

過熱液滴の自励振動におけるモード選択則

東京大学
(University of Tokyo)

徳川直子
Naoko Tokugawa)

1 序論

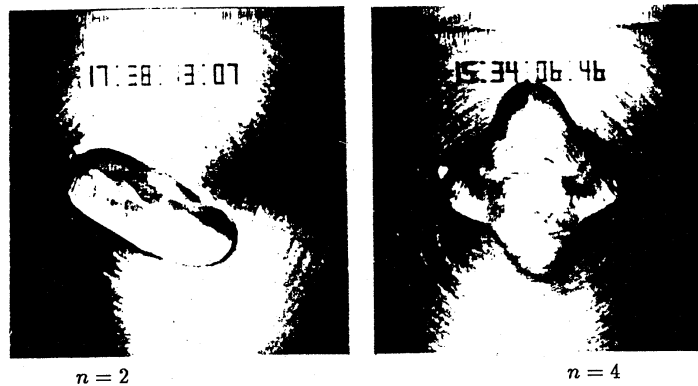


図 1: 振動の観察例

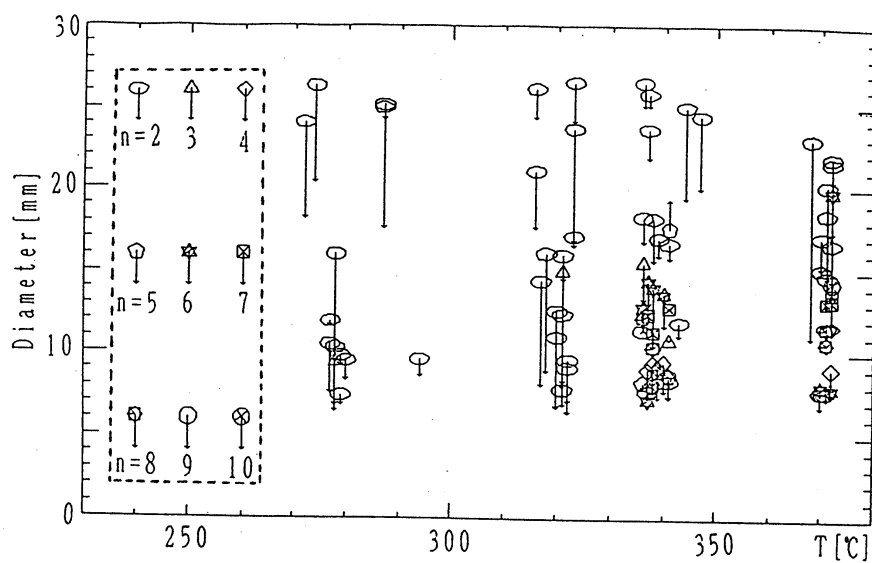
沸点より十分高温に加熱した平板上にのせられた液滴は、重力と表面張力の影響で扁平になる。液滴の下面では激しい蒸発が起き、液滴はホバークラフトのように浮き上がって、直接加熱面に接触しない。液滴の下にできる薄い蒸気層の熱伝導は小さいので、液滴の下面は加熱面より低温に保たれ、瞬時に消滅してしまうことはない。浮き上がった液滴は、平面形が多角形の対称性を持つ下図に示すような自励振動を始める。この振動は、液滴が徐々に蒸発して消滅するまでのしばらくの間持続する。以下において、平面形が n 角形になる振動を、モード数 n の振動と呼ぶ。

この加熱板上での液滴の運動はストーブやフライパンの上などで、日常生活でも見られる馴染み深い現象で、Leidenfrost 現象として特に伝熱工学の分野で古くから知られている。上に述べた多角形振動もその状態の一つと考えられる。Leidenfrost 現象は、実際の工学的な応用では、高温面に微粒液滴群を衝突させ、顕熱および潜熱移動によって面を冷却する場合や高温面に燃料を噴霧し、気化、燃焼させる燃焼器系での蒸発促進などにおいて、しばしば問題になる [1, 2]。重力を増したり、液滴と加熱面の間に電圧をかけ、液滴と加熱面を接触させ、蒸発を促進する研究がなされている [3, 4, 5, 6, 7]。また、原子力工学との関係も深く、高温固体壁面上の薄液膜は、軽水冷却型の動力炉、液体金属冷却高速増殖炉の事故時の炉心過渡伝熱や緊急炉心冷却の問題において重要である。[8]。過熱液滴の振動を扱ったものとしては、Holter らによって水を用いた実験がなされ、様々のモードが観察されている [9]。著者も蒸留水とエタノールを用いて同様の実験を行い、多数のモードを観察した [10, 11]。この結果については、あとで詳しく述べる。液化した酸素、窒素、アルゴンの液滴を室温中で平板にのせた場合にも、同様の振動がみられた [12, 13]。これらの実験からは、振動モードが物質のみならず加熱面の温度や平均半径に依存することが確かめられている。また、振動数は、モード数と平均半径に依存し、周囲の温度にはほとんど依存しないことが分かっている [13]。球形液滴や円柱液体の振動が Rayleigh によって解析されている [14, 15]。扁平な液滴の振動については、Takaki らが、液化ガスの液滴に対する基本振動の解析を行っており、その結果、実験結果と一致する振動数が予言されている [16]。

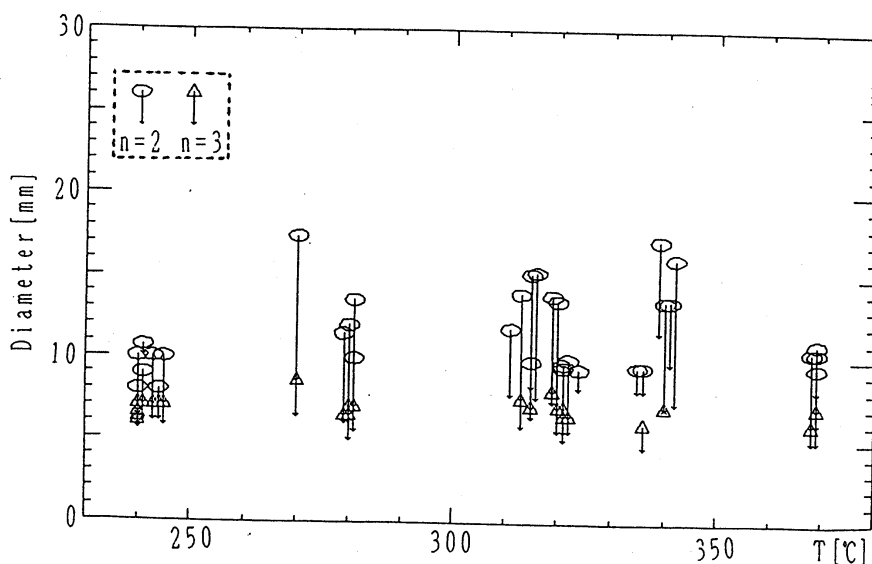
Tokugawa らは、自励振動が表面張力の変動によって励起すると考え、液滴の表面張力の変動についてのモデルを提案し、解析した。その結果、微小振動が有限に励起され、安定な定常振動解が存在することがわかっていて、そして、蒸留水について高温の時に 100°C 、低温の時に 99.25°C と仮定した場合、励起される振幅の理論値と実験値がモード数 $n = 2 \sim 6$ 全てについて一致することがわかっていて [18]。

