

Nonarchimedean function algebra

について

東京電機大 鶴見 和之

§1. 序

Nonarchimedean analysis については, Monna [4] 及び, Narici, Beckenstein and Bachman [6] の本において基本的な事柄が述べられており, その中で nonarchimedean function algebra についてもいくつか述べられております。しかしここでは Van der Put [7] に従って nonarchimedean function algebra の中で特に n.a. valued field F における polynomially convex set についての事柄を紹介することにします。

記号

$F: \overset{\text{nontrivial}}{\text{nonarchimedean (n.a.) valued field}}$

normed space 又は normed algebra は凡そ n.a. とする。

algebra A over F に対して

$\mathcal{M}(A) := \{ \varphi \mid \varphi: A \rightarrow F : \text{homomorphism} \}$

この $\mathcal{M}(A)$ は Gelfand ideals の全体と一致する.

$\varphi \in \mathcal{M}(A)$ に対して, $f(\varphi) := \hat{f}(\varphi) := \varphi(f)$, $f \in A$, と書く.

§ 2. n.a. function algebra.

以下において F は complete とする.

定義 1. A が (n.a.) function algebra over F であるとは.

$\Leftrightarrow$ (1) A : commutative algebra over F , $\exists 1$.

(2) norm $\|f\| := \sup \{ |f(\varphi)| \mid \varphi \in \mathcal{M}(A) \}$, $f \in A$, に関して Banach algebra.

Banach algebra A に対して, $\mathcal{M}(A)$ は weak topology を持つとある.

定義 2. 空でない ^{有界} 集合 $V \subset F^n$ に対して, 多項式環 $F[X_1, \dots, X_n]$ 上の seminorm $\|f\|_V$ を次の様に定義する.

$$\|f\|_V := \sup \{ |f(x)| \mid x \in V \}, \quad f \in F[X_1, \dots, X_n]$$

$P(V)$: $F[X_1, \dots, X_n]$ の completion

有界集合 $V \subset F^n$ が polynomially convex であるとは,

$\Leftrightarrow \forall y \notin V$ に対して, $\exists f \in F[X_1, \dots, X_n]$ s.t. $|f(y)| > \|f\|_V$.

有界集合 $V \subset F^n$ が m -convex であるとは

$\Leftrightarrow \forall y \notin V$ に対して, $\exists f \in F[X_1, \dots, X_n]$, $\deg f \leq m$, s.t. $|f(y)| > \|f\|_V$.

有界集合 $V \subset F^n$ に対して

$$\text{hull}_m(V) := \{x \in F^n \mid |f(x)| \leq \|f\|_V \text{ for } \forall f \in F[x_1, \dots, x_n], \deg f \leq m\}$$

$$\text{hull}(V) := \{x \in F^n \mid |f(x)| \leq \|f\|_V \text{ for } \forall f \in F[x_1, \dots, x_n]\}.$$

明らかに $\text{hull}(V) \subset \text{hull}_m(V)$, $\text{hull}(V) = \mathcal{M}(\mathcal{P}(V))$.

有限生成なる function algebra に対しては、通常の有限生成 Banach algebra の場合と同様に次の事が成り立つ。

定理 1. $A: f_1, \dots, f_n$ により生成された function algebra

$$V := \{(f_1(\varphi), \dots, f_n(\varphi)) \in F^n \mid \varphi \in \mathcal{M}(A)\}$$

$\Rightarrow$ (1) V : polynomially convex.

(2) $A \cong \mathcal{P}(V)$.

(3) V は $\mathcal{M}(A)$ に homeomorphic.

証明 (1) $y \in \text{hull}(V)$ とし, $\Psi: F[f_1, \dots, f_n] \rightarrow F$ を

$\Psi(p(f_1, \dots, f_n)) := p(y)$, p は多項式, と定義する.

Ψ は連続で A に拡大出来, V の定義より $y \in V$ を得る. よって

V は polynomially convex.

