

OBSTRUCTIONS TO DEFORMING CURVES ON AN ENRIQUES-FANO 3-FOLD

那須弘和 (HIROKAZU NASU)

ABSTRACT. Enriques-Fano 三様体 (簡単のため EF3 と略す) は, 非特異 Enriques 曲面を
超平面切断として含む 3 次元射影多様体である. 端末的巡回商特異点のみを持つ場合には,
EF3 は非特異 Fano 三様体の対合による商多様体として表され, Bayle と佐野 (武) による
分類が知られている. 本報告では EF3 上の曲線の変形障害について考察し, 種数 6, 9, 13 の
EF3 に対し, その上の非特異連結曲線のヒルベルトスキームが, 生成的に被約でない既約成
分を持つことを紹介する. Mumford の病例として有名な空間曲線のヒルベルトスキームの
非被約成分の例とその後の一般化が本研究の動機となっている. 詳細については論文 [17]
をご覧ください.

1. 非特異 FANO 三様体上の曲線の変形障害

射影多様体 X に対し X のヒルベルトスキームを $\mathrm{Hilb} X$ と表し, X 上の非特異連結曲
線 C をパラメータ付ける $\mathrm{Hilb} X$ の部分スキームを $\mathrm{Hilb}^{sc} X$ と表す. $\mathrm{Hilb} X$ が点 $[C]$ にお
いて特異であるとき, C は X において**障害を受ける** (*obstructed*) といい, 逆に非特異なと
き C は**障害を受けない** (*unobstructed*) という. $\mathrm{Hilb} X$ の既約成分 W に対し, $\mathrm{Hilb} X$ が W
の生成点において特異であるとき, $\mathrm{Hilb} X$ は W に沿って**生成的に被約でない** (*generically
non-reduced*) という.

基礎体 k を標数 0 の代数閉体, X を体 k 上定義された 3 次元非特異 Fano 多様体 (すなわ
ち非特異 Fano 三様体) とし, X の Fano 指数を $r = r(X)$ で表す. [7, 8] により, 全ての X
に対し $1 \leq r \leq 4$ が成り立ち, Picard 数が 1 のものに限れば, X は 17 種の変形同値類に分
類されることが知られている.

r	4	3	2	1
変形同値類の個数	1	1	5	10
代表/クラス	$\mathbb{P}^3$	$Q^3 \subset \mathbb{P}^4$	del Pezzo	主 Fano

Mumford [13] は, モジュライ空間の病理として, $r = 4$, すなわち $X = \mathbb{P}^3$ の場合に初めて,
 X 上の非特異連結曲線のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^{sc} X$ が生成的に被約でない既約成分を持
つことを示した. 本報告では省略のためこの *generically non-reduced component* を *GNRC*
と表す. その後 $X = \mathbb{P}^3$ の場合に, Kleppe [9], Ellia [3], Gruson-Peskine [6], Fløystad [5] な
どにより Mumford の例の一般化が行われたが, 近年になり $X \neq \mathbb{P}^3$ に対しても Mumford
の例の一般化が調べられた (cf. [12, 14, 15]).

定理 1.1 ([12]). 3 次元非特異射影多様体 X が次の二つの条件を満たすとき, $\mathrm{Hilb}^{sc} X$ は
(可算無限個の)GNRC を持つ:

『城崎代数幾何学シンポジウム 2019』(2019 年 10 月 22 日~25 日, 城崎国際アートセンター) 報告
本研究は科研費基盤研究 (C) 課題番号 17K05210 の助成を受けたものです.

- (1) X 上に有理曲線 $E \simeq \mathbb{P}^1$ が存在し, 法束 $N_{E/X}$ が大域切断で生成される.
- (2) $E \subset S \subset X$ を満たす非特異 (中間) 曲面 S が存在し, E は S 上の (-1) -曲線である, すなわち $E \simeq \mathbb{P}^1$ かつ $E^2 = -1$ である. さらに, $p_g(S) = H^1(S, N_{S/X}) = 0$ が成り立つ.

Mumford の例は定理 1.1 において $X = \mathbb{P}^3$, S が非特異 3 次曲面, E が S 上の直線 (すなわち 27 本の直線のうちの 1 本) のときの特別な場合として捉えることができる. 指数が $2 \leq r \leq 4$ の X に対しては, 定理 1.1 を X 上の一般の (良い) 直線 E と, それを含む del Pezzo 曲面 S (すなわち E は S 上の (-1) -曲線になる) に適用し, $\text{Hilb}^{sc} X$ の GNRC の存在が示された. $r = 1$ の場合が長らく残っていたが, 最近になりこの場合も X 内の $K3$ 曲面とその上の (-2) -曲線を用いることにより解決した.