さて、過熱液滴の自励振動の未解決の興味深い現象の一つに振動モードの選択がある。振動モードは、液滴の物性、半径、周囲の温度などによって選択される。蒸留水においては、平板の温度が 330°C より高く、直径が 15mm より小さい場合は $n \neq 2$ のモードが、それ以外では $n = 2$ のモードが現れた。エタノールでは、直径が 8mm より大きい場合は $n = 2$ のモードが、 8mm より小さい場合は $n = 3$ のモードが現れた。

このモード選択則理解の第一段階としてモード間の相互作用について調べた。まず弱非線形近似におけるモード間相互作用について解析し [19], 次に変動量の3次までの非線形項を全て取り入れた。その結果, どちらの近似でも計算した範囲内で最も高いモードが不安定である傾向が得られた。また, 非線形効果により一つのモードのみが選択される可能性も確かめられた。単一のモードが卓越した振動を呈するという事は, 実験で観察されたように, 瞬間的な液滴の平面形が比較的規則的な正多角形の対称性を持つことを意味する。



(a) 蒸留水



(b) エタノール

図 2: 観察された振動モード

2 基礎方程式

理論解析に用いる主な仮定はこれまでの研究に従う [18, 19]. 液滴中の流れは非圧縮で非粘性とし, ポテンシャル流理論を適用する. 物質定数や液滴の体積は振動周期の間一定, すなわち, その間の蒸発の効果は無視できるとする. 液滴を非常に薄い液体の層とし, 流体の振動を浅水波の表面張力波と仮定, 浅水波理論を適用する. 液滴の下側の蒸気層は, 非常に薄く, 流れはほぼ水平を向き, Hele-Shaw 流を仮定できるとする. 加熱面および液滴の下側表面の温度は与えられた一定値を保ち, 蒸気層の物性値は, 中間の高さでの値で代表させる. 液滴の中心を原点として極座標 (r, θ) を用いる.

無次元化された方程式を示す. 無次元化には, 液滴の平面形の平均半径 R_0 と, R_0 と表面張力係数の代表的な値 σ_0 によって定義された時間スケール $t_0 = \sqrt{\rho_L R_0^3 / \sigma_0}$ を用いた. 無次元化された量を * を添えて表す. 蒸気層内の流速は, 静止した加熱面と速度 $\nabla^* \phi^*(r^*, \theta^*, t^*)$ で動く液滴下面の間を蒸気が流れるとして, Poiseuille 流と平面 Couette 流の重ね合わせで近似できる. 蒸気層内の圧力が静水圧と表面張力と釣り合うことから, 平均流速 $\bar{u}^*(r^*, \theta^*, t^*)$ は, 液滴の高さの変動 $h^*(r^*, \theta^*, t^*)$ と表面張力の変動量 $\sigma^*(r^*, \theta^*, t^*)$ より

$$\bar{u}^* = -A' \nabla^* [G h^* - \sigma^* \nabla^{*2} h^*] + \frac{1}{2} \nabla^* \phi^*, \quad (1)$$

となる. 液滴内の連続の式は,

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \nabla^* (h^* \nabla^* \phi^*) = 0, \quad (2)$$

となる. 仮定の通り, 液滴に関しては蒸発の効果は無視してある. 液滴の運動方程式は, 液体内部では粘性摩擦は働かないが, 蒸気層内の速度勾配に起因する摩擦が液滴下面から働くとは仮定する. 拡張された Euler 方程式は

$$h^* \frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + h^* \frac{1}{2} (\nabla^* \phi^*)^2 + H \left[\frac{1}{2} G h^{*2} - \sigma^* h^* \nabla^{*2} h^* \right] - A'' (\bar{u}^* - \frac{2}{3} \nabla^* \phi^*) = 0, \quad (3)$$

と表される. 第3項は, 液滴内部の圧力が静水圧と表面張力の和と釣り合うことを表している.

ここで無次元パラメーター A' , A'' (蒸気層に対する Reynolds 数), H (液滴の断面形状のアスペクト比), G (慣性力と表面張力の比) は, 蒸気層の厚さ D_0 , 液滴の厚さ h_0 , 蒸気の粘性係数 μ , 液体の密度 ρ_L , 重力加速度 g を用いて, 次式で定義される.

$$A' = \frac{\sigma_0 D_0^2 h_0 t_0}{12 \mu R_0^4}, \quad A'' = \frac{6 \mu t_0}{\rho_L h_0 D_0} = \frac{D_0}{2 R_0 A'}, \quad H = \frac{h_0}{R_0}, \quad G = \frac{\rho_L g R_0^2}{\sigma_0}. \quad (4)$$

液滴の周辺部の境界条件として, 周辺における表面張力と圧力の釣り合いの式

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} \frac{1}{r^*} \frac{\partial R^*}{\partial \theta^*} + \frac{\partial R^*}{\partial t^*}, \quad (5)$$

および, 平面形の輪郭の変動に対する運動学的条件

$$H \left[\frac{1}{2} G h^{*2} - \sigma^* h^* \nabla^{*2} h^* \right] = h^* \sigma^* \left[\frac{1}{H} \frac{2}{h^*} + \frac{(1 - \frac{\partial^2}{\partial \theta^{*2}})(R^* + \beta H h^*)}{(R^* + \beta H h^*)^2} \right], \quad (6)$$

を課す. ここで, (6) の右辺は, 液滴の周辺部分における主曲率を表す. 液滴の周辺部分の断面は実際は丸く膨らんでいるので, 境界条件を適用する '周辺部' の位置を明らかにする必要がある. '周辺部' を $R^*(\theta, t)$ にある垂直な壁とみなすと, 体積が保存されるためには, 最も膨らんだ先端部分 (平面形の輪郭) の半径 $R_c^*(\theta, t^*)$ は

$$R_c^*(\theta, t) = R^*(\theta, t) + \beta h^*(R^*, \theta^*, t^*), \quad \left(\beta = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \quad (7)$$

とあらわすことができる.

表面張力は, 液滴の周辺部分と周囲の高温気体との熱接触の状態によって変動すると考え, それについて以下の様なモデルをたてる. すでに述べたように, 平板からの加熱によって, 液滴の下側には薄い蒸気の層が形成されている. 液滴はさらに, 周囲を取り囲む気体も加熱されているので, その表面全体が薄い蒸気

の層に覆われていると考えられる。周辺部分が外側に突出していくとき、周辺部分の蒸気層は後方、すなわち中心方向へ押し流され薄くなり、温度が高くなると考えられる。表面張力は、温度に逆比例するので、このとき表面張力は弱くなる。逆に周辺部分が内側へ後退していくときは、蒸気層は周辺の外側に伴流領域を形成し厚くなる。周辺部分は、周囲の気体の影響を受けにくくなり低温に、そして表面張力は強くなる。結局、表面張力係数を最も簡単に以下のように仮定する。

$$\bar{\sigma}(\theta^*) = \begin{cases} q & (\dot{R} < 0), (q > 0) \\ 0 & (\dot{R} \geq 0). \end{cases} \quad (8)$$

図 3: 表面張力変動のモデル図

3 弱非線形近似

まず、自励振動励起の駆動力となる表面張力の変動にのみモード間の相互作用が働くと仮定する。変数を平均値とそこからの変動量に分け、

$$h^* = 1 + \tilde{h}, \quad R^* = 1 + \tilde{R}, \quad \sigma^* = 1 + \tilde{\sigma}, \quad (9)$$