(2). $I := \{p \in F[x_1, \dots, x_n] \mid \|p\|_V = 0\}$ とおくと

$$F[f_1, \dots, f_n] \cong F[x_1, \dots, x_n]/I. \text{ よって}$$

$$A \cong (F[f_1, \dots, f_n])^- \cong (F[x_1, \dots, x_n]/I)^-$$

$$= (F[x_1, \dots, x_n])^- \cong \mathcal{P}(V).$$

(3). (2) より $\mathcal{M}(A)$ は $\mathcal{M}(\mathcal{P}(V))$ に homeomorphic, (1) より

$$\text{hull}(V) = V. \text{ 故に}$$

$$\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(\mathcal{P}(V)) = \text{hull}(V) = V.$$

§3. F における *polynomially convex set*.

ultrametric space X において次の事が成り立つ.

- (i) $d(a, b) < d(b, c) \Rightarrow d(a, c) = d(b, c)$.
- (ii) $B(a, r) := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$ とするとき,
 $b \in B(a, r) \Rightarrow B(a, r) = B(b, r)$.
- (iii) $a, b \in X, 0 < r \leq r'$ ならば, $B(a, r) \cap B(b, r') = \emptyset$
 又は $B(b, r') \subset B(a, r)$.
- (iv) $B(a, r)$ は *clopen set*.
- (v) $\{x \in X \mid d(a, x) = r\}$ は *clopen set*.

以上の事を準備し次の関係を定義する:

$V \subset F, x, y \in V$ に対し次の $\sim$ を定義する.

$$x \sim y \iff B(x, |x-y|) \subset V$$

明らかに $\sim$ は同値関係である.

$j_V : V \longrightarrow V/\sim$ とする (又は単に j と書く).

$V/\sim$ に *quotient topology* を入れる.

次の事柄が成り立つ:

(i) $\forall b \in V/\sim$ に対し, $j^{-1}(b)$ は 1 点又は *ball* である.

$\because j^{-1}(b)$ が 1 点でないとする, $\exists x, y \in j^{-1}(b)$. 故に,

$B(x, |x-y|) \subset V$. よって $B(x, |x-y|)$ 内の任意の点が $j^{-1}(b)$ に
 入る事を示せばよい. $\forall z \in B(x, |x-y|)$ に対し,

$$u \in B(x, |x-z|) \Rightarrow |u-x| \leq |x-z| \leq |x-y| \therefore u \in B(x, |x-y|) \subset V$$

$\therefore B(x, |x-z|) \subset V$ であり $x \sim z \therefore z \in j^{-1}(b)$.

(2) $\alpha, \beta \in V$, $j(\alpha) \neq j(\beta)$ ならば $d(\alpha, \beta) = d(j(\alpha), j(\beta))$:

$$\therefore d(j(\alpha), j(\beta)) := \inf \{ |x-y| \mid j(\alpha) = j(x), j(\beta) = j(y) \}$$

$x \neq y, x \sim x' \Rightarrow |x-y| > |x-x'|$ であり, $x \sim x', y \sim y'$

$$x \neq y \text{ ならば } |x-y| = |(x-x') + (x'-y') + (y'-y)|$$

$$= \max(|x-x'|, |x'-y'|, |y'-y|) = |x'-y'| \text{ であり}$$

$j(\alpha) \neq j(\beta)$ ならば $d(\alpha, \beta) = d(j(\alpha), j(\beta))$.

(3) $j^{-1}(b)$ が ball ならば, b は $V/\sim$ の isolated point である.

(4) V が complete ならば, $V/\sim$ も complete.