定理 1.2 ([16]). X をピカル数 1 で指数 1 の Fano 三様体 (すなわち X は主 Fano 三様体) とする. このとき X 上の次数が $4g$ で種数が $4g + 1$ の非特異曲線のヒルベルトスキーム $\text{Hilb}_{4g, 4g+1}^{sc} X$ は次のような生成的に被約でない既約成分 W を持つ:

- (1) W の一般元 C は X 内の非特異 $K3$ 曲面 $S \in |-K_X|$ に含まれる.
- (2) C に対し S 上のある “良い” 円錐曲線 E が定まり, C は S 上の因子 $-2K_X|_S + 2E$ と線形同値である. ここで言う “良い (good)” とは法束 $N_{E/X}$ が自明なことを言う.
- (3) 既約成分 W の次元は $5g + 1$ に等しく, その生成点におけるヒルベルトスキームの接次元 ($= h^0(C, N_{C/X})$) は $5g + 2$ に等しい.

特にピカル数が 1 の場合には, 17 種全ての非特異 Fano 三様体 X に対し, $\text{Hilb}^{sc} X$ が Mumford の例とよく似た GNRC を持つことがわかる (表 1 参照).

TABLE 1. Mumford 型の非被約成分 (GNRC)

r	class of S	class of C	E	$\dim W$	
4	$-\frac{r-1}{r}K_X$	$-K_X _S + 2E$	line	56	Mumford [13]
3				42	[12]
2				$4n + 4^a$	[12, 14]
1	$-K_X$	$-2K_X _S + 2E$	conic	$5g + 1$	[15] ($g = 3$), [16]

^a ここで n は del Pezzo 三様体 X の次数を表す, すなわち $n = (-K_X)^3/8$.

一連の結果により, 「ヒルベルトスキームの生成的に被約でない既約成分 (GNRC)」と del Pezzo 曲面上の (-1) -曲線や $K3$ 曲面上の (-2) -曲線のような「多様体上の特殊な曲線」との間には興味深い関係を観察できることがわかる. 曲線が性質の良い曲面 (del Pezzo や $K3$ など) に含まれる場合に, 曲面の性質を用いて曲線の変形の性質やヒルベルトスキームの次元を決定したいというのが研究の動機の一つである. 本報告では 3 次元多様体上の曲線が Enriques 曲面に含まれる場合について考察する*.

*2017 年 3 月に大阪梅田で開催されたアフィン代数幾何学シンポジウムにおいて, 講演後に高木寛通さんから頂いたコメントが本研究の出発点となった.

2. ENRIQUES 曲面と ENRIQUES-FANO 三様体

まず Enriques 曲面と Enriques-Fano 三様体を定義し、いくつかの例 (例 2.3, 2.4, 2.5) を紹介する. 基礎体 k を標数 0 の代数閉体とする. k 上の非特異射影曲面 S が $H^i(S, \mathcal{O}_S) = 0$ ($i = 1, 2$) かつ $2K_S \sim 0$ を満たすとき, S を (古典的) **Enriques 曲面** という. Enriques 曲面 S は次の性質をもつ.

- (1) $K3$ 曲面 M とその上の (**自由対合**) (すなわち固定点を持たない位数 2 の正則自己同型) θ が存在し, $S \simeq M/\theta$ と表せる. また逆に, $K3$ 曲面 M を自由対合 θ で割って得られる曲面 M/θ は Enriques 曲面である.
- (2) S はいつでも楕円ファイブレーション $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ を持ち, φ は二重ファイバーをちょうど 2 個持つ. すなわち $\mathbb{P}^1$ 上の 2 点 $t_i \in \mathbb{P}^1$ ($i = 0, 1$) が存在し, $\varphi^{-1}(t_i) = 2E_i$ となる.

上記の二重ファイバー $2E_i$ に対し, E_i は S 上の有効因子を定め, S 上の **ハーフペンシル** (*half pencil*) と呼ばれる. S 上のハーフペンシル E は $h^0(S, E) = 1$ かつ $h^0(S, 2E) = 2$ を満たす.

定義 2.1. 3次元射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ でもって超平面切断として非特異 Enriques 曲面 S を含み, かつ X が S 上の垂でないとき, X は **Enriques-Fano 三様体** (*Enriques-Fano 3-fold*) と呼ばれる.

X の余次元 2 の一般の線形切断として得られる曲線の種数は $g(X) := (-K_X)^3/2 + 1$ に等しく, X の **種数** と呼ばれる. EF3 は古くは Fano [4] にも登場し, 彼によって分類が主張されたが現在は証明にギャップがあることが知られている. Conte-Murre [2] は全ての EF3 が孤立特異点を持つことを示し, Fano の結果を一部再現した. その後 Bayle [1] と佐野 (武)[19][†] がそれぞれ独立に高々端末的巡回商特異点を持つ EF3 を分類した.

