

$2A^{-1} < Q < 3A^{-1}$ の波数領域における HeII 中の Roton Line Width

阪大教養 西山 敏之

(5月17日受理)

§1. まえおき

Jäckel と Kehr¹⁾ は, Dietlich ら²⁾ が中性子散乱の実験から求めたロトンの群速度が音速 C より大きくなる波数領域では, フォノン放出の過程が line width の大きさを左右することに注目した。彼らの計算は最近 Ishikawa, Miyake, Yamada³⁾ によって検討され, 群速度が音速より大きくなる波数の下限 k_c (または運動量 p_c) の近くで, ロトンエネルギー ϵ_Q^r を展開して $Q - k_c$ について2次の項までとると, line width は

$$\Gamma_Q = \frac{\hbar^2 k_c^2}{3\pi\rho} (Q - k_c)^3 \quad (1)$$

で与えられることを示した。 ρ は HeII の密度である。これは Jäckel らの与えたものの16倍になり, 著者が基研の研究会で発表した⁴⁾ Feynman エネルギーに対する line width

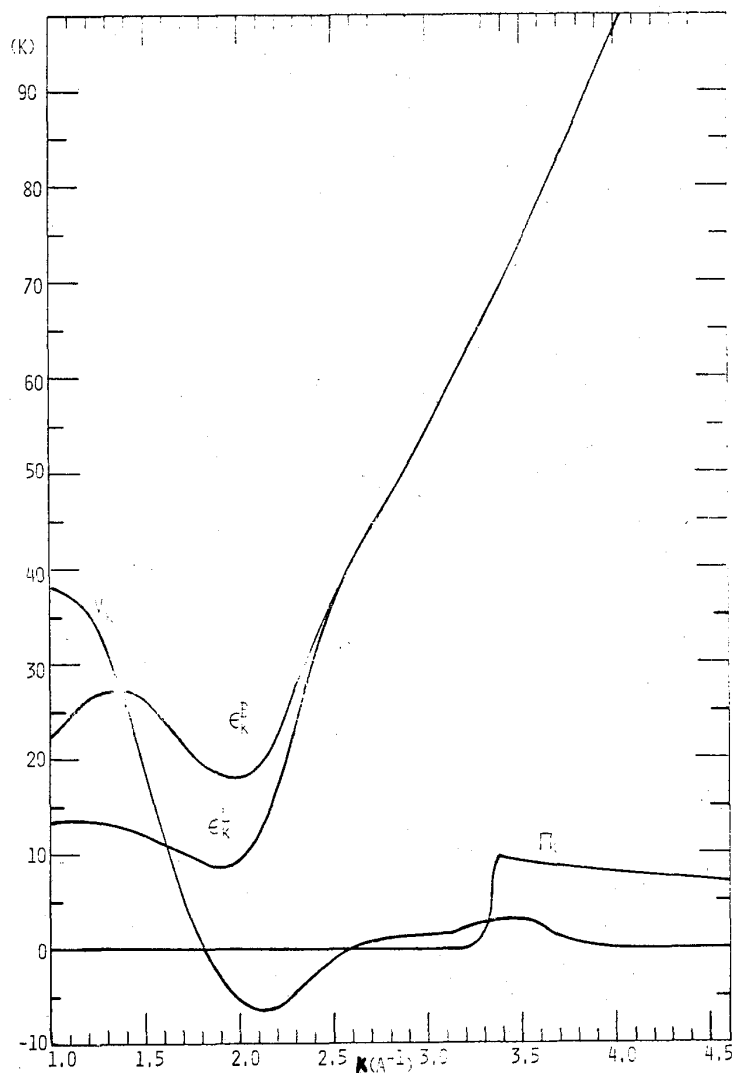
$$\Gamma_Q = \begin{cases} 2\pi \frac{\hbar^2 k_c^3}{MQ} (Q - k_c)^3 / q_0^3, & k_c < Q < k_c + q_0 \\ \frac{\pi}{4} \frac{\hbar^2 k_c^2}{MQ}, & k_c + q_0 < Q \end{cases}$$

