

A Local Stable Manifold Theorem for Random Dynamical Systems

阪大 理 益田健彦 (Takehiko Morita)

ここでは Ruelle [5] で得られた結果を map の random iteration として定義された random dynamical system に応用して、可微分な random dynamical system に対する local stable manifold の存在を導くことを考える。

1. Random Dynamical System と Skew Product Transformation

我々が扱おうとする random dynamical system とは何かということと明確にしておかねばならない。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$ はその上の P を保存する変換とする。今、二つの可測空間 $(M, \mathcal{B}(M))$, $(S, \mathcal{B}(S))$ が与えられているとし $S \times M$ から S への

$\mathcal{B}(S \times M) | \mathcal{B}(M)$ -可測な map $f: (s, x) \mapsto f_s x$ と分布が ν であるような $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の S -値確率変数 ξ_n が与えられているとする。 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\xi_n(\omega) = \xi \circ \sigma^{n-1}(\omega)$ ($n \geq 1$) で定義される確率変数列とすれば、これは $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の S -値定常過程となる。

定義 1.1. $X_n(\omega) = f_{\xi_n(\omega)} X_{n-1}(\omega)$ ($n \geq 1$), $X_0(\omega) = \text{id}_M$ で与えられる random な map の合成からなる列 $X = \{X_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ を random dynamical system という。

random dynamical system の挙動を調べる上で次の変換が重要である。

定義 1.2 $M \times \Omega$ 上の 変換 T を $(x, \omega) \in M \times \Omega$ に対し $T(x, \omega) = (f_{\xi_1(\omega)} x, \sigma \omega) = (X_1(\omega) x, \sigma \omega)$ で定義する。

以後、 ξ_n は独立で $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\xi_1, \xi_2, \dots)$ であることと仮定する。このとき各 $x \in M$ に対し $X(x) = \{X_n(\omega)x\}_{n=0}^{\infty}$ は出発点が x でその推移確率が $p(y, A) = \int 1_A \circ X_1(\omega) y P(d\omega)$

で与えられる Markov 過程になる。この条件下で X と T の関係を述べる前に、次の概念を導入しておく。

定義 1.3. Q, μ をそれぞれ $M \times \Omega, M$ 上の確率測度とするとき

1) 任意の $\Gamma \in \mathcal{B}(M) \times \mathcal{F}$ に対して $Q(T^{-1}\Gamma) = Q(\Gamma)$ が成立するとき Q は T -invariant であるという。

2) Q が T -invariant かつ $\Gamma \in \mathcal{B}(M) \times \mathcal{F}$ が $T^{-1}\Gamma = \Gamma$ なる限り $Q(\Gamma) = 0$ or $Q(\Gamma) = 1$ のとき Q は T -ergodic であるという。

3) 任意の $A \in \mathcal{B}(M)$ に対して $\mu(A) = \int p(x, A) \mu(dx)$ が成立するとき μ は X -invariant であるという。

4) μ が X -invariant で $A \in \mathcal{B}(M)$ に対し $p(x, A) = 1$ μ -a.e. $x \in A$ が成立するとき $\mu(A) = 0$ or $\mu(A) = 1$ となるならば μ は X -ergodic であるという。

次の命題は、Markov 過程 X と変換 T とのエルゴード論的な関係を与えている。

命題 1.1. μ を $\mathcal{B}(M)$ 上の確率測度とするとき

1) μ が X -invariant であることと $\mu \times \rho$ が T -invariant であることは同値である。

2) μ が X -ergodic であることと $\mu \times \rho$ が T -ergodic であることは同値である。

命題 1.2. μ が X -invariant であるとする。
 このとき $M \times \Omega$ 上の可測関数 Φ が $\Phi \circ T(x, \omega) = \Phi(x, \omega)$
 $\mu \times \rho$ -a.e. ならば M 上の可測関数 φ があって
 $\Phi(x, \omega) = \varphi(x)$ $\mu \times \rho$ -a.e. となる。すなわち T -
 invariant な関数は ω (sample, randomness) に
 よらない。

これらの証明は [2], [3] を見られるとよい。

2. A Random Version of the Multiplicative Ergodic Theorem

X は random dynamical system とし μ は X -invariant とする。 $S \times M$ から $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 実行列全体 $M_{\mathbb{R}}$ の中への可測写像 $D(\cdot, \cdot) : (s, x) \mapsto D(s, x)$ と考える。

$$(2.1) \quad D^n(x, \omega) = D(\xi_n(\omega), X_{n-1}(\omega)x) \cdots D(\xi_1(\omega), x)$$

とおくとき 次を得る.