定理 2.2 (cf. [1, 19]). X を Enriques-Fano 三様体とし S を X の超平面切断 (Enriques 曲面) とする. このとき, X が端末的巡回商特異点しか持たないことと, X が非特異 Fano 三様体 Y の対合 θ による商多様体 Y/θ として表されることは同値である. このとき, X の標準被覆

$$Y = \text{Spec}_X(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(K_X + S)) \xrightarrow{2:1} X$$

は, 表 2 のいずれかの非特異 Fano 三様体 Y に同型である.

Enriques-Fano 三様体 X の特異点が高々端末特異点ならば, 皆川 [11][‡] により X は $\mathbb{Q}$ -円滑化を持つ. Bayle と佐野の結果と組み合わせるとこの場合に $g(X) \leq 13$ が示される. 近年になり Prokhorov [18] と Knutsen-Lopez-Muñoz [10] により一般の X に対して $g(X) \leq 17$ が示されたが, 分類については未完成である. 例 2.3, 2.4, 2.5 において Enriques-Fano 三様体の例を 3 つ紹介する (表 2 の No.14, 12, 9 の例).

[†] 1995 年頃, 報告者は名古屋大学の学部生で, 教員の佐野さんに代数学の演習を担当して頂いた.

[‡] 1998 年頃, 報告者は修士学生で初めて城崎に参加し, 皆川さんと「つちや」で相部屋になった. 当時変形について全く知らなかった報告者は「変形理論って何ですか?」という無知な質問をしたが, 親切に変形の“いろは”を教えて下さった. ちなみに部屋は 3 人部屋で, もう 1 人の参加者は藤野修さんだった.

TABLE 2. Enriques-Fano 3-folds X

No.	canonical cover $Y \xrightarrow{2:1} X$	$g(X)$
1	a complete intersection $(2) \cap (4) \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 1, 2)$	2
2	a complete intersection $(2) \cap (2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^6$	3
3	the blow-up $\text{Bl}_\gamma V_2$ of V_2^a with a center an elliptic curve $\gamma^b \subset V_2$	3
4	$\mathbb{P}^1 \times S_2^c$	4
5	a double cover of $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ branched along a divisor $R \sim (2, 2, 2)$.	4
6	a double cover of $(1, 1) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2^d$ branched along $R \in -K $.	4
7	the blow-up $\text{Bl}_\gamma V_4$ of V_4 with a center an elliptic curve $\gamma^e \subset \mathbb{P}^5$	5
8	a weighted hypersurface $(4) \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$ (i.e. V_2)	5
9	a complete intersection $(1, 1) \cap (1, 1) \cap (1, 1) \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$	6
10	$\mathbb{P}^1 \times S_4$	6
11	a hypersurface in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ of multidegree $(1, 1, 1, 1)$	7
12	a complete intersection $(2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^5$ (i.e. V_4)	9
13	$\mathbb{P}^1 \times S_6$	10
14	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	13

^a In this table, V_n denotes a del Pezzo 3-fold of degree n .

^b γ is a complete intersection $H_1 \cap H_2 \subset V_2$ where $H_i \in |(-1/2)K_{V_2}|$ for $i = 1, 2$.

^c In this table, S_n denotes a del Pezzo surface of degree n .

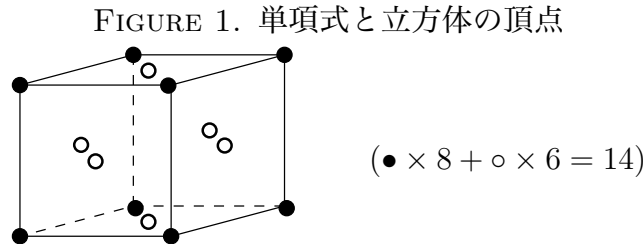
^d A hypersurface in $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ of multidegree $(1, 1)$ is isomorphic to $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(T_{\mathbb{P}^2})$.

^e γ is a complete intersection $(1) \cap (1) \cap (2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^5$

例 2.3 ($g = 13$). $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とし, Y 上の対合 θ を

$$(2.1) \quad (x_0 : x_1) \times (y_0 : y_1) \times (z_0 : z_1) \longmapsto (x_0 : -x_1) \times (y_0 : -y_1) \times (z_0 : -z_1)$$

により定義すれば, θ は Y の 8 つの座標点に固定点 ($= \text{Fix}(\theta)$) をもつ. 図 1 の立方体 の 8



個の頂点 $\bullet$ と 6 個の面の中心 $\circ$ に対応する計 14 個の θ -不変な単項式が存在する. それらの一般の線形結合で定義される $|-K_Y|$ の元 M を考えれば, M は Y 内の $K3$ 曲面であり, θ が M 上に固定点自由に作用する ($\theta_M := \theta|_M \curvearrowright M$). Y を θ で割って得られる 3 次元多様体 $X := Y/\theta (= X_{13})$ は EF3 になり, その種数は $g(X) = (-K_X)^3/2 + 1 = 24/2 + 1 = 13$ である. 実際 X は上記の単項式が生成する線形系により射影空間 $\mathbb{P}^{13}$ に埋め込まれる.