とは, $Q \simeq k_c$ で完全に一致している。ただし M は質量で, $q_0 = 1.09 A^{-1}$ (cutoff wave number), $\Delta' = 2.4 K$, $M^* = 1.4 M$, $k_c = 2.1 A^{-1}$ とおいた。これは Feynman エネルギーを $\Delta' + \hbar^2 k^2 / (2M^*) = \Delta' + \hbar^2 \{ k_c^2 + 2k_c(Q - k_c) +$

$(Q - k_c)^2 \} / (2M^*)$ において計算した結果である。これは、フォノン放出に関する限り、Landau の流体力学的ハミルトニアンを用いても、Sunakawa⁵⁾ や著者らの集団記述⁶⁾ のハミルトニアンを用いても、行列要素が、 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_s$ 項^{1),3)} については全く同じ形をしていることから当然である。最近 Brookhaven の Passell ら⁷⁾ がさらに精度の高い triple axis spectrometer を用いて Dietlich らの実験を追試した結果によると、フォノン放出によると思われる大きい line width は 1.1 K, 1.03 atm においては勧測されず、 $2.7 \text{ \AA}^{-1}$ までは line width は測定装置の幅より小さく、 $2.8 \text{ \AA}^{-1}$ ではじめて意味のある幅が得られることを示した。この結果はフォノン放出があってもそれからの寄与は意外に小さくならないことを意味している。その理由として Passell は 1.03 atm では、 k_c は $2.25 \text{ \AA}^{-1}$ であるが、この値はスペクトルの変曲点とほとんど一致しているので、波数の増加につれて、群速度がすみやかに減少するためであると考えている。われわれの立場ではこのような小さい line width は、必ずしも 1.03 atm におけるスペクトルの特殊事情によるものではないと考える。そうしてフォノン放出による幅はエネルギーの大きい上の分枝に現われ、下の分枝 (one phonon spectrum) にはほとんど影響がなく、下の分枝の line width はロトン対との相互作用によるものであり、その大きさはロトン・ミニマム近くのスペクトルの性質、とくにロトンエネルギーの大きさに強く依存することが示される。

§ 2. Passell らの実験結果

最近 Passell et al⁶⁾ は前述のようにフォノン放出によると思われる line width は $2.8 \text{ \AA}^{-1}$ の波数までは実験装置による line width (instrumental width) より小さくほとんど無視できるという結果を得た。また散乱強度は triple axis spectrometer を用いたため、前の実験の $1/50$ 程度に小さくなった。1.1 K, 1.03 atm における結果では、波数 Q 、励起エネルギー ϵ_Q と line width の実測値 r_Q との関係は次の表 1 のようになっている。単位として、 Q は $\text{\AA}^{-1}$ で、 ϵ_Q と r_Q は K とした。実測値から求めた line width (H·W·H·M) は装置幅が 0.59 K であるので、 $2.8 \text{ \AA}^{-1}$ ではじめて意味のある幅が現われ、その値は $\Gamma_Q = \sqrt{(0.83)^2 - (0.59)^2} = 0.58 \text{ K}$ となる。