補題 1. $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$. $\rho > 0$ とするとき,

n -convex set $V_\rho := \{x \in F \mid |(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)| \leq \rho\}$ は

$$V_\rho = B(a_1, \rho_1) \cup B(a_2, \rho_2) \cup \dots \cup B(a_n, \rho_n) \text{ と表わす,}$$

$$\text{ただし } \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n \in \overline{|F^*|}$$

証明. $|a_1| \geq |a_2| \geq \dots \geq |a_n|$, $|a_1| > |a_n|$ としよ.

$\therefore |a_1| = |a_2| = \dots = |a_n|$ ならば座標変換すれば上の様にとけ,

又 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ ならば補題 1 は明らかである.

次にこの補題を①, ②の場合に分けて示す.

① $\rho \geq |a_1|^n$ の場合: $V := \{x \in F \mid |x| \leq \sqrt[n]{\rho}\}$ とおくと,

$$V_\rho = V \text{ であり, 前記(ii)により } B(a_i, \rho_i) = B(0, \rho_i)$$

であるから, この場合は示すべく, ただし $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n =$

$$= \sup \{ \lambda \in |F^*| \mid \lambda \leq \sqrt[n]{\rho} \}.$$

② $\rho < |a_1|^m$ の場合: $|a_1| \geq |a_2| \geq \dots \geq |a_m|$ の中で $|a_1| = |a_i|$ となる最後の番号 i を i_0 とする. 今,

$$W_1 := \sqrt[\rho]{\rho} \cap \{x \in F \mid |x| = |a_1|\}, \quad W_2 := \sqrt[\rho]{\rho} \cap \{x \in F \mid |x| < |a_1|\}.$$

とおくと, 次の ρ が成り立つ

$$W_1 = \{x \in F \mid |(x - a_1) \dots (x - a_{i_0})| |a_1|^{m-i_0} \leq \rho\}$$

$$W_2 = \{x \in F \mid |(x - a_{i_0+1}) \dots (x - a_m)| |a_1|^{i_0} \leq \rho\}$$

更に $\sqrt[\rho]{\rho} = W_1 \cup W_2$ である. よって W_1, W_2 について同様の操作をくり返し補題1を得る.

補題2. $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} : F$ の $n+1$ 個の異なる元.

$$\Rightarrow \text{hull}_n(\{a_1, \dots, a_{n+1}\}) = B(a_{i_1}, \rho_1) \cup \dots \cup B(a_{i_m}, \rho_m).$$

ここで, 直ちの $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, $\rho_1, \dots, \rho_m \in |F^*|$.

証明. $\mathcal{P}_n$: degree $\leq n$ なる多項式の全体.

$V := \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ とおく. 次の様な多項式を作る:

$$p_0 := 1, \quad p_1 := (x - a_1), \quad p_2 := (x - a_1)(x - a_{i_2}), \dots$$

$$p_n = (x - a_1)(x - a_{i_2}) \dots (x - a_{i_m}).$$

ただし, $\|p_k\|_V = |p_k(a_{i_{k+1}})|$ となる様に a_{i_k} を選ぶ.

$\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ は $\mathcal{P}_n$ の $\|\cdot\|_V$ に関する直交基である.

$$\therefore \left\| \sum_{i=0}^m \alpha_i p_i \right\|_V = \max \|\alpha_i p_i\|_V.$$

従って $\text{hull}_n(V) = \bigcap_{i=1}^m V_i$, ただし $V_i := \{x \in F \mid |p_i(x)| \leq \|p_i\|_V\}$.

又補題1により, $V_j = B(a_{i_j}, \rho_j) \cup \dots \cup B(a_{i_j}, \rho_j)$.

故に,

$$\text{hull}_n(V) = \bigcap V_i = B(a_1, \rho_1) \cup \dots \cup B(a_m, \rho_m).$$

ただし $\rho_1, \dots, \rho_m \in \overline{|F^*|}$.

補題 3. F の任意の n -convex subset は k ($\leq n$) 個の 変又は ball の合併である.

証明. V : n -convex subset of F , $\text{card}(V/\sim) > n$ とする.