例 2.4 ($g = 9$). $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$, $\mathbf{x}' = (x_3, x_4, x_5)$ とする. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ を $\mathbb{P}^5$ の斉次座標とし, “変数分離型” の 2 つの斉次 2 次式

$$q_i(\mathbf{x}) + q'_i(\mathbf{x}') \quad (i = 0, 1)$$

により定義される非特異完全交差 $(2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^5$ を Y とする. $\mathbb{P}^5$ の対合 $\theta : (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mapsto (\mathbf{x}, -\mathbf{x}')$ は Y 上に作用し, $\theta_Y := \theta|_Y$ の固定点集合は 8 点となる. 一般のこの形の斉次 2 次式 $q_2(\mathbf{x}) + q'_2(\mathbf{x}')$ で定義される Y の 2 次切断 $M (\in |-K_Y|)$ は Y 内の $K3$ 曲面となり, θ_Y は M 上の自由対合 θ_M を定義する. したがって $X := Y/\theta_Y (= X_9)$ は種数 9 の EF3 となる.

例 2.5 ($g = 6$). 3 つの対称双線形形式 $q_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ($i = 0, 1, 2$) で定義される, 非特異完全交差 $(1, 1) \cap (1, 1) \cap (1, 1) \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ を Y とする. 対角的な作用 $\theta : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ により定義される対合 θ は Y 上に作用し, $\theta_Y := \theta|_Y$ は 8 つの固定点をもつ. 4 つ目の双線形形式 $q_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ により定義される完全交叉 $Y \cap (1, 1)$ を M とすれば, M は $K3$ 曲面であり, θ_Y は M 上の自由対合 θ_M を定める. したがって $X := Y/\theta_Y (= X_6)$ は種数 6 の EF3 となる.

3. ENRIQUES 曲面に含まれる曲線の変形障害

本節では Enriques-Fano 三様体 (EF3) 上の曲線が超平面切断 (Enriques 曲面) に含まれると仮定し, 曲線の EF3 上での変形障害について考察する. 特に主結果である定理 3.2 と 3.3 について述べる.

まず研究の主道具であるヒルベルト旗スキームを準備する. 固定された射影多様体 X に対しその上の閉部分スキームの列 $C \subset S \subset X$ をパラメータ付ける (射影) スキーム $\text{HF } X$ が存在し X の **ヒルベルト旗スキーム** (*Hilbert-flag scheme*) と呼ばれる ([9, 20]). 埋め込み $C \hookrightarrow S \hookrightarrow X$ が正則 (regular) のとき, $\text{HF } X$ の点 (C, S) における接空間と障害空間は, それぞれコホモロジー群 $H^0(X, N_{(C,S)/X})$ と $H^1(X, N_{(C,S)/X})$ によって表される. ただし, $N_{(C,S)/X}$ は対 (C, S) の法層を表す. $N_{(C,S)/X}$ は C と S のそれぞれの X 内での法束 $N_{C/X}$ と $N_{S/X}$ からの自然な射影 $\pi_{C/S} : N_{C/X} \rightarrow N_{S/X}|_C$ と制限写像 $|_C$ のファイバー積

$$\begin{array}{ccc} N_{(C,S)/X} & \xrightarrow{\pi_2} & N_{S/X} \\ \pi_1 \downarrow & \square & \downarrow |_C \\ N_{C/X} & \xrightarrow{\pi_{C/S}} & N_{S/X}|_C \end{array}$$

として定義される. ヒルベルトスキームの場合と同様に

$$h^0(X, N_{(C,S)/X}) - h^1(X, N_{(C,S)/X}) \leq \dim_{(C,S)} \text{HF } X \leq h^0(X, N_{(C,S)/X})$$

が成り立つ.

補題 3.1. X を Fano 三様体, $S \subset X \setminus \text{Sing } X$ を $p_g = 0$ の非特異曲面, $C \subset S$ を非特異曲線とする.

- (1) $H^1(S, C) = 0$ ならば, 任意の $i > 0$ に対し $H^i(X, N_{(C,S)/X}) = 0$. このとき $\text{HF}^{\text{sc}} X$ は点 (C, S) において非特異かつ期待次元である.
- (2) $H^1(S, C) = H^1(S, C + K_X|_S) = 0$ ならば, C は X において障害を受けない.