第1図 V_k : 有効ポテンシャルのフーリエ係数

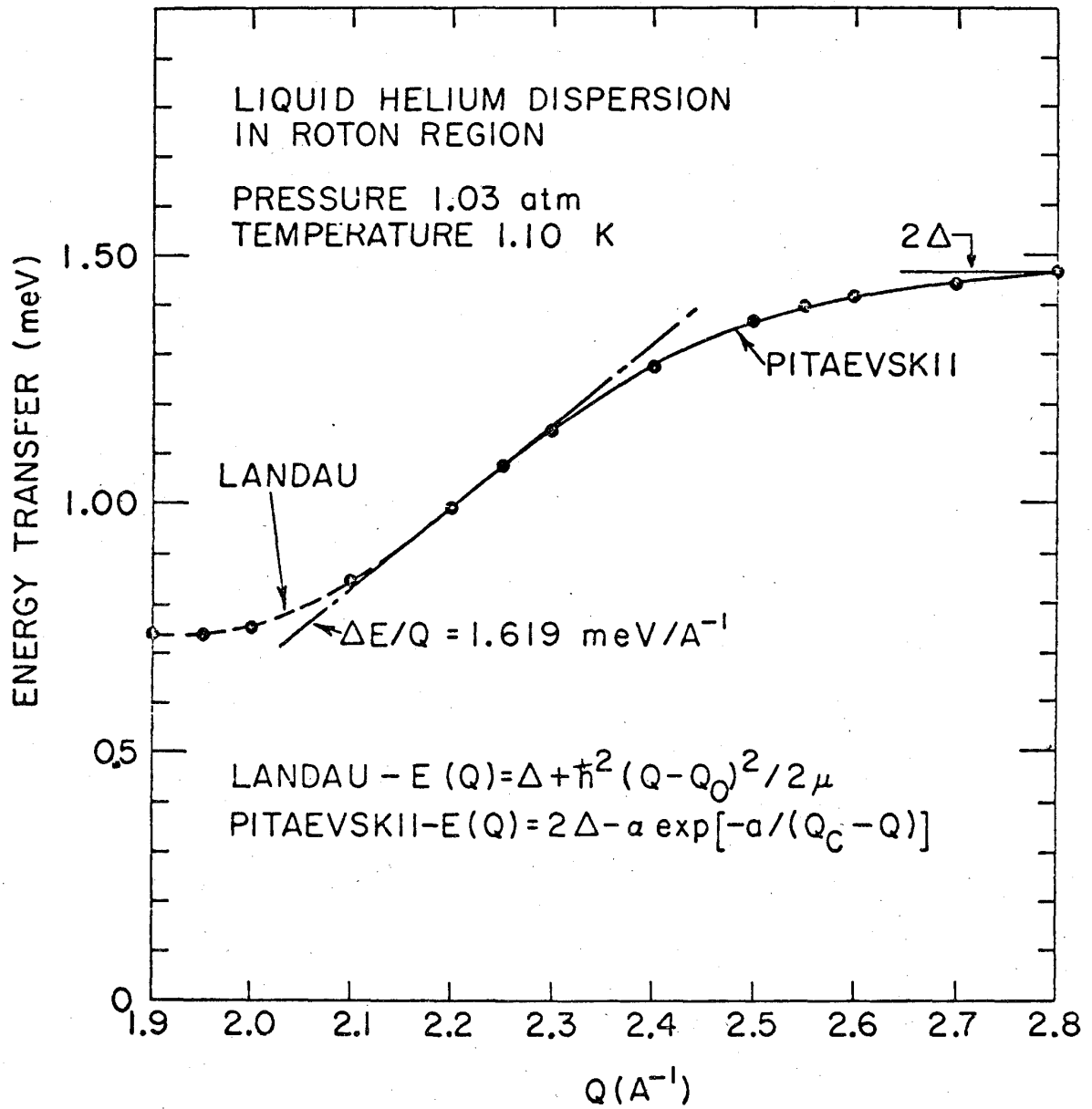
ϵ_k^B : Bogolinbov エネルギー, ここでは Feynman エネルギーに等しく取ってある。

ϵ_k^L : Landau 形のエネルギー

Γ_k : フォノンとの相互作用による line width ((2) 式による)。

表 1

Q	1.95	2.10	2.25	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80
ϵ_Q	8.63	9.83	12.5	14.8	15.8	16.5	16.7	17.0
r_Q	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.83