無次元化方程式にこれらの変数を代入する。そして、表面張力の変動が振動励起の駆動力となり最も重要という立場から、表面張力の変動を含む 2 次の非線形項のみを残す一種の弱非線形近似を行う。

解は、単一のモードについての線形解析の結果 [11, 18] から、半径方向には Bessel 関数、周方向には n 回の対称性を持つ複数のモードの重ね合わせを仮定する。すなわち、速度ポテンシャル ϕ^* を

$$\phi^* = \sum_{n=2}^{n_{\max}} [\dot{A}_{1,n} \cos n\theta^* + \dot{A}_{2,n} \sin n\theta^*] J_n(w_n r^*), \quad w_n = \left\{ \left(h_0 + \frac{D_0}{2} \right) \frac{R_0}{G} \frac{n(n^2 - 1)}{1 + 2\beta + H \frac{n-3}{2GH}} \right\}^{1/2}, \quad (10)$$

と仮定する。モードは $n = 2 \sim n_{\max}$ を重ね合わせ、 $n = 0, 1$ の振動は多角形の振動とは性質が異なるのでここでは考慮しない。高さと半径の変動は、連続の式と運動学的境界条件からそれぞれ

$$\tilde{h} = \sum_n^{n_{\max}} w_n^2 [A_{1,n} \cos n\theta^* + A_{2,n} \sin n\theta^*] J_n(w_n r^*), \quad (11)$$

$$\tilde{R} \sim \sum_n^{n_{\max}} \left[n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right] [A_{1,n} \cos n\theta^* + A_{2,n} \sin n\theta^*] J_n(w_n), \quad (12)$$

と導かれる。

これらの解を Euler 方程式に代入し、Fourier 積分すると、それぞれのモードの変位に対する振幅方程式が、

$$\ddot{A}_{1,m} + C_1 \dot{A}_{1,m} + \frac{1}{J_m(w_m)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^* \cos m\theta^* \left\{ C_2 (1 + \tilde{\sigma}) \sum_{n=2}^{n_{\max}} [A_{1,n} \cos n\theta^* + A_{2,n} \sin n\theta^*] J_n(w_n) \right\}$$

$$+ \frac{1}{J_m(w_m)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^* \cos m\theta^* \{C_3 \tilde{\sigma}\} = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \ddot{A}_{2,m} + C_1 \dot{A}_{2,m} + \frac{1}{J_m(w_m)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^* \sin m\theta^* \left\{ C_2(1 + \tilde{\sigma}) \sum_{n=2}^{n_{\max}} [A_{1,n} \cos n\theta^* + A_{2,n} \sin n\theta^*] J_n(w_n) \right\} \\ + \frac{1}{J_m(w_m)} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta^* \sin m\theta^* \{C_3 \tilde{\sigma}\} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

ただし

$$\begin{cases} C_1 = \frac{A''}{6}, \\ C_2 = (h_0 + \frac{D_0}{2}) \frac{1}{h_0} \left\{ \frac{w_n^2}{(1 + \beta H)} - \frac{(1 - n^2)}{(1 + \beta H)^2} \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} + \beta H w_n^2 \right) \right\}, \\ C_3 = (h_0 + \frac{D_0}{2}) \frac{1}{h_0} \left(\frac{2}{H} + \frac{1}{1 + \beta H} \right), \end{cases} \quad (15)$$

と得られる。表面張力変動と変位 (速度) の関係は前節で述べたモデル (8) に従って与える。

上記の振幅方程式を数値的に解く。Fourier 積分には台形公式を用い、時間発展は Runge-Kutta-Gill 法を用いた。自由パラメーターとなる物性定数, $n_{\max}$, R_0 , H , q の値を変化させ、解の挙動を調べた。初期値として、速度はすべてのモードについて 0 (無限小) とし、変位はそれぞれ 0 から 1 までの任意の値を与えた。

蒸留水について $n_{\max} = 4$, $R_0 = 5 \text{ mm}$, $H = 1$, $q = 0.0024$ とした場合の、振幅空間 (速度が全て 0 の位相空間断面) 内での解の挙動を図 4(a) に示す。ここで $a_n = \sqrt{A_{1,n}^2 + A_{2,n}^2}$ である。

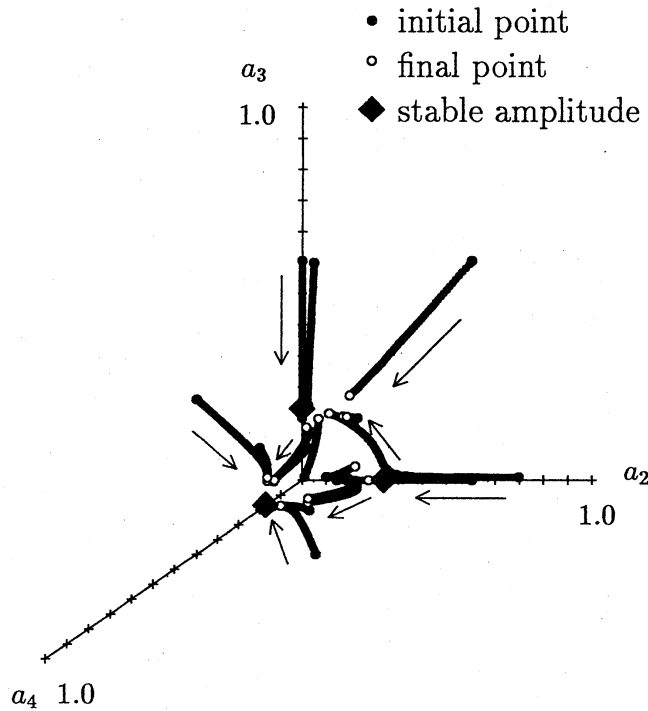


図 4: 弱非線形近似における振幅の時間変化 (a) $q = 0.0024$

初期振幅と計算する時間範囲はそれぞれ適当に与えた。解は、初期値によらずいずれかの軸上の点に収束する傾向が得られた。モード数の小さい振動は減衰した。初期値として 0 を与えたモードの振幅は、無限小のまま有限に増幅されることはなかった。収束点は、有限の初期値を与えた中で最も大きいモードが単一で振動した場合の定常振動振幅に一致した。その値は解析的に

$$\tilde{R}_s = \frac{q}{(q+2)} \frac{4C_3 \exp\left[\frac{\pi C_1}{\Omega}\right] + 1}{\pi C_2 (\exp\left[\frac{\pi C_1}{\Omega}\right] - 1)} \left[n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right] J_n(w_n), \quad \Omega = \sqrt{2C_2(q+2) - C_1^2}, \quad (16)$$

と求められる [18].

