出現した。 β 相との境界では、特徴的な波数を持たず、多数のスポットが生成・消滅を繰り返す複雑な非定常パターンがみられ、これはスポットの乱流のような振舞いをしていた。

α 相の振舞いは、実験では観測されていないが、 $P \rightarrow$ 小とすることで実験でも観測可能であると期待される。

⁵¹ 4.2.3 での空間 decouple なシステムの振舞いから類推できるかもしれない。 δ 相に対応する i_u の範囲はモデル (15)~(17) のクラスター相、間欠相が存在する領域である。空間 decouple なレベルでのシステムの安定性が効いている可能性はある。

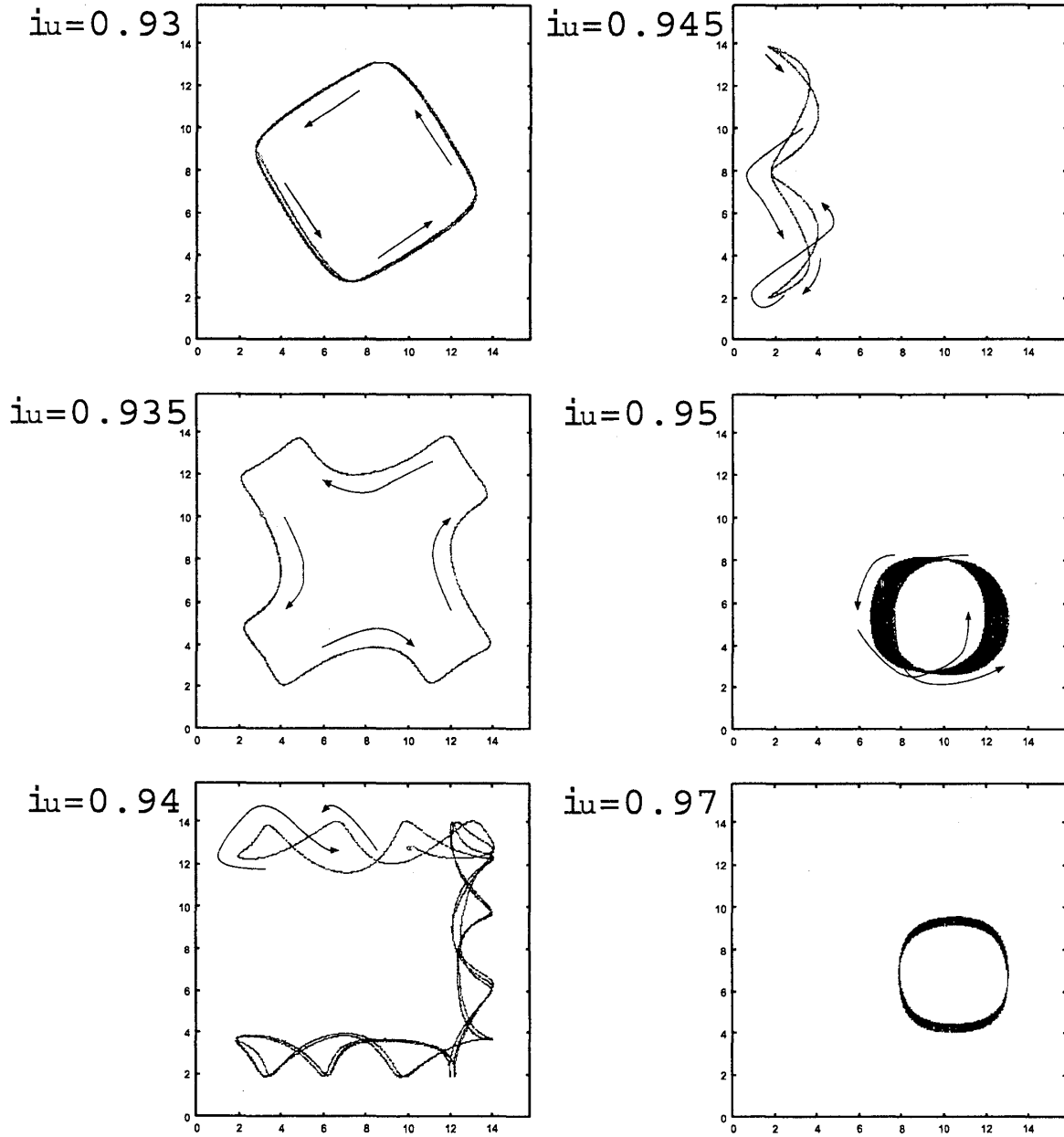


図 34: ノイマン境界条件での ms1 の重心の軌道。ノイマン境界条件だと ms1 は「壁」で跳ね返るが、 i_u の値によって軌道の規則性は様々である。これらの振舞いは、ms1 の軌道半径と極板サイズの比によって決まっていると推測される。青の矢印で ms1 の重心の軌道の方向を、緑の点で漸近的な軌道上の初期位置を示した。D=0.027, メッシュ 128×128