ここで $\mathrm{HF}^{\mathrm{sc}} X$ は、非特異曲線 C からなる対 (C, S) をパラメータづける $\mathrm{HF} X$ の部分スキーム ($= \mathrm{pr}_1^{-1}(\mathrm{Hilb}^{\mathrm{sc}} X)$) を表す。また $\mathrm{HF}^{\mathrm{sc}} X$ の点 (C, S) における期待次元は $\chi(X, N_{(C,S)X}) = (-K_X)^3/2 + g(C)$ に等しい。補題 3.1 の前半は 2 つの層短完全列 $0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(C) \rightarrow N_{C/S} \rightarrow 0$ と $0 \rightarrow N_{C/S} \rightarrow N_{(C,S)/X} \rightarrow N_{S/X} \rightarrow 0$ から導かれる。後半は前半と第 1 射影 $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{HF}^{\mathrm{sc}} X \rightarrow \mathrm{Hilb}^{\mathrm{sc}} X$ の (C, S) における円滑性から従う。実際、完全列

$$(3.1) \quad H^0(X, N_{(C,S)/X}) \xrightarrow{p_1} H^0(C, N_{C/X}) \longrightarrow H^1(S, N_{S/X}(-C)) \longrightarrow 0$$

が存在し、随伴公式と Serre 双対により pr_1 の接写像 p_1 の余核は $H^1(S, C + K_X|_S)^\vee$ と同型になる。 S 上のハーフペンシル E に対し $C + K_X|_S \simeq 2E$ ならば $H^1(S, N_{S/X}(-C)) \simeq H^1(2E)^\vee \simeq k$ となり、 p_1 の余核がちょうど 1 次元になる。次が今回の講演の主結果となる。

定理 3.2. X を Enriques-Fano 三様体とし、 S をその非特異超平面切断である Enriques 曲面とする。 S 上のハーフペンシル E でもって、

- (1) $(-K_X \cdot E)_X \geq 2$, かつ
- (2) $H^1(E, N_{E/X}(E)) = 0$, ただし $N_{E/X}(E) := N_{E/X} \otimes_E N_{E/S}$,

を満たすものが存在すれば $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{sc}} X$ は次のような生成的に被約でない既約成分 (GNRC) W を持つ:

- (i) W の一般元 C は Enriques 曲面 $S' \sim S$ に含まれる。
- (ii) 各 C に対し S' 上のハーフペンシル E' が定まり、 $\mathrm{Pic} S'$ において $C + K_X|_{S'} \sim 2E'$ を満たす。

定理 3.2 の条件 (1) は W の一般元 C の非特異性の証明に用いられ、条件 (2) については C の X における障害性の証明に用いられる (cf. 4 節)。障害性についてはより一般に次の定理が得られた。

定理 3.3. X を Enriques-Fano 三様体、 $S \subset X$ を Enriques 曲面、 $C \subset S$ を非特異曲線とし、 S 上の因子 $C + K_X|_S$ のクラスを D で表す。 $H^1(S, \mathcal{O}_S(C)) = 0$ ならば次が成り立つ:

- (1) $H^1(S, D) = 0$ ならば C は X において障害を受けない。
- (2) 整数 $m \geq 1$ に対し、 $D \sim 2mE$ または $D \sim K_S + (2m+1)E$ を満たす S 上のハーフペンシル E が存在すれば $h^1(S, D) = m$ である。さらに $H^1(E, N_{E/X}(E)) = 0$ ならば C は X において障害を受ける。
- (3) $D \geq 0$, $D^2 \geq 0$, さらに $E \cdot D = -2$ と $H^1(S, D - 3E) = 0$ を満たす S 上の (-2) -(有理) 曲線 E が存在すれば $h^1(S, D) = 1$ である。さらに $H^1(E, N_{E/X}(E)) = 0$ ならば C は X において障害を受ける。

定理 3.3 の最初の主張は補題 3.1 より直ちに従う。(2) と (3) については、定理の仮定のもとで 2 位変形 (すなわち $\mathrm{Spec} k[t]/(t^3)$ 上の) にリフトしないような $C \subset X$ の 1 位無限小変形 $\tilde{C} \subset X \times \mathrm{Spec} k[t]/(t^2)$ が存在することを示す。 $\tilde{C}$ には自然に $N_{C/X}$ の大域切断 α が対応する。完全列 (3.1) において p_1 は全射でない。したがって $\alpha \notin \mathrm{im} p_1$ が存在し、この α に対し次の定理 3.4 を適用すれば、 α の第 1 障害 (primary obstruction) が零でないことが示される。すなわち、 $\tilde{C}$ はどんな 2 位変形にもリフトしない。