過熱の度合いを表すパラメーター q の値が大きい 0.01 の場合の結果を図 4 (b) に示す。過熱度が大きい場合、幾つかの解が、1 よりも大きくなった。これは、液滴が分裂することを意味する。また、これは、式 (16) から明らかなように、 q の値が大きくなると単一モード振動の定常振幅が大きくなることに対応している。さらに、 $q = 0.02$ と大きくなると、全ての解が 1 よりも大きくなった。

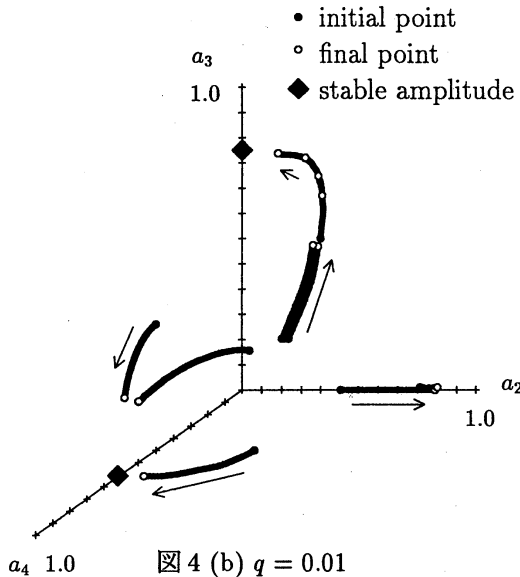


図 4 (b) $q = 0.01$

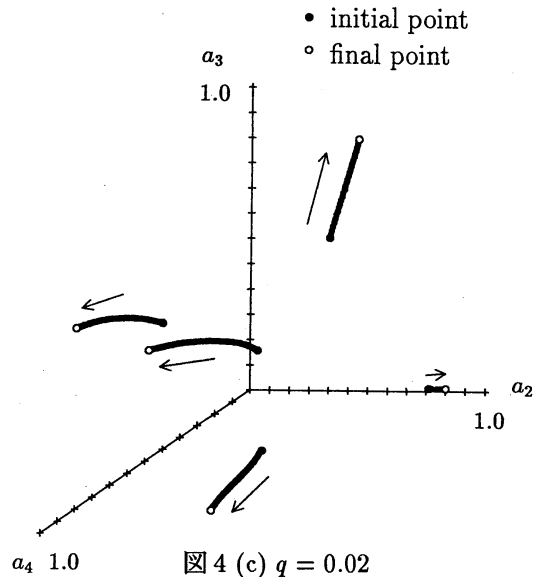


図 4 (c) $q = 0.02$

大きいモード数の振動が不安定で小さいモードの振動は安定である傾向は、物質、 $n_{\max}$, R_0 , H をそれぞれ変えた場合も、同様であった。

結局、 q の値 すなわち加熱面の温度や初期値 (振幅、位相共に) によらず、有限の初期値を与えたモードの中で、最大のモード数を持つ振動が不安定でそのほかのモードは安定であるという傾向が得られた。一つのモードが卓越した振幅を持ち、その他の振動は減衰するという傾向は、平面形が規則的な多角形であった観察結果と一致する。しかし、選択されるモードは必ずしも実験と一致しない。

4 非線形解析

前節では、表面張力の変動が振動の励起に最も大きな影響を及ぼすという立場で解析したが、その結果は、計算した中で最大モードの振動が不安定であるというものであった。そこで次に、より厳密に、全ての項について微小量の 3 次まで残した非線形方程式を解析する。

解として、前節では ϕ^* より $\tilde{h}$, $\tilde{R}$ を導く連続の式および運動学的境界条件が線形化されていたので、 ϕ^* のみを仮定すれば $\tilde{h}$, $\tilde{R}$ は一意的に決定された。しかし、ここでは両式が非線形項を含んでいるために、 $\tilde{h}$, $\tilde{R}$ は簡単な形に帰着されないで、 ϕ^* , $\tilde{h}$, $\tilde{R}$ を連立させて解く必要がある。そして、それぞれの変動量についてモードの重ね合わせを仮定する。故に、実際には、考慮するモードにつき、六つの従属変数の連立方程式を解くことになる。各変動量を以下のように仮定する。

$$\phi^* = \sum_n [\phi_{1n} \cos n\theta^* + \phi_{2n} \sin n\theta^*] J_n(w_n r^*), \quad (17)$$

$$\tilde{h} = \sum_n [h_{1n} \cos n\theta^* + h_{2n} \sin n\theta^*] J_n(w_n r^*), \quad (18)$$

$$\tilde{R} = \sum_n [R_{1n} \cos n\theta^* + R_{2n} \sin n\theta^*] J_n(w_n). \quad (19)$$

境界条件は $r^* = R^*$ で適用されるが、その境界の位置も変動する。そこで、境界における Bessel 関数を変動量で摂動展開する。すなわち、

$$J_n(w_n R^*) = J_n(w_n(1 + \tilde{R})) \sim \left\{ 1 + \left[n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right] \tilde{R} + \left[\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right] \tilde{R}^2 \right\} J_n(w_n), \quad (20)$$

である。

各変動量の発展方程式を以下に挙げる。

$$\begin{pmatrix} \dot{R}_{1m} \\ \dot{R}_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{J_m(w_m)} \frac{1}{\pi} \int d\theta^* \cos m\theta^* [\text{KBC}] \\ \frac{1}{J_m(w_m)} \frac{1}{\pi} \int d\theta^* \sin m\theta^* [\text{KBC}] \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_{1n} \\ \dot{h}_{2n} \end{pmatrix} = M_{im,jn}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{J_m(w_m)} \frac{1}{\pi} \int d\theta^* \cos m\theta^* [\text{CEQ}] \\ \frac{1}{J_m(w_m)} \frac{1}{\pi} \int d\theta^* \sin m\theta^* [\text{CEQ}] \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_{1n} \\ \dot{\phi}_{2n} \end{pmatrix} = M_{in,jn}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{J_m(w_m)} \frac{1}{\pi} \int d\theta^* \cos m\theta^* \begin{bmatrix} \text{EEN} \\ \text{EED} \end{bmatrix} \\ \frac{1}{J_m(w_m)} \frac{1}{\pi} \int d\theta^* \sin m\theta^* \begin{bmatrix} \text{EEN} \\ \text{EED} \end{bmatrix} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

ここで、 $M_{im,jn}$ は Bessel 関数の展開によって現れた行列である。[KBC], $M_{im,jn}$, [CEQ], [EED], [EEN] の詳細は付録 A に記す。なお、表面張力変動は、式 (8) より現実的な

$$\tilde{\sigma} = \frac{q}{2} [1 - \tanh(\gamma \dot{R})] \quad (24)$$

と仮定した。

これらの非線形連立方程式を数値的に解く。弱非線形近似と同様に、Fourier 積分には台形公式、時間発展は 4 次の Runge-Kutta-Gill 法を用いた。 h_{1n} , h_{2n} , ϕ_{1n} , ϕ_{2n} の発展方程式における行列 $M_{im,jn}$ の陰解法 (具体的には行列 $M_{im,jn}$ の逆行列を左から作用させることにあたる) では Gauss-Jordan 法を用いた。自由パラメーターとして、計算する最大モード数 $n_{\max}$ 、時間ステップ Δt 、初期振幅を与えるモードの数、初期振幅の大きさ、 q の大きさ、表面張力変動の基準の値と傾き γ 、平均半径 R_0 の八つをいろいろと変化させた。

解 R_{1n} , R_{2n} の時間発展の例を二つ、図 5 (a), (b) に示す。

いずれの場合も、高いモード数の振動ほど不安定で振幅が大きくなった。これはすべての結果に共通した傾向で $n_{\max}$ を変化させても、変化はなかった (図 5 (a) 参照)。そして、その傾向は平均半径 R_0 が大きいほどその傾向が顕著であった (図 5 (b) 参照)。すなわち、平均半径が小さいときはどのモードの振幅も増幅し続け、その大きさは同程度であった。それに対し、平均半径が大きいときは、高モードの振幅は増大した後には定常になり、低モードの振幅は一旦増大した後減衰した。そして、最高モード数の振幅は他のモードに比べ非常に大きかった。一つのモードが卓越した振幅を持つということは、実験において平面形が規則正しい多角形になることと一致する。