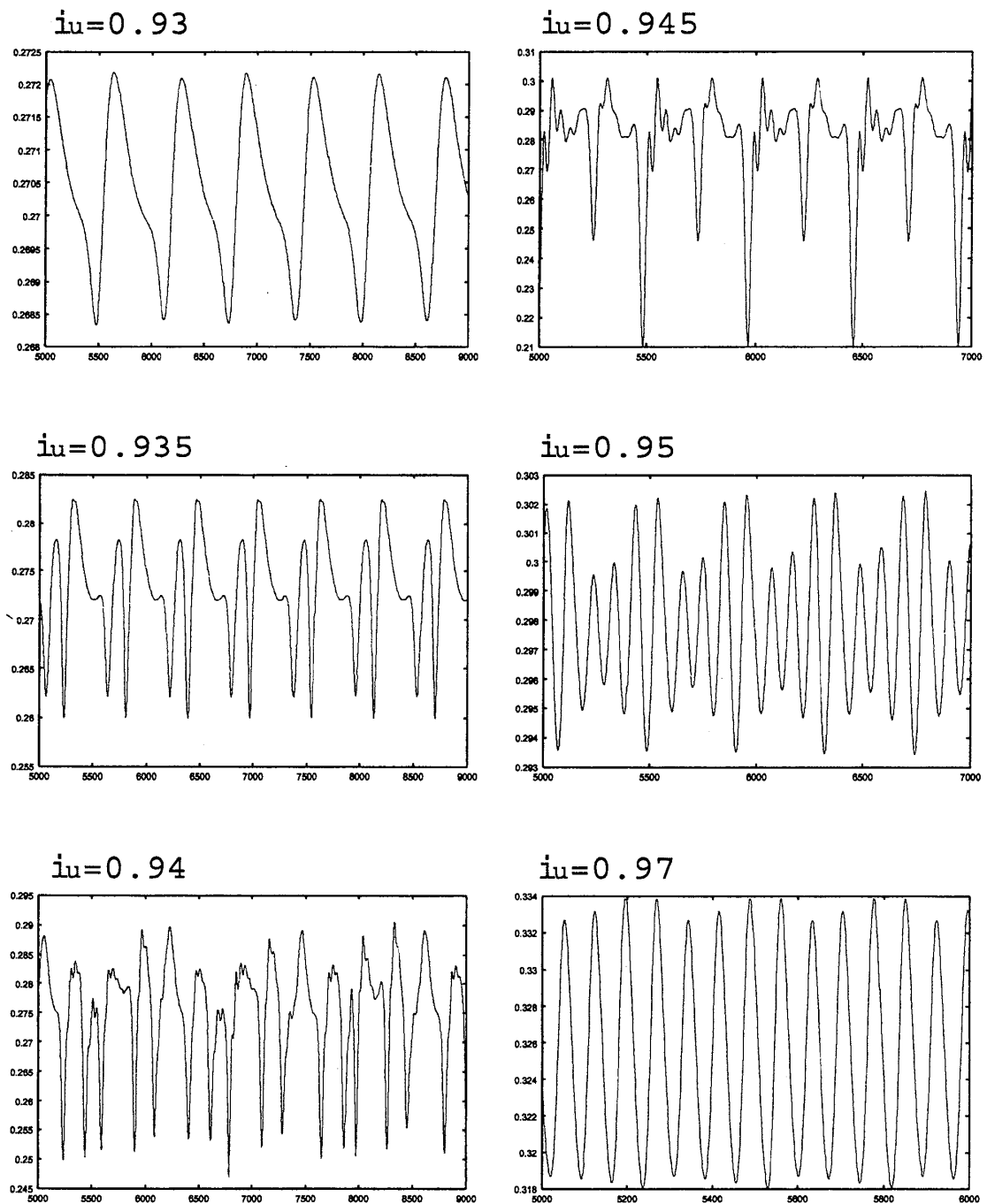


図 35: 図 34 に対応する流れ込み電荷 s の積分 h の時系列。軌道が複雑なものは h も複雑なダイナミクスをしていることが分かる。msl が「壁」で跳ね返るとき、 h はそれに対応して大きく変化する。 i_u の値によって、 h の振動の時間および振幅のスケールが異なることに注意せよ。 $D=0.027, 128 \times 128$