定理 2.1. ([4], [5])

$$(2.2) \quad \int \log^+ \|D(s, x)\| \, \nu(ds) \mu(dx) < \infty.$$

とすれば. $\mathcal{B}(M)$ -可測函数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, m_1, m_2, \dots,$

m_k, S と $\Gamma \in \mathcal{B}(M) \times \mathcal{F}$ で次を満たすものが存在する.

(1) $m_1, m_2, \dots, m_k, S$ は非負整数値をとり

$$0 < S(x) \leq k, \quad m_i(x) > 0 \quad (i \leq S(x)), \quad m_i(x) = 0 \quad (i > S(x))$$

かつ $\sum_{i=1}^k m_i(x) = k.$

$$(2) \quad -\infty \leq \lambda_1(x) = \dots = \lambda_{m_1}(x) < \lambda_{m_1+1}(x) = \dots =$$

$$= \lambda_{m_1+m_2}(x) < \dots < \lambda_{m_1+\dots+m_{S-1}+1}(x) = \dots = \lambda_k(x)$$

であり, $\lambda_i^+ \in L^1(\mu)$ である.

$$(3) \quad (\mu \times \nu)(\Gamma) = 1 \quad \text{で} \quad T\Gamma \subset \Gamma.$$

(4) $(x, \omega) \in \Gamma$ なる限り

$$(2.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [D^n(x, \omega)^* D^n(x, \omega)]^{\frac{1}{2n}} = \Lambda(x, \omega)$$

が存在し $\Lambda(x, \omega)$ の固有値が丁度 $\exp \lambda''(x) < \dots$

$\exp \lambda^{(1)}(x)$ になる. ここで $\lambda^{(1)}(x)$ は λ_i 's の相異なる

値を表わす.

(5) 各固有値に対応する固有空間を $U^{(1)}(x, \omega), U^{(2)}(x, \omega), \dots, U^{(s)}(x, \omega)$ とすれば $\dim U^{(i)}(x, \omega) = m_i(x)$.

(6) $V^{(0)}(x, \omega) = \{0\}$, $V^{(i)}(x, \omega) = U^{(1)}(x, \omega) + \dots + U^{(i)}(x, \omega)$

($i \geq 1$) とすれば $u \in V^{(i)}(x, \omega) \setminus V^{(i-1)}(x, \omega)$ なる限り

$$(2.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D^n(x, \omega)u\| = \lambda^{(i)}(x).$$

である.

証明 命題 1.1 から $\mu \times P$ は T -invariant であるから Ruelle [5] の Theorem 1.6 において $\tau, \rho, T(x)$ のところへ $T, \mu \times P, D(\xi_1, \omega, x)$ を代入すれば $\lambda_1, \dots, \lambda_s, m_1, \dots, m_s, S$ が x のみの函数であるという主張をのぞいて 定理 2.1 は証明されたことになる. ところが. これらの函数は T -invariant であるので 命題 1.2 を用いれば x のみの函数であると思わせる. //

注意 勿論 μ が X -ergodic ならば $\mu \times P$ が T -ergodic となり λ_i, m_i, S は $\mu \times P$ -a.e. に constant である.

定義 2.1 上の $\lambda^{(1)} < \dots < \lambda^{(s)}$ を $D(\cdot, \cdot)$ の Lyapunov exponents という.

3. A Random Version of Ruelle's Non-linear Ergodic Theorem

この節では [5] の Theorem 5.1 から、 x を index とする map の族 F_x の定義域が x によらずに $\overline{B}(1)$ であるという仮定をのぞくことにより random dynamical system に対する non-linear ergodic theorem を導く。