それ以外のパラメーターについて、 Δt 、表面張力変動の基準の値は変化させても解の挙動に変化はなかった。初期振幅を与えるモードの数、初期振幅の大きさ、 q 、 γ の値は、変化させてところ、単一のモードの振動から予測される傾向が得られた。

結局、3 次までの非線形解析において、計算したパラメーター領域では、考慮したモード数範囲の内最も高いモード数の振動が、不安定であることがわかった。

5 結果と議論

結局、表面張力にのみ着目した弱非線形近似による解析、3 次までの非線形解析、どちらにおいても有限の初期振幅を与えたモードの内、最もモード数の高い振動が不安定で、他のモードは安定であるという結論が得られた。3 次までの非線形解析においては平均半径が大きいほど、単一のモードが選択される傾向を示した。平均半径が大きいということは液滴が薄いということを示す。この理論は、初めに液滴が非常に薄いということを仮定しているので、仮定がよく成り立つ範囲で、理論解析の結果と実験事実が一致していることがわかった。

3 次の非線形項を全て取り入れた解析において、解は定常状態に落ちつくことなく、半径変動と高さ変動が 1 より大きく増大してしまった。解が増大し計算が続行できなかったことは、振幅がこの理論の限界を越えていることを示している。モード選択のメカニズムを理解するのに、3 次まででは足りないか、必要なパラメーターが考慮されていない可能性がある。そこで、まず蒸気層の水平面内の粘性について考慮する。今までは、蒸気層内の流れは Poiseuille 流と平面 Couette 流の重ね合わせ、すなわち、

$$\nabla p = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u, \quad (25)$$

境界条件

$$u(z=0) = 0, \quad u(z=D_0) = U = \nabla \phi, \quad (26)$$

を仮定してきた。これらを水平面内の粘性を考慮し、

$$\nabla p = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (27)$$

を仮定する。式 27 を満たす解として、25 の解との類似から

$$u = A(z) \nabla p + B(z) U \quad (28)$$

を仮定し、

$$\nabla^2 \nabla p = -E^2 \nabla p, \quad \nabla^2 U = -E^2 U, \quad (29)$$

を満たすとする。すると蒸気層内の平均流速は

$$\bar{u} = \frac{\rho}{\mu E^3 d} \left[\frac{2(\cosh ED_0 - 1)}{\sinh ED_0} - ED_0 \right] \nabla p + \frac{1}{ED_0} \frac{\cosh ED_0 - 1}{\sinh ED_0} U \quad (30)$$

となる。再び線形解析 [11, 18] に従い、 $\phi^*, \tilde{h}, \tilde{R} \propto J_n(w_n) e^{in\theta^*}$ と仮定すると $E = w_n$ となる。そして、弱非線形近似した発展方程式の係数は

$$\begin{cases} C'_1 = \frac{t_0 \mu}{\rho_L h_0} w_n P \frac{\cosh w_n D_0}{\sinh w_n D_0}, \\ C'_2 = \left(h_0 + \frac{\cosh w_n D_0 - 1}{w_n \sinh w_n D_0} \right) \frac{1}{h_0} \left\{ \frac{w_n^2}{(1+\beta H)} - \frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2} \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} + \beta H w_n^2 \right) \right\}, \\ C'_3 = \left(h_0 + \frac{\cosh w_n D_0 - 1}{w_n \sinh w_n D_0} \right) \frac{1}{h_0} \left(\frac{2}{H} + \frac{1}{1+\beta H} \right), \end{cases} \quad (31)$$

となる。 $w_n D_0 \ll 1$ であるので、その 2 次まで取ると

$$\begin{cases} C'_1 \sim \frac{A''}{6} \left[1 + \frac{(w_n D_0)^2}{3} \right], \\ C'_2 \sim \left(h_0 + \frac{D_0}{2} \left[1 + \frac{(w_n D_0)^2}{12} \right] \right) \frac{1}{h_0} \left\{ \frac{w_n^2}{(1+\beta H)} - \frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2} \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} + \beta H w_n^2 \right) \right\}, \\ C'_3 \sim \left(h_0 + \frac{D_0}{2} \left[1 + \frac{(w_n D_0)^2}{12} \right] \right) \frac{1}{h_0} \left(\frac{2}{H} + \frac{1}{1+\beta H} \right), \end{cases} \quad (32)$$

と近似される。 $w_n D_0 = 0$ とするとこれまで用いてきた係数 (15) に一致することを確認しておく。このように補正した係数を用いて、解を数値的に求めた。本研究で用いた数値を代入すると $w_n D_0 \sim 10^{-4}$ なので、 $t=1$ までの計算では、水平方向の粘性を考慮した効果は見られなかった。