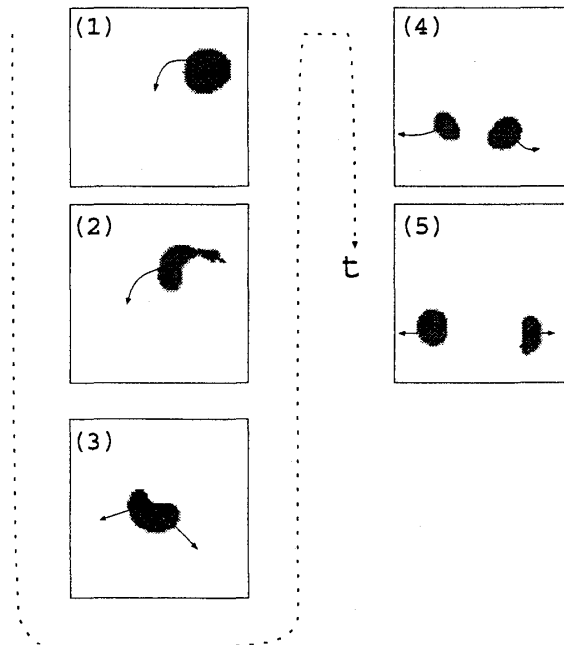


図 36: 動的 2 スポットがみられる場合の連続スナップショット。 $i_u \rightarrow$ 大 につれて速度が増大する。(1) 分裂直前の ms1。かなり膨張している。(2) 分裂したが、一方が小さすぎてすぐ消滅する。いびつな ms1 が残って再び分裂を開始することになる。(3) いびつな ms1 が分裂を開始する直前。(4) 分裂して ms2 になった直後。分裂の際受けた「力」で各々の ms は動いていく。(5) 引き続き ms2 として存在している。やがて一方が breathing して消滅する。 $i_u = 1.05, D = 0.03$



図 37: banana-like スポットのスナップショット。スポットとして耐え切れず、進行方向と垂直にバナナ状に延びる。壊れず直進し続ける。 $i_u = 1.2, D = 0.03$

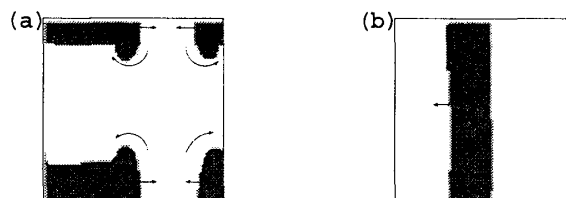


図 38: (a) Periodic pattern。このパターンがほとんど周期的に繰り返される。(b) Plane wave。この平面波は「左」に進んでいる。各サイトの素子は、波と垂直な方向に同期していると思われる。

β 相 β 相は実験で観測された現象との対応がみられた。3.2 で示したように、再現すべき振舞いには、1. スポットが出現し $I \rightarrow$ 大でスポット数 $\rightarrow$ 大 2. スポットが局在構造を形成する 3. 構成スポット数 $\rightarrow$ 大では、いろんな局在構造が間欠的に出現する 4. スポット・局在構造が動く ということである。

この相では複数のスポットからなる「分子的な」Localized structure が観測された。Localized structure を構成するスポットの最大数はパラメータである総電流 $I \rightarrow$ 大に対して単調に増大する (図 24,25)。我々のモデルでの Localized structure は構成するスポットの消滅によってスポット数を変え、しばしば 1 スポットにまでその数を減らす、スポットの分裂 ($\sim$ 消滅) による特徴的な生成プロセスによってその Localized structure を再び構成する。短時間的には構造は壊れるけれど、実際の観測が長時間スケールであることを考慮しその再び構成される Localized structure の運動を観測してみる。すると、実際、Localized structure の再構成よりも大きいタイムスケールで空間を運動しているようにみえる。局在構造をなすスポット数 ≥ 6 では、再構成される度にいろんな局在構造が形成され、長時間スケールでは、「間欠的出現」とみなしうる。

以上より、モデルの満たすべき 1~4 の条件を実現できたといえる。

また、Teleportation という現象に対しあたえられる解釈がある。それは、Teleportation が、我々のモデルの振舞いの特徴、局在構造形成過程がスポットの [breathing による消滅][分裂による生成] によっている、という現象の典型例であるというものである。

那須野の実験 [1] では分子的局在構造がソリトンの振舞い、電流を増やすにしたがってそれを構成するスポット数が増えていくと解釈されている。しかし、実際の観測の時間スケールが、スポットの振舞いにたいしてゆっくりであるために、そのようにみえているのかもしれない。我々のモデルは実験の観測の時間スケールの重要性への示唆をあたえるだろう⁵²。

γ 相 γ 相では、Soliton-like moving spot、Multi moving-breathing spots、および Banana-like moving spots が観測された。特に注目すべきは Soliton-like moving spot (ms1) である。周期境界条件では、はじめ等速直線運動するが、 $I \rightarrow$ 大で等速円運動になり、軌道半径 $\rightarrow$ 小、速度 $\rightarrow$ 大になる。ノイマン境界条件では、ms1 の軌道半径と極板サイズの比で決まる構造安定な軌道を描く⁵³。いずれの振舞いもスポットの非対称性に起因すると考えられる。