第2図 Passell らのロトンエネルギー。

§ 3. フォノン相互作用による line width

フォノンとの相互作用の vertex function は Γ_a と Γ_c からなり、波数 q の小さいところではそれぞれ

$$\Gamma_a(Q, q) = - (\hbar^2 Q^2 / 4M) (\hbar q / 2NMC)^{1/2} \quad (3)$$

$$\Gamma_c(Q, q) = (\hbar^2 / 2M) (2MC / N\hbar q)^{1/2} Q \cdot q \quad (4)$$

によって表わされ $\sqrt{Q}$ に比例する。N は全粒子数である。line width は Γ_c によって与えられ、2 次の自己エネルギー $\Sigma_c(Q, \epsilon)$ は Feynman エネルギー ϵ_Q^F を用いて⁶⁾,

$$\Sigma_c(Q, \epsilon) = \sum_{q < q_0} \frac{\Gamma_c(Q, q)^2}{\epsilon - \epsilon_q^F - \epsilon_{Q-q}^F + i\delta}, \quad \delta > 0, \quad (5)$$

となる。(2) 式は $\epsilon = \epsilon_Q^F$ において求められたものであるが、正しくはグリーン関数の極の虚数部分として求めなければならない。数値計算を行なうときは文献(6)の Table C 1 にある Γ_a, Γ_c を用いた。

解析的に定性的な見通しをつけるために、(2) 式を求めたときと同じスペクトルを用いると、 $\Sigma_c(Q, \epsilon)$ の虚部が 0 でないための条件はエネルギー保存則から、波数 q のフォノンに対して

$$|Q \cdot q| > \left| \frac{M^*}{h^2} (\epsilon_q - \epsilon') + \frac{q^2}{2} \right| > 0 \quad (6)$$

である。ただし音速 C として $\epsilon_q = hCq$, $\epsilon' \equiv \epsilon - \hbar^2 Q^2 / 2M^*$ とおいた。下の分枝については、 $\epsilon' < 0$, $Q > k_c = M^*C/\hbar$ であるから、まず

$$\epsilon' + \frac{\hbar^2}{2M^*} (Q - k_c)^2 \geq 0 \quad (7)$$

でなければならない。これから $Q \simeq k_c$ では虚部は 0 となり line width は無視できることがわかる。摂動計算では、常に $\epsilon' = 0$ にとるから (2) 式のような幅が得られるが、エネルギーのずれを考えると上記のようになる。この事実は、もっと複雑な形の Feynman スペクトルに対しても成り立っていることを直接数値計算によって示すこともできる。このようにして下の分枝については $\epsilon' < 0$ となるため、フォノン放出による line width は $k_c < Q < 3A^{-1}$ では期待できないことがわかる。したがって、エネルギー幅の原因は他に求めなければならない。

§ 4. ロトン対との相互作用

個別粒子同志は有効ポテンシャルを通じて相互作用し、これに対して Bogoliubov 近似を適用すると励起エネルギーは

$$\epsilon_Q^B = \frac{\hbar^2 Q^2}{2M} \sqrt{1 + (4MN V_Q / \hbar^2 Q^2)} \quad (8)$$

となる。 V_Q は有効ポテンシャルのフーリエ係数で、ここでは ϵ_Q^B が Feynman energy ϵ_Q^F に等しくなるようにとってある。このエネルギーを持つ粒子は、フォノンとの相互作用により、 $Q = 2A^{-1}$ では、 $\epsilon_Q^F = 19\text{ K}$ の値から 9 K 程度の観測値に近いエネルギーを持つようになる。フォノンとの相互作用の外に、この粒子は凝縮相を通じて波数が $\mathbf{k} + \mathbf{Q}/2$ と $-\mathbf{k} + \mathbf{Q}/2$ の粒子対と相互作用をすることにより、2 分枝励起を与えることがわかっている。この相互作用によって、エネルギーの値が変化するばかりでなく、line width への寄与も無視することはできない。

粒子対との相互作用をとりいれると、フォノンとの相互作用に対して求めたグリーン関数 $G'(Q, \epsilon)$ を非斉次項として、グリーン関数 $G(Q, \epsilon)$ は

$$G(Q, \epsilon) = G'(Q, \epsilon) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} K(Q, \mathbf{k}) X_{\mathbf{k}}(Q, \epsilon) \quad (9)$$