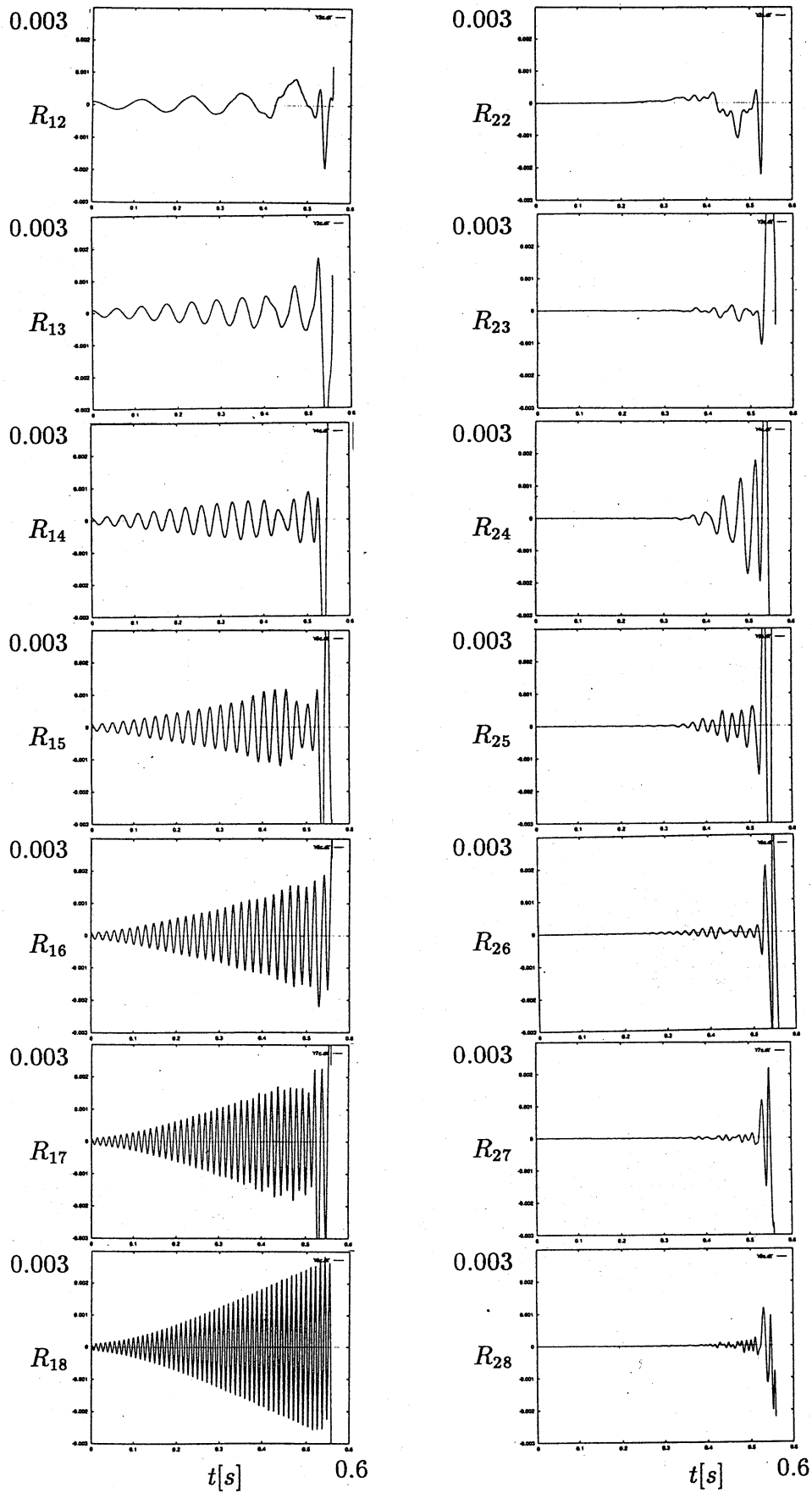


図 5: 非線形解析における振幅の時間変化 (a)

$$n_{\max} = 8, 0 \leq \tilde{\sigma} \leq q/2 \quad R_0 = 5 \text{ mm}$$

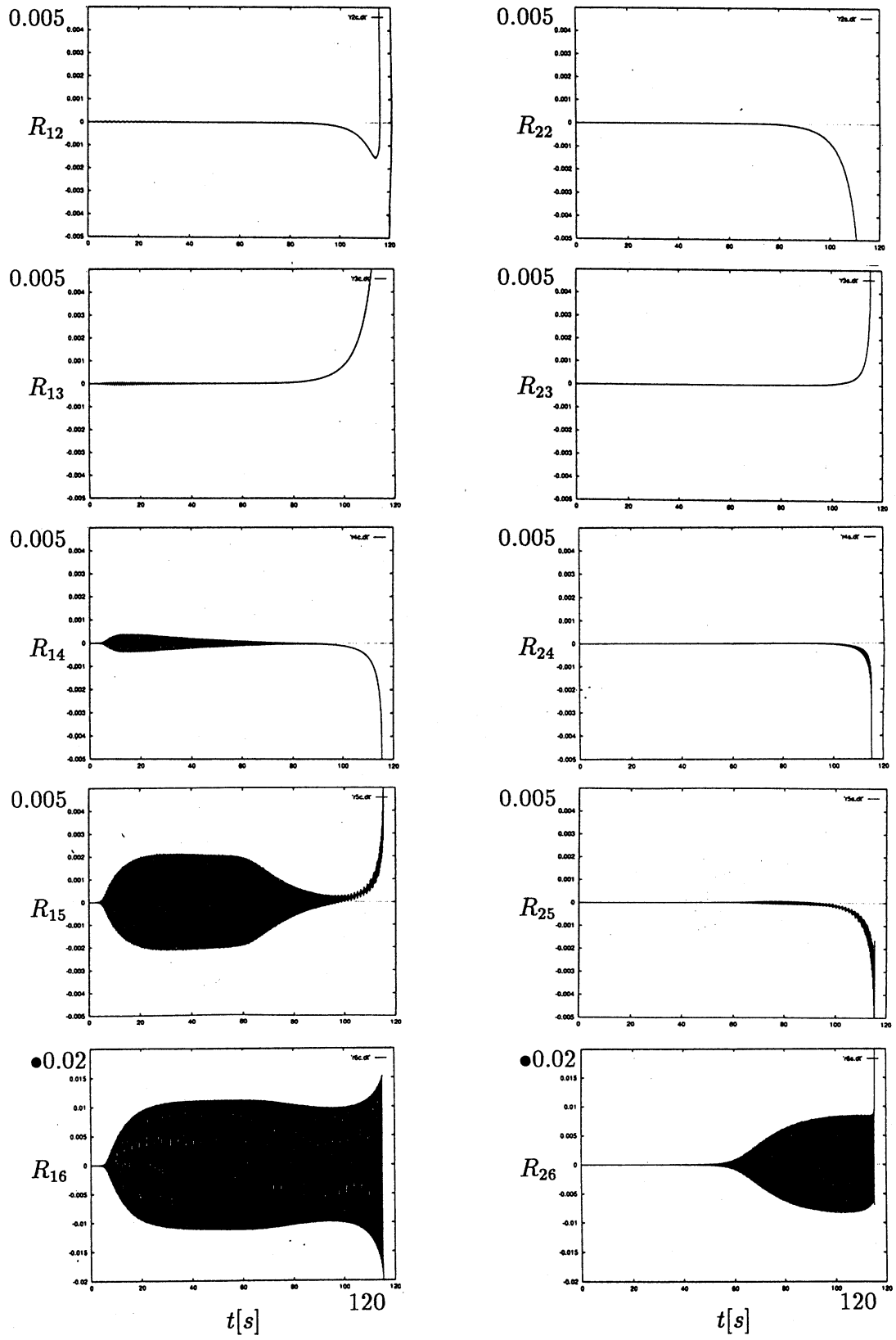


图 5 (b) $n_{\max} = 6$, $-q/2 \leq \tilde{\sigma} \leq q/2$ $R_0 = 3$ cm

この他の可能性があるパラメーターとしては液滴の物質依存性(物性値以外の極性や分子構造など), 液滴の形状, 液滴内の対流などがある。これらについてはまだ考察していない。

また, すでに考慮しているパラメーターについても, 与えた数値はそれぞれ平衡状態における値を基にした数種類の値であった。本研究で扱っている現象は強い非平衡状態にあるので平衡状態とは異なる可能性がある。また, 非線形方程式においては, パラメーターの値のわずかな違いによって, 解の振る舞いが定性的に変化する可能性がある。それ故, 非線形解析の解と実験結果を比較するには, パラメーターとして与える数値の範囲を広げる必要がある。