γ 相の振舞いは、実験での Isolated spots (図 7) と対応している可能性がある。

6 展望

この章では本論文でなされた研究の、今後の展望を述べる。

境界条件 我々は境界条件として周期境界条件を用いて議論してきた。5 章の脚注で述べたように、実際の実験は Dirichlet 境界条件である。それでもスポットの振舞いなどの定性的に重要な点は再現されると考える。しかし、実験で観測された Loop などは Dirichlet 的な壁からの影響を無視できないと考えられる。実際、周期境界条件ではその再現はできなかった。極板という狭い有界領域で起こることが効くために、あのような振舞いになっているように思えるのである。我々は、今後とりわけ電流の値が大きい場合については Dirichlet 境界条件をもちいて研究しなければならない。

⁵²流れ込み電荷 s の積分 h のダイナミクスとパターンの動的振舞いの対応関係は、実験でのパターンの特徴的時間スケールと間隙方向の電荷の輸送の時間スケールの対応を示唆する。

⁵³図 34, $i_u = 0.94$ は構造不安定である。ここで構造安定とは、「初期条件やパラメータの微小変化に対して軌道の (おおよその) 特徴的な形が変化しない」ことと定義する。

その他の振舞い—動的な紐・ループの再現への展望— 紐やループのようなパターンはこれまで観測されなかったが、 $D=0.004, \tau=35, \xi^2=0.008$ にとると、図 39 のようなパターンの $I(i_u)$ 依存性がみられる⁵⁴。図 39, $i_u=4.2, 6.2$ などは紐状のパターンとみなし得るが、これらはすべて定常状態に向かい、実験で示唆されるような動的な振舞いを示さない。これらが動的な振舞いをするためのメカニズムを探ることは可能であろうか？

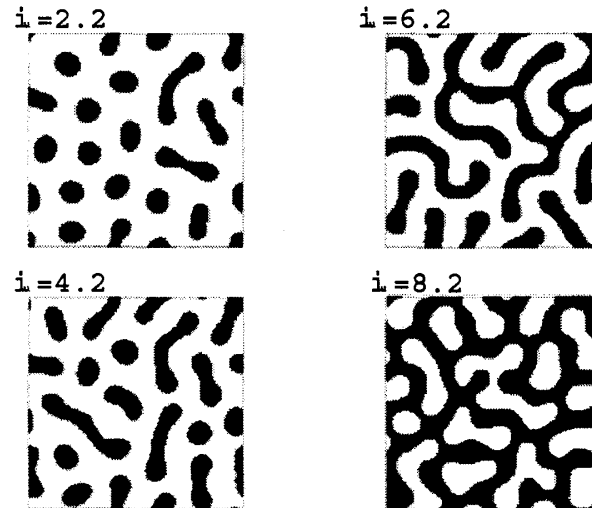


図 39: 紐状のパターン

電流の拡散係数 D_i と圧力 P の関係再考 実験では 1 スポットでも動いたが、 β 相での 1 スポットは動かなかった。 β 相で局在構造が動いているように見えるのは、スポットの分裂による生成・breathing による消滅から準定常な局在構造が繰り返し構成され、その度に位置がずれるからであり、1 スポットではそのような位置変位のメカニズムは存在しない。一方、 γ 相では ms1 が存在していた。上のようなモデルの振舞いと実験のそのの不一致を解消するために、 γ 相での ms1 の存在を考慮し、以下のようなことが考えうる。

- 我々は実験との対応から、操作パラメータを総電流 I と圧力 P に選び、[6] より電流密度 i の拡散係数 D_i が P に対応すると仮定した。これには D_i が I によらないという仮定が含まれる。もし、圧力効果としての現象論的パラメータ $D(=\frac{D_i}{\tau D_0})$ の選択が不適当であり、 D_i が I にもよるとするならば⁵⁵、 I によらない新たなパラメータ D' をとることにより、 γ 相の ms1 を β 相での振舞いに含めることが可能であるかも知れない(図 40)。

2 個以上のソリトン的なスポットは可能か？ 我々のモデルは、力学系の観点からみると、global constraint での保存量をもった 2 成分反応拡散系となっている。global constraint の 2 成分反応拡散系において動的スポット解が存在することは良く知られており [12, 13]、我々のモデルにおいて

⁵⁴ 図 39, $i_u=8.2$ などは CIMA(chlorite-iodide-malonic acid) 反応系でみられたパターンと同様であり、従って Turing Pattern であると考えられる [17]。

⁵⁵ 例えば、モデルで $I \rightarrow$ 大, D : 固定としたときの振舞いが、実験で $I \rightarrow$ 大, $D \rightarrow$ 小としたときの振舞いに対応するならば、モデルのパラメータの選択が不適切だといわざるを得ない。実験での I - P の独立な操作と対応するように選択しなければならない。