定理 3.4 ([15, 定理 1.1]). X を 3 次元多様体とする. X に正則的に埋め込まれた曲線 C と曲面 S の旗を $C \subset S \subset X$ とし, α を C の法束 $N_{C/X}$ の大域切断とする. 自然な射影 $\pi_{C/S} : N_{C/X} \rightarrow N_{S/X}|_C$ による α の像 ($\in H^0(C, N_{S/X}|_C)$) を $\pi_{C/S}(\alpha)$ と表し, α の**外成分** と呼ぶ. 外成分 $\pi_{C/S}(\alpha)$ が, S 上の有効因子 E に対し, $\beta \in H^0(S, N_{S/X}(E))$ にリフトする, すなわち

$$\pi_{C/S}(\alpha) = \beta|_C \in H^0(C, N_{S/X}(E)|_C)$$

が成り立つと仮定する. (ここで β は $S \subset X$ の**極付き無限小変形**と呼ばれる.) さらに, 任意の整数 $k \geq 0$ に対し

$$H^1(S, kE) \longrightarrow H^1(S, (k+1)E)$$

が単射的であり, 次の (1), (2) が成り立つならば, α の第 1 障害 $\text{ob}(\alpha)$ は零でない.

- (1) S 上の因子 $\Delta := C + K_X|_S - 2E$ に対し, 制限写像 $H^0(S, \Delta) \rightarrow H^0(E, \Delta|_E)$ が全射的である.
- (2) 完全列 $[0 \rightarrow N_{E/S} \rightarrow N_{E/X} \xrightarrow{\pi_{E/S}} N_{S/X}|_E \rightarrow 0] \otimes_E \mathcal{O}_E(E)$ の余境界写像を ∂_E とし, $\cup$ をコホモロジーのカップ積

$$H^1(E, \mathcal{O}_E(2E)) \times H^0(E, N_{S/X}(E - C)|_E) \xrightarrow{\cup} H^1(E, N_{S/X}(3E - C)|_E)$$

とすれば, $\partial_E(\beta|_E) \cup \beta|_E \neq 0$ が成り立つ.

4. 例と応用

本節では, 種数 $g = 6, 9, 13$ の Enriques-Fano 三様体 X_g に対し, その上の非特異連結曲線のヒルベルトスキームの GNRC を具体的に構成する.

X を Enriques-Fano 三様体とし高々端末的巡回商特異点しか持たないと仮定する. このとき X の二重被覆 $\pi : Y \rightarrow X$ を考えれば, Y は定理 2.2 により非特異 Fano 三様体に同型であり, $Y/\theta \simeq X$ を満たす Y 上の対合 θ が存在する. 更に可換図式

$$\begin{array}{ccccc} F & \hookrightarrow & M & \hookrightarrow & Y \\ 2:1 \downarrow & & 2:1 \downarrow & & 2:1 \downarrow \pi \\ E & \hookrightarrow & S & \hookrightarrow & X, \end{array}$$

を満たす $K3$ 曲面 M と Enriques 曲面 S , それに楕円曲線 F とハーフペンシル E が存在し, これらの間の関係を用いて $\text{Hilb}^{sc} X$ の GNRC を構成する. 次の補題は S 上のハーフペンシルの構成に用いられる.

補題 4.1. S を Enriques 曲面, $\pi : M \rightarrow S$ をその $K3$ 被覆とし, θ を $M/\theta \simeq S$ を満たす M の自由対合とする. $\varphi : M \rightarrow \mathbb{P}^1$ を M の楕円ファイブレーションとし, $u \in k(M)$ を φ の楕円パラメーターとする (すなわち $u = \varphi^*t$ かつ $k(\mathbb{P}^1) = k(t)$). もし u が θ -反不変 (すなわち $\theta^*u = -u$) ならば, ファイバー $F = \varphi^{-1}(0)$ の像 E は S 上のハーフペンシルである.

証明) u は θ -反不変であるので, $\mathbb{P}^1$ 上の 2 次写像 $\pi'(t) = t^2$ ($t \in \mathbb{P}^1$) と φ の合成を考えれば, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ S & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

を満たす射 $\psi: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ が存在し, ψ は S 上の楕円ファイブレーションを定める. π' は 2 点 ($t = 0$), ($t = \infty$) において分岐するので, ψ も同じ点でそれぞれ 2 重ファイバー $2E$ と $2E'$ を持つ. $\square$

次の補題は補題 4.1 の仮定を満たすような $K3$ 曲面上の楕円ファイブレーションが存在することを保証する.