で与えられる。ただし $X_{\mathbf{k}}(Q, \epsilon)$ は粒子対に対するグリーン関数で、粒子の演算子 C_Q^+ を用いて

$$X_{\mathbf{k}}(Q, \epsilon) = -\frac{i}{\hbar} \int \langle T [C_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{Q}}{2}}(t) C_{-\mathbf{k}+\frac{\mathbf{Q}}{2}}(t), C_Q^+(0)] \rangle e^{i\epsilon t/\hbar} dt \quad (10)$$

によって与えられる。また

$$G'(Q, \epsilon) = [\epsilon - \epsilon_Q^F - \Sigma_{\text{ph}}(Q, \epsilon)]^{-1} \quad (11)$$

で、 $\Sigma_{\text{ph}}(Q, \epsilon)$ は $\Sigma_c(Q, \epsilon)$ と Γ_a からのエネルギーを加えたものである。

$$\Sigma_{\text{ph}}(Q, \epsilon) = \Sigma_c(Q, \epsilon) - \sum_{\mathbf{q} < q_0} \frac{\Gamma_a(Q, \mathbf{q})^2}{\epsilon + \epsilon_{\mathbf{q}}^F + \epsilon_{\mathbf{Q}-\mathbf{q}}^F} \quad (12)$$

$2A^{-1} < Q < 3A^{-1}$ の波数領域における HeII 中の Roton Line Width

から求められる。 $X_Q(\mathbf{k}, \epsilon)$ は、粒子対間の相互作用を分離形に仮定すれば、

$$\begin{aligned} & \left[\epsilon - \epsilon_{\mathbf{k}+\frac{Q}{2}}^F - \epsilon_{-\mathbf{k}+\frac{Q}{2}}^F - \pi(Q, \mathbf{k}, \epsilon) \right] X_Q(\mathbf{k}, \epsilon) \\ &= K(Q, \mathbf{k}) G(Q, \epsilon) + \frac{1}{2} f_Q K(Q, \mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}'} K(Q, \mathbf{k}') X_Q(\mathbf{k}', \epsilon) \end{aligned} \quad (13)$$

結合係数 $K(Q, \mathbf{k})$ は有効ポテンシャル V_Q によって $N^{1/2} (V_{\mathbf{k}+\frac{Q}{2}} + V_{\mathbf{k}-\frac{Q}{2}})$ で与えられ (第1図参照), f_Q は分離係数で、ここでは得られた下の分枝のエネルギーが観測値に一致するようにとる。 $\pi(Q, \mathbf{k}, \epsilon)$ はフォノンとの相互作用による粒子対の自己エネルギーで、第1近似では2粒子の自己エネルギーの和として、 $\pi(Q, \mathbf{k}, \epsilon) = \Sigma_{ph}(\mathbf{k} + \frac{Q}{2}, \epsilon) + \Sigma_{ph}(-\mathbf{k} + \frac{Q}{2}, \epsilon)$ で与えられる。粒子対との相互作用から来る自己エネルギー $\Sigma_r(Q, \epsilon)$ は

$$\Sigma_r(Q, \epsilon) = I(Q, \epsilon) / [1 - f_Q I(Q, \epsilon)] \quad (14)$$

$$I(Q, \epsilon) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{K(Q, \mathbf{k})^2}{\epsilon - \epsilon_{\mathbf{k}+\frac{Q}{2}}^F - \epsilon_{-\mathbf{k}+\frac{Q}{2}}^F - \Sigma_{ph}(\mathbf{k} + \frac{Q}{2}, \epsilon) - \Sigma_{ph}(-\mathbf{k} + \frac{Q}{2}, \epsilon)} \quad (15)$$