$a, a_1, a_2, \dots, a_m \in V$ s.t. $\text{card}(\{j(a), j(a_1), \dots, j(a_m)\}) = n+1$, をとる. 補題 2 により, $\exists \rho > 0$ s.t. $B(a, \rho) \subset \text{hull}_n(\{a, a_1, \dots, a_m\}) \subset V$.
よって, $\forall a \in V$ は maximal ball $B(a, \rho_a) \subset V$ の中にある.

2 つの ball $B(a, \rho), B(a', \rho')$ に対して, 前記 (iii) により 交わりたないか又は他方に含まれる故, $B(a, \rho) \cap B(a', \rho') = \emptyset$ 又は

$B(a, \rho) = B(a', \rho')$ である, 故に V は disjoint ball の合併になる.

その個数が n より大とすると, それらの中で $(n+1)$ 個の disjoint ball の中心 $b_1, \dots, b_{n+1}$ がとれ $\text{hull}_n(\{b_1, \dots, b_{n+1}\}) \subset V$.

そうすると, 補題 2 により, 或る b_i, b_j ($i \neq j$) が 1 つの ball ($\subset V$) に含まれ, その中点となり得る. これは矛盾. よって

その個数 $\leq n$.

命題. R : algebra over F , $\exists 1$, 更に 2 つの seminorm

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ を持ち $\|xy\|_i \leq \|x\|_i \cdot \|y\|_i$ for $\forall x, y \in R, \|1\|_i = 1$.

$\|\cdot\| := \max(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2)$ とすると, 次の 2 つの事柄は同値である.

$$(1) \exists f \in R, \text{ s.t. } \|f - 1\|_1 < 1, \|f\|_2 < 1.$$

$$(2) (R, \|\cdot\|)^- \cong (R, \|\cdot\|_1)^- \times (R, \|\cdot\|_2)^-$$

証明. (1) $\Rightarrow$ (2). map $\psi: (R, \|\cdot\|) \rightarrow (R, \|\cdot\|_1) \times (R, \|\cdot\|_2)$ を $\psi(a) := (a, a)$ により定義する.

ψ の image が dense であることを示せばよい. $e := (1, 0)$.
 $\forall \varepsilon > 0$ に対して, 奇数 m を次の様にとり, 即ち, $g := ((f-1)^m + 1)^m$,
 $\|\psi(g) - e\| < \varepsilon$. そうすると $\forall (a, b) \in (R, \|\cdot\|_1) \times (R, \|\cdot\|_2)$
 に対して, $ag + b(1-g)$ をとると,

$$\|\psi(ag + b(1-g)) - (a, b)\| \leq \varepsilon \max(\|a\|_1, \|b\|_2).$$

(2) $\Rightarrow$ (1) [1] p 20. lemma 3.2 と同様にして示す事が出来る.

補題 4. $V := B(a_1, \rho_1) \cup \dots \cup B(a_n, \rho_n) \subset F$.

$$B(a_i, \rho_i) \cap B(a_j, \rho_j) = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$\Rightarrow (1) \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(B(a_1, \rho_1)) \times \dots \times \mathbb{P}(B(a_n, \rho_n))$$

$$(2) V: \text{polynomially convex.}$$

証明. (1) 仮定により $\rho_i, \rho_j < |a_i - a_j|$ ($i \neq j$) である.

$$m := \max \{ |a_i - a_j| \mid i, j \in \{1, \dots, n\} \} < \infty$$

$$m = |a_1 - a_2| = |a_1 - a_3| = \dots = |a_1 - a_n|, |a_1 - a_k| < m$$

($k > 1$) とする.

$$p(x) := (x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n)(a_1 - a_2)^{-1} \dots (a_1 - a_n)^{-1}$$

$$\text{とおく} \quad \|p - 1\|_X < 1, \quad \|p\|_Y < 1.$$

$$\text{但し } Y := B(a_2, \rho_2) \cup \dots \cup B(a_n, \rho_n), \quad X := V \setminus Y.$$