補題 4.2. Enriques-Fano 三様体 X が例 2.3, 2.4, 2.5 の X_{13}, X_9, X_6 のいずれかに同型ならば, θ -不変な $K3$ 曲面 $M \subset Y$ と M 上の楕円ファイブレーション $\varphi: M \rightarrow \mathbb{P}^1$ でもって

- (1) φ の楕円パラメータ u は反不変, かつ
- (2) $H^1(F, N_{F/Y}) = 0$, ただし $F = \varphi^{-1}(0)$

を満たすものが存在する.

補題 4.1 と 4.2 を用いると, X が例 2.3, 2.4, 2.5 の X_{13}, X_9, X_6 のいずれかに同型ならば,

- (1) $e := (-K_X \cdot E)_X = \begin{cases} 6 & (X = X_{13}) \\ 4 & (X = X_9) \\ 3 & (X = X_3) \end{cases}$ かつ
- (2) $H^1(E, N_{E/X}(E)) = 0$

を満たす (すなわち定理 3.2 の条件を満たす) S 上のハーフペンシル E の存在を証明することができる.

4.1. 非被約成分の構成. Enriques-Fano 三様体 X を例 2.3, 2.4, 2.5 の X_{13}, X_9, X_6 のいずれかに同型であると仮定する. $S \subset X$ と $E \subset S$ をそれぞれ上で与えた Enriques 曲面とハーフペンシルとする. S 上の因子の完備線形系

$$\Lambda := |-K_X|_S + 2E|$$

を考える. Φ を Cossec-Dolgachev 関数とすれば, $\Phi(-K_X|_S + 2E) = e \geq 2$ が成り立ち, Λ は固定点を持たない. Bertini の定理により, S 上の非特異連結曲線 $C \in \Lambda$ が存在し, その種数は $g + 2e$ に等しい. 補題 3.1 により, ヒルベルト旗スキーム $\text{HF}^{\text{sc}} X$ は点 (C, S) において非特異であり, その次元は期待次元

$$\chi(X, N_{(C,S)/X}) = g - 1 + g(C) = 2g + 2e - 1$$

に等しい. 層完全列 $0 \rightarrow N_{S/X}(-C) \rightarrow N_{(C,S)/X} \rightarrow N_{C/X} \rightarrow 0$ から誘導されるコホモロジーの長完全列

$$0 \rightarrow H^0(X, N_{(C,S)/X}) \xrightarrow{p_1} H^0(C, N_{C/X}) \rightarrow H^1(S, N_{S/X}(-C)) \rightarrow 0$$

が存在し, $H^1(S, N_{S/X}(-C)) \simeq H^1(S, -K_X|_S + K_S - C) \simeq H^1(S, 2E)^\vee \simeq k$ に注意すれば,

$$h^0(C, N_{C/X}) = h^0(N_{X,(C,S)/X}) + h^1(S, N_{S/X}(-C)) = 2g + 2e$$

のようにヒルベルトスキームの接次元が求まる. $\mathrm{HF}^{sc} X$ の (C, S) を通る (唯一の) 既約成分を W とし, 第1射影 pr_1 によるその像を $W \subset \mathrm{Hilb}^{sc} X$ とする. このとき W は $\mathrm{Hilb}^{sc} X$ の既約閉部分集合となり不等式

$$(4.1) \quad 2g + 2e - 1 = \dim W \leq \dim_{[C]} \mathrm{Hilb}^{sc} X \leq h^0(N_{C/X}) = 2g + 2e$$

を得る. 従って次のどちらか一方 (のみ) が成立する二者択一となる (dichotomy):

- (A) W は $(\mathrm{Hilb}^{sc} X)_{\mathrm{red}}$ の既約成分であり, $\mathrm{Hilb}^{sc} X$ は W に沿って生成的に被約でない.
- (B) W よりも次元の高い既約成分 $Z \subset \mathrm{Hilb}^{sc} X$ が存在し, $\mathrm{Hilb}^{sc} X$ は W に沿って生成的に非特異である.

定理 3.3 により C は X において障害を受けるので, 不等式 (4.1) において, 右側の不等号が真の不等号 $<$ になる. 従って先ほどの二者択一のうちの (A) が成り立つことがわかる.

例 4.3. $X = X_{13}$, $X = X_9$, または $X = X_6$ とする. このとき X 上の非特異連結曲線のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^{sc} X$ は次のような生成的に被約でない既約成分 W を持つ:

- (1) W の一般元 C は非特異 Enriques 曲面 $S \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ に含まれる.
- (2) C に対し S 上のハーフペンシル E が存在し, C は因子 $-K_X|_S + 2E$ に S 上で線形同値である.
- (3) $h^0(C, N_{C/X}) - \dim W = 1$.

例 4.3 において, X の二重被覆である非特異 Fano 三様体 Y のヒルベルトスキームについてどのような既約成分が存在するか? という疑問を持つかもしれない. 実は Y のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^{sc} Y$ にも, W に対応する生成的に被約でない既約成分 V が存在する.