μ を X -invariant とする。整数 $r \geq 1$ と $\theta \in (0, 1]$, $S \times M$ 上の正值可測写像 ρ が与えられているとする。
 $(s, x) \in S \times M$ に対し $C^{r, \theta}(\overline{B}(\rho(s, x)), 0, ; \mathbb{R}^k, 0)$ の元 $F(s, x)$ が対応しているとする。但し $C^{r, \theta}(\overline{B}(\rho), 0, ; \mathbb{R}^k, 0)$ は、半径 ρ 中心 0 の $\mathbb{R}^k$ の閉球から $\mathbb{R}^k$ への $C^{r, \theta}$ -map G で $G(0) = 0$ なるものの全体とする。よく定義することが可能なら $F^n(x, \omega) = F(\xi_n(\omega), X_{n-1}(\omega)x) \circ \cdots \circ F(\xi_1(\omega), x)$ とおき、 $DF(s, x)$ で $F(s, x)$ の 0 での微分とあるかすものとする。このとき、

定理 3.1 $(s, x) \mapsto DF(s, x), \|F(s, x)\|_{r, \theta}$ が可測で

$$(3.1) \quad \int \log^- p(s, x) \, \nu(ds) \mu(dx) < \infty$$

かつ

$$(3.2) \quad \int \log^+ \|F(s, x)\|_{r, \theta} \, \nu(ds) \mu(dx) < \infty$$

とする. $\lambda < 0$ とするとき $DF(s, x)$ の Lyapunov exponents は $\mu \times P$ -a.e. で λ と $-\infty$ と異なるものとする. このとき $(\mu \times P)(\Pi) = 1$ なる可測集合 $\Pi \subset M \times \Sigma$ と Π 上で定義された可測函数 $\beta > \alpha > 0$, $r \geq 1$ で次の性質をもつものが存在する.

(1) $(x, \omega) \in \Pi$ のとき集合

$$(3.3) \quad \mathcal{U}^\lambda(x, \omega) = \left\{ u \in \overline{B}(\alpha(x, \omega)); \|F^n(x, \omega)u\| \leq \beta(x, \omega)e^{n\lambda}, n \geq 0 \right\}$$

は $0 \leq V^{(p)}(x, \omega)$ と接空間とする $\overline{B}(\alpha(x, \omega))$ の $C^{r, \theta}$ -submanifold になる. 但し $p = \max \{ i; \lambda^{(i)}(x) < \lambda \}$.

(2) $u, v \in \mathcal{U}^\lambda(x, \omega)$ ならば

$$(3.4) \quad \|F^n(x, \omega)u - F^n(x, \omega)v\| \leq \gamma(x, \omega)e^{n\lambda}$$

が, すべての $n \geq 0$ に対して成立する.

略証.

もし $f(s, x)$ が (s, x) に依るなければこの定理は [5] Theorem 5.1 において τ, p, F_α と $T, \mu \times P, DF(\xi, (\omega), x)$ に置き換えばよい. しかし $f(s, x)$ が (s, x) に依るときには Theorem 5.1 の証明

法がそのまま使えるように $\beta(\omega, \omega)$ を

$$\beta(\omega, \omega) e^{n\lambda} < \rho(\xi_{n+1}(\omega), X_n(\omega)x) \quad \forall n \geq 0$$

なるように選ばねばならない。ところがこれは仮定 (3.1) により 保証される。 //

4. A Local Stable Manifold Theorem for Random Dynamical Systems

この節では我々の目標である可換写像の random iteration によって定義される random dynamical system に対する local stable manifold の存在定理を述べる。 M を k 次元 compact smooth manifold とし S は M 上の C^r ($r \geq 2$) 写像の全体とし $f_s x = S(x)$ となる $X_n(\omega)x = \xi_n(\omega)\xi_{n-1}(\omega)\cdots\xi_1(\omega)x$ とする。

μ を X -invariant とする。(実はこの場合 Markov 過程の一般論からこのような μ の存在は容易に示せる。) 次の仮定をおく。

$$(4.1) \quad \int \log^+ \|S\|_r \, \mu(ds) < \infty$$

但し $\|S\|_r$ は $\sup_{x \in M} \|S(x)\|_r$ の C^r -norm.

この (4.1) の下で次の結果を得る.