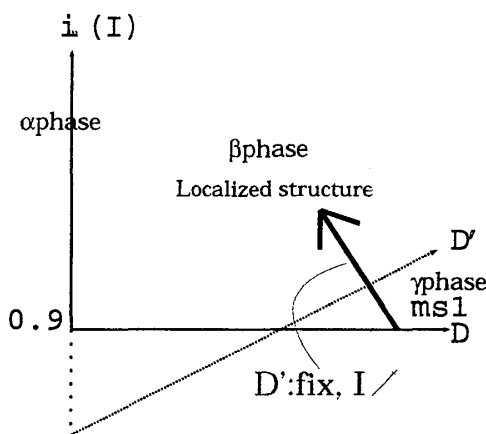


図 40: $D \rightarrow D'$ の変換。I に依存しないパラメータ D' を選ぶ。

もその存在が確認された。しかし、global constraint の 2 成分反応拡散系では任意の個数の動的スポットが、ソリトンの的に安定に存在できないと考えられていて、我々のモデルにおいてもそれを示唆している。2 個以上できるためにはどうしたら良いのか⁵⁶？

準定常状態間の遷移ルールの解釈 5.1.2 では、 β 相でのスポットの生成・消滅による、準定常状態間の遷移ルールの定性的解釈を与えた。 β 相でみられた準定常状態間の遷移は、既に知られている以下の力学系的性質のいずれかで解釈可能かもしれない。

- 準定常状態がサドルに対応しており、いくつかのサドル近傍を経る状態が典型的な初期条件（一樣状態+ノイズ）から実現し、安定に存在している⁵⁷。
- 局在構造の形成プロセスの機構は、スポットの分裂による自己増殖である。それは、あるパラメータが、「 sp_n ($n=1,2,\dots,8$) の定常状態に対応するサドルの出現する手前の値」にあり、それらのサドルの余韻 (after effect) が上述のようなダイナミクスを駆動することにより実現している ([22])。

5.1.2 で述べたように、スポット数 ≤ 4 の時、準定常状態間の遷移過程それ自体がアトラクターのように見え、上の 2 つのいずれかの振舞いであるような印象を受ける。

しかしながら、スポット数 ≥ 6 になると、縮退状態の出現や、スポットの消滅過程の多様性が効いて遷移プロセスが複雑化し、遷移過程それ自体がアトラクターと見ることは不可能になる。これは、出現できる準定常状態の数が急激に増大し、「 sp_n ($n=1,2,\dots,8$) の定常状態に対応する多くのサドルをつなぐ不安定多様体の構造が複雑化したもの」と解釈できるかもしれない。

モデル (11)~(13) は放電系の玩具モデルとして提出したものであるが、そこで見られた振舞いが、global constraint な 2 成分反応拡散系の一般的性質として理解されることが望まれる。

⁵⁶ 最近、ソリトンのスポットが任意の数存在可能なために、いま 1 つの成分を導入して、3 成分反応拡散系として記述している研究がある [11]。

⁵⁷ 低次元力学系的な見方では、ヘテロクリニックサイクルが摂動を受けて出来るリミットサイクルアトラクターのような振舞いと似ている。その意味で既知であるとした。

空間 decouple モデル 空間 decouple モデル (15)~(17) について、4.3.2 で解析を行なった。このモデルは global 結合モデルのプロトタイプである GCM とその性質が多くの部分で似ていた。パラメータを i_u として、カオスの強さという観点から相図を描いた。相図が対応しているところのシステムの安定性は、 i_u 依存性があり、それはヌルクライン上の初期値 (i_u, q_u) の位置と関係があると考えられる。少なくともこの安定性の解析は可能であろう。

集団運動との関連 4.3.2 で、global 結合モデル (15)~(17) の高次元カオス相にて集団運動らしき大きいタイムスケールのモードの存在が示唆された。一方、モデル (11)~(13) の β 相にて、間隙方向の電荷の授受プロセスを意味するマクロ変数 h のゆっくりした時間変化が観測され、それがスポットからなる局在構造の状態 (例えばスポット数) に対応していることが分かった。(11)~(13) でスポットが観測されるのは、 i_u が小さい領域に限られている。その領域は (15)~(17) では高次元カオス相に対応する。これから考えられることは、モデル (11)~(13) における局在構造の形成プロセスの、集団運動との関係性である。ここでは global & local coupling system (プロトタイプとして、例えば [31]) なので、4.3.2 で説明したところのいわゆる集団運動とは異なるかもしれない。しかしながら、たとえばこのようなシナリオがありうるだろう。2 スポットの局在構造が準安定であるとき、マクロ変数 h はほぼ一定である。ところが、(background としての) 各サイトの電流密度 i は微小に時間変化していて、やがてそれが増幅しスポットの局在構造を破壊するまでに至る。システムにはスポット数を保存しようとする傾向があるために、再び同様の局在構造を形成し、 h が準安定になり、... とプロセスを繰り返す。一連の局在構造の振舞いが、各サイトの電流密度とマクロ変数 h との相補的關係によって引き起こされている。