から求められる。 $I(Q, \epsilon)$ を実際に計算するためには $\Sigma_{ph}(\mathbf{p}, \epsilon)$ の値をすべての $\mathbf{p}$ と ϵ について求めておかねばならないが、積分に一番大きく利いてくるのは $\epsilon_{\mathbf{p}}^F + \Sigma_{ph}(\mathbf{p}, \epsilon)$ の極小値であるから、 $p = 2A^{-1}$ の近くでは、 ϵ をグリーン関数の極の実部でおきかえる。すなわちこれを $\epsilon_{\mathbf{p}}^L$ と書くと

$$\epsilon_{\mathbf{p}}^F + \Sigma'_{ph}(\mathbf{p}, \epsilon_{\mathbf{p}}^L) + \Sigma'_r(\mathbf{p}, \epsilon_{\mathbf{p}}^L) = \epsilon_{\mathbf{p}}^L \quad (16)$$

となる。 Σ'_{ph} , Σ'_r はそれぞれ自己エネルギーの実部を表わす。 $\Sigma'_r(\mathbf{p}, \epsilon_{\mathbf{p}}^L)$ が無視できる場合には、 $I(Q, \epsilon)$ の分母は

$$\epsilon = \epsilon_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{Q}}{2}}^L - \epsilon_{-\mathbf{k}+\frac{\mathbf{Q}}{2}}^L + i \Gamma_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{Q}}{2}}^L + i \Gamma_{-\mathbf{k}+\frac{\mathbf{Q}}{2}}^L \quad (17)$$

でおきかえられる。 $\Gamma_{\mathbf{p}}^L$ は $-\text{Im } \Sigma_{\text{ph}}(\mathbf{p}, \epsilon_{\mathbf{p}}^L)$ ，すなわちフォノンとの相互作用による line width である。前に述べたように $\epsilon_{\mathbf{p}}^L$ の代りに $\epsilon_{\mathbf{p}}^F$ をとると $\Gamma_{\mathbf{p}}^L$ は (2) 式と一致する。この近似の下で $I(\mathbf{Q}, \epsilon)$ は $|\mathbf{k} + \mathbf{Q}/2|$ と $|\mathbf{k} - \mathbf{Q}/2|$ を変数とする 2 重積分によって求められ，波数 Q が $2 \text{ \AA}^{-1}$ と $3 \text{ \AA}^{-1}$ の間で，観測値と一致するように求めた $f_{\mathbf{k}}$ の値は表 2 のようになる。この計算に用いた $\epsilon_{\mathbf{p}}^L$ の値と $\Gamma_{\mathbf{p}}^L$ の値も表 2 に書いてある。観測値は Passell らが 1.03 atm で求めた値を用いているが， $Q < 2 \text{ \AA}^{-1}$ では今の所 Passell らの観測値が得られていないので， 103 atm における音速の増加を考えて定めた。この値は表 3 に書いてある， ϵ_Q^L は Landau のロトンエネルギーとよく似ている。

表 2

Q	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
f_Q	-1.2	-1.0	0.2	0.07	0.04	0.02
ϵ_Q^L	8.63	8.87	25.0	40.4	47.3	54.5
Γ_Q^L	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.02

表 3

Q	0.3	0.5	0.7	1.0	1.3	1.6	1.9
ϵ_Q^L	6.4	10.5	13.7	16.0	15.6	11.9	8.53

Γ_Q^L は $Q \ll 3A^{-1}$ では無視できるが、 $Q \gtrsim 3A^{-1}$ でほとんど (2) 式で求められる値と一致する。これは第 1 図に、有効ポテンシャル V_Q 、Feynman エネルギー ϵ_Q^F と ϵ_Q^L と共に図示してある。 f_Q の単位は K^{-1} である。 Γ_Q^L の値はもっと小さく、とっても実際の計算値は変わらない。