定理 4.1 (1) $\Pi \subset \Gamma$, $(\mu \times P)(\Pi) = 1$ なる

$M \times S^1$ の可測部分集合 Π がとれて, $(x, \omega) \in \Pi$ なる限り

filtration $\{0\} = V_{(x, \omega)}^{(0)} \subsetneq V_{(x, \omega)}^{(1)} \subsetneq \dots \subsetneq V_{(x, \omega)}^{(s(x))} = T_x M$

と数 $-\infty \leq \lambda^{(1)}(x) < \lambda^{(2)}(x) < \dots < \lambda^{(s(x))}(x)$ が定まり

$u \in V_{(x, \omega)}^{(i)} \setminus V_{(x, \omega)}^{(i-1)}$ なる限り

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|DX_n|_{\omega}|_x u\| = \lambda^{(i)}(x)$$

を示す. ここで $\|\cdot\|_x$ は M の Riemann 計量から導かれた $T_x M$ 上のノルムである.

(2) $\lambda < 0$ に対して Π^λ と

$$\Pi^\lambda = \{(x, \omega); \lambda^{(i)}(x) \notin \{\lambda, -\infty\}, i=1, 2, \dots, s(x)\}$$

とおけば Π^λ 上の可測函数 $\beta > \alpha > 0$, $\gamma \geq 1$ で次の性質をもつものが存在する.

a) $(x, \omega) \in \Pi^\lambda$ ならば

$$\mathcal{U}^\lambda(x, \omega) = \{y \in \overline{B}(x, \alpha(x, \omega)) : d(X_n|_{\omega} x, X_n|_{\omega} y) \leq \beta(x, \omega) e^{n\lambda}, n \geq 0\}$$

は $x \in M$ で $V^{(p)}(x, \omega)$ を接空間とする $\overline{B}(x, \alpha(x, \omega))$ の C^{r-1} -submanifold である. 但し $p = \max\{i; \lambda^{(i)}(x) < \lambda\}$

b) $y, z \in \mathcal{U}^\lambda(x, \omega)$ ならば

$d(X_{n(\lambda)}y, X_{n(\lambda)}z) \leq \gamma(\lambda, \omega) d(y, z) e^{n\lambda}$
 がすべての $n \geq 0$ に対して成立する.

略証 M は compact であるから、任意の $x \in M$ に対して $\overline{B}(x, 1)$ が x の normal coordinate neighbourhood に含まれると仮定してよい. $S \times M$ 上の函数 f を

$$f(s, x) = \frac{1}{1 + \sup_{y \in \overline{B}(x, 1)} \|(Ds)(y)\|}$$

で定義する. 但し $(Ds)(y)$ は s の y における微分をあらわす. するとこの $f(s, x)$ は (4.1) を用いると条件 (3.1) を満たすことが確かめられる. ψ を Riemannian

trivialization とする. すなわち ψ は TM から $M \times \mathbb{R}^k$ の上の両可測写像で $u, v \in T_x M$ に対し

$$(\psi_x u, \psi_x v) = (u, v)_x$$

をみたす. ここで $(\cdot, \cdot)_x$ は $T_x M$ の Riemannian inner product を $(\cdot, \cdot)$

は $\mathbb{R}^k$ の Euclidean inner product をあらわす

ものとする. $F(s, x) : \overline{B}(f(s, x)) \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ を

$$F(s, x) = \psi_{s(x)} \circ \text{Exp}_{s(x)}^{-1} \circ s \circ \text{Exp}_x \circ \psi_x^{-1}$$

で定義すれば $DF(s, x)(0) = \psi_{s(x)} \circ Ds(x) \circ \psi_x^{-1}$ であり

仮定 (4.1) から $F(s, x)$ は 条件 (3.2) を

$DF(5, x)$ は条件 (2.2) を満たす。従って定理 4.1 の主張は定理 3.1 から容易に導かれる。 //

注意 我々は離散時間の場合を扱ったが、連続時間の場合に関しては Carverhill が [1] で確率微分方程式の定める flow に対する結果を出している。

References

- [1] A. Carverhill, Flows of stochastic dynamical systems : ergodic theory, Stochastics, 14 (1985) 273-318.
- [2] T. Morita, Random iteration of one-dimensional transformations, Osaka J. Math. 22 (1985) 489-518.
- [3] T. Morita, A Local stable manifold theorem for random dynamical systems to appear.
- [4] V. I. Oseledec, A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic

numbers, Trans. Moscow Math. Soc. 19
(1968) 197-221.

- [5] D. Ruelle, Ergodic theory of differentiable
dynamical systems, Publ. IHES. 50 (1979)
275-305.