よって前命題により (1) が導かれる.

$$(2) \quad e_i \in P(V) \text{ s.t. } e_i(x) = 1, x \in B(a_i, \rho_i), e_i(x) = 0, x \notin B(a_i, \rho_i)$$

とし $\varphi \in \mathcal{M}(P(V))$ とあると, $\exists j$ s.t. $\varphi(e_i) = 1, \therefore \varphi \in B(a_i, \rho_i)$

$$\text{故に} \quad \text{hull}(V) = \mathcal{M}(P(V)) = \bigcup_{i=1}^m B(a_i, \rho_i) = V$$

定理 2. $V: F$ の有界部分集合.

$$V: \text{polynomially convex} \Leftrightarrow V/\sim: \text{compact}.$$

証明 (1) $V/\sim: \text{compact}$ とあると, V は closed in F .

任意の正の整数 m に対して, $\exists a_1, \dots, a_m \in V/\sim$ s.t.

$$V/\sim = \bigcup_{i=1}^m B(a_i, 1/m). \quad x_i \in V \text{ s.t. } j(x_i) = a_i \text{ をとる,}$$

$$j^{-1}(B(a_i, 1/m)) = (B(x_i, 1/m) \cap V) \cup j^{-1}(a_i) \text{ とする,}$$

$$V_m := \bigcup_{i=1}^m B(x_i, 1/m) \cup j^{-1}(a_i) \text{ とおくと, } V_m \text{ は}$$

補題 4 により, polynomially convex で $V_m \supset V$. 又

$$V = \bigcap V_m \text{ であるから, } V \text{ は polynomially convex.}$$

(2) $V: \text{polynomially convex}$ とある.

$\{\text{hull}_n(V)/\sim\}$ は projective system とある.

$$\text{map } \varphi_n: V \hookrightarrow \text{hull}_n(V) \longrightarrow \text{hull}_n(V)/\sim \text{ をとる,}$$

$$\text{continuous map } \varphi: V \longrightarrow \varprojlim \text{hull}_n(V)/\sim \text{ を得る.}$$

更に次の map ψ を得る.

$$\psi: V/\sim \longrightarrow \varprojlim \text{hull}_n(V)/\sim$$

そして ψ は isometric とある.

補題 3 により $\text{card}(\text{hull}_n(V)/\sim) \leq n$ とあるから

$\varprojlim_n \text{hull}_n(V)/\sim$ is compact and $V/\sim$ is complete
therefore $V/\sim$ is compact.

系. V, W : polynomially convex.

$\Rightarrow$ (1) $V \cup W$: polynomially convex

(2) $V \cap W = \emptyset \Rightarrow P(V \cup W) = P(V) \times P(W)$.

(3) X : closed subset of $V/\sim \Rightarrow j^{-1}(X)$: polynomially convex.

文 献

- [1] G. Bachman : Introduction to p -Adic Numbers and Valuation Theory, Academic Press. (1964).
- [2] E. Beckenstein : On regular nonarchimedean Banach algebras, Arch. Math. 19 (1968). 423 — 427.
- [3] H. Grauert und R. Remmert : Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nicht-archimedischen Analysis, Inventiones math. 2 (1966).
- [4] A. F. Monna : Analyse non-archimédienne, Springer (1970)
- [5] L. Narici : On nonarchimedean Banach algebras, Arch. Math. 19 (1968) 428 — 435.
- [6] L. Narici, E. Beckenstein and G. Bachman : Functional

analysis and valuation theory, Marcel Dekker (1971).

[7] M. Van der Put : Nonarchimedean function algebras.

Indagationes Math. 33 (1971) 60 — 77.

[8] A. C. M. Van Rooij and W. H. Schikhof : Nonarchimedean

Analysis, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) XIX (1971) 120 — 160.