§5. Line Width の計算結果

粒子対との相互作用による自己エネルギーの実部と虚部はそれぞれ

$$\Sigma_r'(Q, \epsilon) = \frac{I'(Q, \epsilon) [1 - f_Q I'(Q, \epsilon)] - f_Q I''(Q, \epsilon)^2}{[1 - f_Q I'(Q, \epsilon)]^2 + [f_Q I''(Q, \epsilon)]^2}, \quad (18)$$

$$\Sigma_r''(Q, \epsilon) = \frac{I''(Q, \epsilon)}{[1 - f_Q I'(Q, \epsilon)]^2 + [f_Q I''(Q, \epsilon)]^2} \quad (19)$$

となる。 $I'(Q, \epsilon)$ 、 $I''(Q, \epsilon)$ はそれぞれ $I(Q, \epsilon)$ の実部と虚部である。 $\Sigma_{ph}''(Q, \epsilon)$ はほとんど 0 であることから、line width r_Q は $\Sigma_r''(Q, \epsilon_Q)$ によって与えられ $2A^{-1} < Q < 3A^{-1}$ では表 4 のようになる。 ϵ_Q は下の分枝のエネルギーの観測値である (表 1 参照)。表 1 の測定値は、 $Q = 2.8 A^{-1}$ に対して意味のある幅が求められているにすぎない。幅の計算値はロトン・ミニマム近くでの ϵ_Q^L の値の変化に敏感であって、0.02K 程度の変化に対して r_Q の値は 3 倍位変化する。測定値に近い

表 4

Q	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
ϵ_Q	8.77	11.48	14.8	16.46	17.04	17.2
r_Q	0.002	0.003	0.004	0.26	0.90	1.70

幅を与えるロトン・ミニマムの値は 8.53 K であるが、表 4 ではロトン・ミニマムと 8.5 K にとったときの計算値が書いてある。この場合でも $Q = 2.6\text{ \AA}^{-1}$ に対して幅は十分小さく、 $Q = 2.8\text{ \AA}^{-1}$ ではじめて装置の幅より大きくなることが示されている。さらに正確な $K(Q, k)$ を用いることにより計算値と測定値との一致はよくなる。

§ 6. 討 論

Passell らが示したように、ロトンの群速度が音速に等しくなる $2.4\text{ \AA}^{-1}$ においても line width が意外に小さい事実は、われわれの立場では、下の分枝の line width が、フォノン放出によるよりも、むしろ粒子対との相互作用によるものとして理解される。高温ではフォノン放出による幅は増大し、粒子数の影響は無視できるであろう。

この計算ではロトン対のフォノンとの相互作用による自己エネルギーを (17) 式によって近似したが、この取り扱い方はさらに高度の繰りこみ演算によって改良されるであろう。また、結合係数 $K(Q, k)$ を有効ポテンシャルでおきかえたが、もっと正確な形を用いて計算することにより、測定値を与える ϵ_Q^L の形は変化するが、この line width についてはあまり重要でない。しかし励起全体の構造をしらべるためには正確な $K(Q, k)$ の形を用いなければならない。

Landau のハミルトニアンを用い、また適当な繰りこみ法を採用することによっても、Passell の結果を再現することが期待されるが、ここではそれにふれない。

参 照 文 献

- 1) J. Jackle and K.W. Kehr, Phys. Letters 39 A (1972), 327
- 2) O.W. Dietrich, E.H. Graf, C.H. Huang and L. Passell, Phys. Rev. A 5 (1972), 1377.
- 3) K. Ishikawa, K. Miyake and K. Yamada, to be published.
- 4) T. Nishiyama, June (1972) at the Institute for Fundamental Physics. (物性研究の報告 18 巻 6 号では半幅と全幅を間違えている。物理学会分科会で発表 (1972 年 4 月) した方が正しい。)

- 5) S.Sunakawa, S.Yamasaki and T.Kebukawa, Prog. Theor. Phys. 41 (1969), 919.
- 6) T.Nishiyama, Prog. Theor. Phys. 12 (1954), 265; 45 (1971), 730.
- 7) L.Passell, H.B.Møller, V.J.Minkiewicz and E.H.Graf, to be published.