各サイト (ミクロとする) ではカオティックな不安定性を内在しながらも、Turing 的な反応・拡散プロセスによってある秩序的なパターンを形成する。各サイトにはマクロな変数 h のゆっくりとしたフィードバックがあるので、ミクロに内在するカオティックな性質が徐々に表象し、ついには秩序構造を破壊するに至る。そして再び反応・拡散プロセスによって構造形成がはじまる。これは集団運動によって制御されるパターン形成機構といえる。

A 発展方程式の導出

式 (5),(6),(7) と総電荷一定、総電流一定の条件から i, q' に関する 2 成分反応拡散方程式を導く。まず、式 (5),(6),(7) と総電流一定、および回路の条件から

$$j_k^1 - j_k^2 + \left[-\frac{1}{RC}\{(q_k + s_k) - (q_{k-1} + s_{k-1}) + (q_k + s_k) - (q_{k+1} + s_{k+1})\}\right] = 0 \quad (18)$$

$$j_k^2 - \left(i_k + \frac{dq_k}{dt}\right) = \frac{ds_k}{dt} \quad (19)$$

$$l \frac{di_k}{dt} + v_k - \frac{q_k}{C} = 0 \quad (20)$$

$$I = \sum_{k=1}^N j_k^1 = \text{const.} \quad (21)$$

図 9 のように極板間電位差を V とすると、

$$V = \frac{q_k}{C} + \frac{s_k}{C} + r j_k^1 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (22)$$

s_k が独立変数ならば、 $4N$ 個の方程式に対し変数は $5N$ 個存在する。
方程式が解けるために、 s_k を従属変数であるとしよう。つまり、

$$s_k = (\{i_m, q_m\} (m = 1, 2, \dots, N) \text{ の関数})$$

としよう⁵⁸。このようにすれば、方程式は解ける。

しかしながら、 s_k は $\{i_m, q_m\} (m = 1, 2, \dots, N)$ から単純に表現 (例えば、展開して $\{i_m, q_m\} (m = 1, 2, \dots, N)$ の低次で表現) できることは自明ではない。

一方、我々は現象がプラズマであることおよび実験条件 (総電流一定操作) から電荷の総和が変化しないものとして、その下で 2 層モデルの境界部分への電荷の流れ込みのある回路モデルを採用しようという意志がある。したがって、総電荷一定の条件 $Q' = \sum_{k=1}^N q'_k = \sum_{k=1}^N (q_k + s_k) = \text{const.}$ のもとで、それを満たすような s_k を以下こちらから定義することにしよう。

まず、式 (18), (19), (22) から j_k^1, j_k^2 を消去し、 q_k, i_k に関する発展方程式の形に式変形する。 $q'_k = q_k + s_k$ とおくと、(18)(19) は

$$j_k^2 = j_k^1 + \frac{1}{RC}(q'_{k-1} + q'_{k+1} - 2q'_k)$$

$$j_k^2 = i_k + \frac{dq'_k}{dt}$$

これらより

$$\frac{dq'_k}{dt} = j_k^1 - i_k + \frac{1}{RC}(q'_{k-1} + q'_{k+1} - 2q'_k) \quad (23)$$

式 (22) より

$$j_k^1 = \frac{V}{r} - \frac{q'_k}{rC} \quad (24)$$

(23), (24) より

$$\frac{dq'_k}{dt} = \frac{V}{r} - \frac{q'_k}{rC} - i_k + \frac{1}{RC}(q'_{k-1} + q'_{k+1} - 2q'_k) \quad (25)$$

$$\frac{di_k}{dt} = \frac{q'_k}{lC} - \frac{s_k}{lC} - \frac{v_k}{l} \quad (26)$$

また、(21), (22), および総電荷一定条件より $V = rj_k^1 + \frac{q'_k}{C} \Rightarrow NV = r \sum_{k=1}^N j_k^1 + \frac{1}{C} \sum_{k=1}^N q'_k = rI + \frac{Q'}{C}$

$$\Rightarrow V = r \frac{I}{N} + \frac{1}{C} \frac{Q'}{N} = \text{const.}^{59}$$

さらに

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^N j_k^1 = \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{dq'_k}{dt} + i_k - \frac{1}{RC}(q'_{k-1} + q'_{k+1} - 2q'_k) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^N \left\{ i_k - \frac{1}{RC}(q'_{k-1} + q'_{k+1} - 2q'_k) \right\} \end{aligned}$$