なお, 本研究の数値計算は, 計算流体力学研究所および東京大学素粒子物理国際研究センターのワークステーションを使用させていただきました。

参考文献

- [1] “伝熱工学の進展 3” 戸田三朗, 他: 養賢堂 昭和 49 年第 1 版
- [2] 大久保英敏: 伝熱研究, **30**, 117, (1991), p. 66
- [3] 新井雅隆, 天谷賢児: 機論, **60**-572, B(1994), p. 1343
- [4] 高野清, 棚澤一郎, 西尾茂文: 機論, **57**-534, B(1991), p. 297
- [5] 高野清, 棚澤一郎, 西尾茂文: 機論, **57**-544, B(1991), p. 4216
- [6] 高野清, 棚澤一郎, 西尾茂文: 機論, **59**-557, B(1993), p. 212
- [7] 高野清, 棚澤一郎, 西尾茂文: 機論, **60**-573, B(1994), p. 1705
- [8] 戸田三朗: 伝熱研究, **32**, 125, (1993), p. 45
- [9] N. J. Holter and W. R. Glasscock: J. Acoust. Soc. Am. **24** (1952), p. 682
- [10] N. Tokugawa and R. Takaki: Proc. KIT Workshop, 1991, ed. S. Kai (World Scientific, 1992) p. 211
- [11] N. Tokugawa: Master Thesis, 1992
- [12] K. Adachi and R. Takaki: J. Phys. Soc. Jpn. **53**, (1984), p. 4184
- [13] R. Takaki, N. Yoshiyasu, and K. Adachi: Forma, **7**, (1992), p. 47
- [14] Lord Rayleigh: *Scientific Paper* (Cambridge Univ. Press, 1902) vol. 3.
- [15] Lord Rayleigh: Proc. R. Soc. London **29**, (1879), p. 71
- [16] R. Takaki and K. Adachi: J. Phys. Soc. Jpn. **54**, (1985), p. 2462
- [17] R. Takaki, A. Katsu, Y. Arai, and K. Adachi: J. Phys. Soc. Jpn. **58**, (1989), p. 129
- [18] N. Tokugawa and R. Takaki: J. Phys. Soc. Jpn. **63**, (1994), p. 1758
- [19] 高木隆司, 徳川直子: 数理解析研究所講究録 888, (1994), p. 158

付録 A

$$\begin{aligned}
 f_{21AB} &= A_{1,n}B_{1,n'} - A_{2,n}B_{2,n'} \\
 f_{22AB} &= A_{1,n}B_{2,n'} + A_{2,n}B_{1,n'} \\
 f_{23AB} &= A_{1,n}B_{1,n'} + A_{2,n}B_{2,n'} \\
 f_{24AB} &= -A_{1,n}B_{2,n'} + A_{2,n}B_{1,n'} \\
 f_{31ABC} &= A_{1,n}B_{1,n'}C_{1,N''} - A_{1,n}B_{2,n'}C_{2,N''} - A_{2,n}B_{1,n'}C_{2,N''} - A_{2,n}B_{2,n'}C_{1,N''} \\
 f_{32ABC} &= A_{1,n}B_{1,n'}C_{2,N''} + A_{1,n}B_{2,n'}C_{1,N''} + A_{2,n}B_{1,n'}C_{1,N''} - A_{2,n}B_{2,n'}C_{2,N''} \\
 f_{33ABC} &= A_{1,n}B_{1,n'}C_{1,N''}A_{1,n}B_{2,n'}C_{2,N''} + A_{2,n}B_{1,n'}C_{2,N''} - A_{2,n}B_{2,n'}C_{1,N''} \\
 f_{34ABC} &= -A_{1,n}B_{1,n'}C_{2,N''} + A_{1,n}B_{2,n'}C_{1,N''} + A_{2,n}B_{1,n'}C_{1,N''} + A_{2,n}B_{2,n'}C_{2,N''} \\
 f_{35ABC} &= A_{1,n}B_{1,n'}C_{1,N''} + A_{1,n}B_{2,n'}C_{2,N''} - A_{2,n}B_{1,n'}C_{2,N''} + A_{2,n}B_{2,n'}C_{1,N''} \\
 f_{36ABC} &= A_{1,n}B_{1,n'}C_{2,N''} - A_{1,n}B_{2,n'}C_{1,N''} + A_{2,n}B_{1,n'}C_{1,N''} + A_{2,n}B_{2,n'}C_{2,N''} \\
 f_{37ABC} &= A_{1,n}B_{1,n'}C_{1,N''} - A_{1,n}B_{2,n'}C_{2,N''} + A_{2,n}B_{1,n'}C_{2,N''} + A_{2,n}B_{2,n'}C_{1,N''} \\
 f_{38ABC} &= -A_{1,n}B_{1,n'}C_{2,N''} - A_{1,n}B_{2,n'}C_{1,N''} + A_{2,n}B_{1,n'}C_{1,N''} - A_{2,n}B_{2,n'}C_{2,N''}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\text{KBC}] = & \sum_n \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right) [\phi_{1n} \cos n\theta^* + \phi_{2n} \sin n\theta^*] J_n(w_n) \\
& + \sum_n \sum_{n'} \left(-n + n \left[n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right] - \frac{w_n^2}{2(n+1)} (n+1) \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& \quad \times \left[\frac{1}{2} f_{21pr} \cos(n+n')\theta^* + \frac{1}{2} f_{22pr} \sin(n+n')\theta^* + \frac{1}{2} f_{23pr} \cos(n-n')\theta^* + \frac{1}{2} f_{24pr} \sin(n-n')\theta^* \right] \\
& + \sum_n \sum_{n'} n n' J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& \quad \times \left[\frac{1}{2} f_{21pr} \cos(n+n')\theta^* + \frac{1}{2} f_{22pr} \sin(n+n')\theta^* - \frac{1}{2} f_{23pr} \cos(n-n')\theta^* - \frac{1}{2} f_{24pr} \sin(n-n')\theta^* \right] \\
& + \sum_n \sum_{n'} \sum_{n''} \left(n - n \left[n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right] + n \left[\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right] - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \left[\frac{n(n-1)}{2} + n \right] \right) \\
& \quad \times J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& \quad \times \left[\frac{1}{4} f_{31pr} \cos(n+n'+n'')\theta^* + \frac{1}{4} f_{32pr} \sin(n+n'+n'')\theta^* \right. \\
& \quad + \frac{1}{4} f_{33pr} \cos(n+n'-n'')\theta^* + \frac{1}{4} f_{34pr} \sin(n+n'-n'')\theta^* \\
& \quad + \frac{1}{4} f_{35pr} \cos(n-n'+n'')\theta^* + \frac{1}{4} f_{36pr} \sin(n-n'+n'')\theta^* \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} f_{37pr} \cos(n-n'-n'')\theta^* + \frac{1}{4} f_{38pr} \sin(n-n'-n'')\theta^* \right] \\
& + \sum_n \sum_{n'} \sum_{n''} \left[n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} - 2 \right] n n' J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& \quad \times \left[\frac{1}{4} f_{31pr} \cos(n+n'+n'')\theta^* + \frac{1}{4} f_{32pr} \sin(n+n'+n'')\theta^* \right. \\
& \quad + \frac{1}{4} f_{33pr} \cos(n+n'-n'')\theta^* + \frac{1}{4} f_{34pr} \sin(n+n'-n'')\theta^* \\
& \quad - \frac{1}{4} f_{35pr} \cos(n-n'+n'')\theta^* - \frac{1}{4} f_{36pr} \sin(n-n'+n'')\theta^* \\
& \quad \left. - \frac{1}{4} f_{37pr} \cos(n-n'-n'')\theta^* - \frac{1}{4} f_{38pr} \sin(n-n'-n'')\theta^* \right], \tag{33}
\end{aligned}$$

$$M_{im,jn} = \begin{cases} 1 \cdot \delta_{im,jn} \\ J_m(w_m) (M' + M'') \end{cases}, \tag{34}$$