注意 4.4. $X = X_{13}$, $X = X_9$, または $X = X_6$ とし, Y を X を二重被覆する非特異 Fano 三様体とする (cf. 表 2). このとき Y のヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^{sc} Y$ は次の 3 つの条件を満たす生成的に被約でない既約成分 V をもつ:

- (1) V の一般元 C' は非特異 K3 曲面 $M \sim -K_Y$ に含まれる.
- (2) M 上の楕円曲線 F が存在し $C' \sim -K_Y|_M + 2F$.
- (3) $\dim V = 2 \dim W$.

$\pi: Y \rightarrow X$ は C の近傍においてエタールであるが, 例えば次の問題に対しての答えを報告者は知らない.

問題 4.5. X を射影スキーム, $\pi: Y \rightarrow X$ をその有限被覆, C を X 上の非特異曲線とし, π が C の近傍でエタールであると仮定する. もし C が X において障害をうける (obstructed) ならば, C の逆像 $\pi^{-1}(C)$ も Y 上で障害を受けるか?

射影多様体 X に $\mathrm{Hilb} X$ を対応させる写像は関手的でないため, スキームの射 $Y \rightarrow X$ はヒルベルトスキームの射 $\mathrm{Hilb} Y \rightarrow \mathrm{Hilb} X$ を誘導しない.

REFERENCES

- [1] L. Bayle. Classification des variétés complexes projectives de dimension trois dont une section hyperplane générale est une surface d'Enriques. *J. Reine Angew. Math.*, 449:9–63, 1994.
- [2] A. Conte and J. P. Murre. Algebraic varieties of dimension three whose hyperplane sections are Enriques surfaces. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 12(1):43–80, 1985.
- [3] P. Ellia. D'autres composantes non réduites de Hilb $\mathbf{P}^3$. *Math. Ann.*, 277(3):433–446, 1987.
- [4] G. Fano. Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperplane sono superficie di genere zero e bigenere uno. *Mem. Mat. Sci. Fis. Natur. Soc. Ital. Sci., III. Ser.* 24, 41–66 (1938)., 1938.
- [5] G. Fløystad. Determining obstructions for space curves, with applications to nonreduced components of the Hilbert scheme. *J. Reine Angew. Math.*, 439:11–44, 1993.
- [6] L. Gruson and C. Peskine. Genre des courbes de l'espace projectif. II. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(3):401–418, 1982.
- [7] V. A. Iskovskih. Fano threefolds. I. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 41(3):516–562, 717, 1977.
- [8] V. A. Iskovskih. Fano threefolds. II. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 42(3):506–549, 1978.
- [9] J. O. Kleppe. Nonreduced components of the Hilbert scheme of smooth space curves. In *Space curves (Rocca di Papa, 1985)*, volume 1266 of *Lecture Notes in Math.*, pages 181–207. Springer, Berlin, 1987.
- [10] A. L. Knutsen, A. F. Lopez, and R. Muñoz. On the extendability of projective surfaces and a genus bound for Enriques-Fano threefolds. *J. Differential Geom.*, 88(3):485–518, 2011.
- [11] T. Minagawa. Deformations of $\mathbf{Q}$ -Calabi-Yau 3-folds and $\mathbf{Q}$ -Fano 3-folds of Fano index 1. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 6(2):397–414, 1999.
- [12] S. Mukai and H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold. I. A generalization of Mumford's example and an application to Hom schemes. *J. Algebraic Geom.*, 18(4):691–709, 2009.
- [13] D. Mumford. Further pathologies in algebraic geometry. *Amer. J. Math.*, 84:642–648, 1962.
- [14] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, II: Deformations of degenerate curves on a del Pezzo 3-fold. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 60(4):1289–1316, 2010.
- [15] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a 3-fold, III: Deformations of curves lying on a $K3$ surface. *Internat. J. Math.*, 28(13):1750099, 30, 2017. see also arXiv:1601.07301.
- [16] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on a prime Fano 3-fold. *Math. Nachr.*, 292(8):1777–1790, 2019.
- [17] H. Nasu. Obstructions to deforming curves on an Enriques-Fano 3-fold, 2019. arXiv:1906.10390.
- [18] Y. G. Prokhorov. On Fano-Enriques varieties. *Mat. Sb.*, 198(4):117–134, 2007.
- [19] T. Sano. On classifications of non-Gorenstein $\mathbf{Q}$ -Fano 3-folds of Fano index 1. *J. Math. Soc. Japan*, 47(2):369–380, 1995.
- [20] E. Sernesi. *Deformations of algebraic schemes*, volume 334 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

〒 259-1292, 神奈川県平塚市北金目 4-1-1 東海大学理学部情報数理学科

E-mail address: NASU@TOKAI-U.JP