⁵⁸ 4.1 仮定 3 により、我々はシステムの振舞いが気体中を流れる電流 i_k と空間電荷 q_k で記述できるという立場に立っている。

⁵⁹ $V = \text{const.}$ はモデルに対する $I = \text{const.}, Q' = \text{const.}$ の要請からの帰結として生じたものである。実験においてこの V は時間変化するという示唆もある。なお、供給電圧 ϵ 、外部抵抗 R_{ex} を固定する典型的実験方法であれば I も V も時間変化する。その方法でも同様な現象がみられるとすれば、 $I = \text{const.}$ は現象に対する本質的効果ではないようである。

境界条件がノイマン、周期のときは $I = \sum_{k=1}^N i_k = \text{const.}$ が成り立つ。よって

$$\frac{dq'_k}{dt} = \frac{V}{r} - \frac{q'_k}{rC} - i_k + \frac{1}{RC}(q'_{k-1} + q'_{k+1} - 2q'_k) \quad (27)$$

$$\frac{di_k}{dt} = \frac{q'_k}{lC} - \frac{s_k}{lC} - \frac{v_k}{l} \quad (28)$$

$$I = \sum_{k=1}^N i_k = \text{const.} \quad Q' = \sum_{k=1}^N q'_k = \text{const.}$$

を満たすように s_k が決められる。 s_k は上述のように一般に $(\{i_m, q_m\}), (m = 1, 2, \dots, N)$ の関数であるが、今、 $\sum_{k=1}^N \frac{di_k}{dt} = 0$ を満たすような制限の下で定義されなければならない。そこで s_k を、

$$s_k \equiv \frac{i_k}{I}(Q' - C \sum_{k=1}^N v_k)$$

と定義する⁶⁰。これを (28) に代入し和をとると、

$$\sum_{k=1}^N \frac{di_k}{dt} = \frac{1}{lC} \sum_{k=1}^N q'_k - \frac{\sum_{k=1}^N i_k}{I} \frac{Q'}{lC} + \frac{\sum_{k=1}^N i_k}{I} \frac{C \sum_{k=1}^N v_k}{lC} - \frac{\sum_{k=1}^N v_k}{l} = 0$$

となって $\sum_{k=1}^N \frac{di_k}{dt} = 0$ を満足する。以上より、

$$\frac{dq'_k}{dt} = \frac{V}{r} - \frac{q'_k}{rC} - i_k + \frac{1}{RC}(q'_{k-1} + q'_{k+1} - 2q'_k) \quad (29)$$

$$\frac{di_k}{dt} = \frac{q'_k}{lC} - \frac{s_k}{lC} - \frac{v_k}{l} \quad (30)$$

$$s_k = \frac{i_k}{I}(Q' - C \sum_{k=1}^N v_k) \quad (31)$$

が得られる。 s_k を上のように定義したことで、変数 $(i_k, q_k, \sum_{k=1}^N s_k)$ の数 $2N+1$ に対し、方程式 (29), (30), および (31) i.e. $\sum_{k=1}^N s_k = Q' - C \sum_{k=1}^N v_k$ の数が $2N+1$ と一致する。つまり方程式は解ける。

空間連続極限をとり、上述の圧力効果を i の拡散として考慮すれば、上の方程式は以下のようになる。

$$\frac{dq'}{dt} = \frac{V}{r} - \frac{q'}{rC} - i + D_{q'} \Delta q' \quad (32)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{q'}{lC} - \frac{s}{lC} - \frac{v(i)}{l} + D_i \Delta i \quad (33)$$

$$s \equiv \frac{i}{I} \{Q' - C \int v(i) dS\} \quad (34)$$

⁶⁰ 容易に分かるように、 s_k は初期 (不安定) 一様定常状態のとき 0 であり、 i_k に比例するように定義されている。

参考文献

- [1] S.Nasuno, Chaos 13, 1010(2003)
- [2] Y.P.Raizer, Gas Discharge Physics (Springer, Berlin, 1991)
- [3] K.G.Müller, Phys.Rev.A 37, 4836(1988)
- [4] J.Berkemeier, T.Dirksmeyer, G.Klempt, H.-G.Purwins, Z.Phys.B-Condensed Matter, 65, 255(1986)
- [5] C.Radehaus, R.Dohman, H.Willebrand, F.-J.Niedernostheide, Phys.Rev.A 42, 7426(1990);
C.Radehaus, H.Willebrand, R.Dohmen, F.-J.Niedernostheide, Phys.Rev.A 45, 2546(1992)
- [6] Ch.Radehaus, T.Dirksmeyer, H.Willebrand, H.-G.Purwins, Phys.Lett.A 125, 92(1987)
- [7] Yu.A.Astrov, Yu.A.Logvin, Phys.Rev.Lett. 79, 2983(1997)
- [8] Yu.A.Astrov, Phys.Rev.E 67, 035203(2003)
- [9] Yu.A.Astrov, H.-G.Purwins, Phys.Lett.A 283, 349(2001)
- [10] C.P.Schenk, P.Schutz, M.Bode, and H.-G.Purwins, Phys.Rev.E 57, 6480(1998)
- [11] C.P.Schenk, M.Or-Guil, M.Bode, H.-G.Purwins, Phys.Rev.Lett. 78, 3781(1997)
- [12] K.Krischer, A.Mikhailov, Phys.Rev.Lett. 73, 3165(1994)
- [13] D.Battogtokh, M.Hildebrand, K.Krischer, A.Mikhailov, Phys. Rep. 288, 435(1997)
- [14] V.S.Zykov, A.S.Mikhailov, S.C.Müller, Phys.Rev.Lett. 78, 3398(1997)
- [15] S.Grill, V.S.Zykov, S.C.Müller, Phys.Rev.Lett. 75, 3368(1995)
- [16] ニコリス, プリゴジン, 「散逸構造」 岩波書店 (1980)
- [17] 森 肇, 蔵本 由紀, 「散逸構造とカオス」 岩波講座 現代の物理学 15, 岩波書店 (1994)
- [18] T.Ohta, M.Mimura, R.Kobayashi, Physica D 34, 115(1989)
- [19] T.Ohta, Physica D 151, 61(2001)
- [20] 太田 隆夫 「非平衡系の物理学」 裳華房 (2000)
- [21] S.-I.Ei, M.Mimura, M.Nagayama, Physica D 165, 176(2002)
- [22] 西浦 廉政 「非線形問題」 岩波書店 第6章, p.221~(1999)
; 西浦 廉政 「自己複製と自己崩壊のパターンダイナミクス」 岩波書店 6章, p.69~(2002)
; Y.Nishiura, D.Ueyama, Physica D 150, 137(2001)
- [23] K.Kaneko, Physica D 41, (1990)
- [24] 金子邦彦・津田一郎, 「複雑系のカオス的シナリオ」, 朝倉書店 (1996)
; Complex Systems : Chaos and Beyond, Springer (2000)

- [25] K.Kaneko, Phys.Rev.Lett. 65,1391(1990)
- [26] 柴田達夫, 博士論文 (1999); T.Shibata,K.Kaneko,Europhys.Lett.38,417(1997)
;T.Shibata,K.Kaneko,Physica D 124,177(1998); T.Shibata,K.Kaneko,Phys.Rev.Lett.81,4116(1998)
;T.Shibata,T.Chawanya,K.Kaneko,Phys.Rev.Lett.82,4424(1999)
- [27] N.Nakagawa,Y.Kuramoto, Prog.Theor.Phys. 89, 313(1993)
- [28] D.Dominguez,H.A.Cerdeira, Phys.Rev.Lett. 71, 3359(1993)
- [29] H.Chate,P.Manneville, Prog.Theor.Phys. 87, 1(1992)
- [30] A.S.Pikovsky,J.Kurths, Phys.Rev.Lett. 72, 1644(1994)
;A.S.Pikovsky,J.Kurths, Physica D 76, 411(1994)
- [31] N.B.Ouchi,K.Kaneko,Chaos 10, 359(2000)
- [32] C.H.Thomas and O.S.Duffendark,Phys.Rev. 35, 72(1930)
- [33] A.M.Turing , Philos.Trans.R.Soc.London B, 237, 37(1952)
- [34] A.L.Hodgkin & A.F.Huxley, J.Physiol. 117, 500(1952)
- [35] P.Gray & S.K.Scott, Chem.Eng.Sci. 38,29(1983); *ibid.* ,39, 1087(1984)
;J.Phys.Chem.89, 22(1985)
- [36] J. E. Pearson, Science 261, 189(1993)
- [37] I.Shimada,T.Nagashima, Prog.Theor.Phys. 61,1605(1979)

謝辞

金子さんに感謝します。その洞察力と発想力、そして僕のような未熟な人間を受け入れてくれる心の広さに救われました。

藤本さんに感謝します。院生活において、マスターしなければならないことの detail を視野の狭い僕に教えて下さいました。

石原さんには本研究について毎日のように議論してもらい、深く感謝しております。

森田さんには2年間部屋が同じということもあっていろいろ迷惑をかけましたが、とにかく計算機に関する質問に親切に答えてくれたことをありがたく思っています。

栗津さんには研究のみならず広範囲にわたってサポートをして頂きました。

古澤さん、富樫さん、本條さんをはじめとする計算機管理者の皆さんには、アナログな僕を常に助け続けてくれました。

佐藤氏、ノートパソコンを貸してくれてありがとうございました。

高木さんに感謝します。豊富な知識で院生活に幅を持たせてくれました。

渡土君、星野君、松浦君、活発な議論ありがとう。

佐々研、池上研の皆様、小松さん、佐野先生、佐野研の皆さん、アドバイスありがとうございました。

本研究をするきっかけになった実験を提供してくれた故那須野氏に感謝しております。