$$M' = \begin{cases} \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right) J_n(w_n) J_{m-n}(w_{m-n}) \frac{1}{2} R_{1m-n} \delta_{1,m} \delta_{1,n}, (m-n \geq m_{\min} \text{ and } m-n \leq m_{\max}) \\ \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right) J_n(w_n) J_{m-n}(w_{m-n}) \frac{1}{2} (-R_{2m-n}) \delta_{1,m} \delta_{1,n}, (n-m \geq m_{\min} \text{ and } n-m \leq m_{\max}) \\ \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right) J_n(w_n) J_{n-m}(w_{n-m}) \frac{1}{2} R_{1n-m} \delta_{1,m} \delta_{2,n}, (m-n \geq m_{\min} \text{ and } m-n \leq m_{\max}) \\ \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right) J_n(w_n) J_{n-m}(w_{n-m}) \frac{1}{2} R_{2n-m} \delta_{1,m} \delta_{2,n}, (n-m \geq m_{\min} \text{ and } n-m \leq m_{\max}) \\ \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right) J_n(w_n) J_{m-n}(w_{m-n}) \frac{1}{2} R_{2m-n} \delta_{2,m} \delta_{1,n}, (m-n \geq m_{\min} \text{ and } m-n \leq m_{\max}) \\ \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right) J_n(w_n) J_{m-n}(w_{m-n}) \frac{1}{2} R_{1m-n} \delta_{2,m} \delta_{2,n}, (n-m \geq m_{\min} \text{ and } n-m \leq m_{\max}) \\ \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right) J_n(w_n) J_{n-m}(w_{n-m}) \frac{1}{2} (-R_{2n-m}) \delta_{2,m} \delta_{1,n}, (m-n \geq m_{\min} \text{ and } m-n \leq m_{\max}) \\ \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right) J_n(w_n) J_{n-m}(w_{n-m}) \frac{1}{2} R_{1n-m} \delta_{2,m} \delta_{2,n}, (n-m \geq m_{\min} \text{ and } n-m \leq m_{\max}) \end{cases}, \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
M'' = & \sum_{n'=m-n-m_{\max}}^{m-n-m_{\min}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{m-n-n'}(w_{m-n-n'}) \\
& \times \frac{1}{4} (R_{1n'} R_{1m-n-n'} - R_{2n'} R_{2m-n-n'}) \delta_{1,m} \delta_{1,n} \\
& + \sum_{n'=m-n+m_{\min}}^{m-n+m_{\max}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n+n'-m}(w_{n+n'-m}) \\
& \times \frac{1}{4} (R_{1n'} R_{1n+n'-m} + R_{2n'} R_{2n+n'-m}) \delta_{1,m} \delta_{1,n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n'=-m+n+m_{\min}}^{-m+n+m_{\max}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{m-n+n'}(w_{m-n+n'}) \\
& \times \frac{1}{4} (R_{1n'} R_{1m-n+n'} + R_{2n'} R_{2m-n+n'}) \delta_{1,m} \delta_{1,n} \\
& + \sum_{n'=-m+n-m_{\max}}^{-m+n-m_{\min}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n-n'-m}(w_{n-n'-m}) \\
& \times \frac{1}{4} (R_{1n'} R_{1n-n'-m} - R_{2n'} R_{2n-n'-m}) \delta_{1,m} \delta_{1,n} \\
& + \sum_{n'=m-n-m_{\max}}^{m-n-m_{\min}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{m-n-n'}(w_{m-n-n'}) \\
& \times \frac{1}{4} (-R_{1n'} R_{2m-n-n'} - R_{2n'} R_{1m-n-n'}) \delta_{1,m} \delta_{2,n} \\
& + \sum_{n'=m-n+m_{\min}}^{m-n+m_{\max}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n+n'-m}(w_{n+n'-m}) \\
& \times \frac{1}{4} (R_{1n'} R_{2n+n'-m} - R_{2n'} R_{1n+n'-m}) \delta_{1,m} \delta_{2,n} \\
& + \sum_{n'=-m+n+m_{\min}}^{-m+n+m_{\max}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{m-n+n'}(w_{m-n+n'}) \\
& \times \frac{1}{4} (-R_{1n'} R_{2m-n+n'} + R_{2n'} R_{1m-n+n'}) \delta_{1,m} \delta_{2,n} \\
& + \sum_{n'=-m+n-m_{\max}}^{-m+n-m_{\min}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n-n'-m}(w_{n-n'-m}) \\
& \times \frac{1}{4} (R_{1n'} R_{2n-n'-m} + h_{2n} R_{2n'} R_{1n-n'-m}), \delta_{1,m} \delta_{2,n} \\
& + \sum_{n'=m-n-m_{\max}}^{m-n-m_{\min}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{m-n-n'}(w_{m-n-n'}) \\
& \times \frac{1}{4} (R_{1n'} R_{2m-n-n'} + R_{2n'} R_{1m-n-n'}) \delta_{2,m} \delta_{1,n} \\
& + \sum_{n'=m-n+m_{\min}}^{m-n+m_{\max}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n+n'-m}(w_{n+n'-m}) \\
& \times \frac{1}{4} (-R_{1n'} R_{2n+n'-m} + R_{2n'} R_{1n+n'-m}) \delta_{2,m} \delta_{1,n} \\
& + \sum_{n'=-m+n+m_{\min}}^{-m+n+m_{\max}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{m-n+n'}(w_{m-n+n'}) \\
& \times \frac{1}{4} (R_{1n'} R_{2m-n+n'} - R_{2n'} R_{1m-n+n'}) \delta_{2,m} \delta_{1,n} \\
& + \sum_{n'=-m+n-m_{\max}}^{-m+n-m_{\min}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n-n'-m}(w_{n-n'-m}) \\
& \times \frac{1}{4} (-R_{1n'} R_{2n-n'-m} - R_{2n'} R_{1n-n'-m}) \delta_{2,m} \delta_{1,n} \\
& + \sum_{n'=m-n-m_{\max}}^{m-n-m_{\min}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{m-n-n'}(w_{m-n-n'}) \\
& \times \frac{1}{4} (R_{1n'} R_{1m-n-n'} - R_{2n'} R_{2m-n-n'}) \delta_{2,m} \delta_{2,n} \\
& + \sum_{n'=m-n+m_{\min}}^{m-n+m_{\max}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n+n'-m}(w_{n+n'-m}) \\
& \times \frac{1}{4} (R_{1n'} R_{1n+n'-m} + R_{2n'} R_{2n+n'-m}) \delta_{2,m} \delta_{2,n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n'=-m+n+m_{\min}}^{-m+n+m_{\max}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{m-n+n'}(w_{m-n+n'}) \\
& \times \frac{1}{4} (R_{1n'} R_{1m-n+n'} + R_{2n'} R_{2m-n+n'}) \delta_{2,m} \delta_{2,n} \\
& + \sum_{n'=-m+n-m_{\max}}^{-m+n-m_{\min}} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n-n'-m}(w_{n-n'-m}) \\
& \times \frac{1}{4} (R_{1n'} R_{1n-n'-m} - R_{2n'} R_{2n-n'-m}) \delta_{2,m} \delta_{2,n}
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
[\text{CEQ}] = & \sum_n w_n^2 [\phi_{1n} \cos n\theta^* + \phi_{2n} \sin n\theta^*] J_n(w_n) \\
& + \sum_n \sum_{n'} n w_n^2 J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& \times \left[\frac{1}{2} \text{fl}_{21pr} \cos(n+n')\theta^* + \frac{1}{2} \text{fl}_{22pr} \sin(n+n')\theta^* + \frac{1}{2} \text{fl}_{23pr} \cos(n-n')\theta^* + \frac{1}{2} \text{fl}_{24pr} \sin(n-n')\theta^* \right] \\
& + \sum_n \sum_{n'} \left[\left(\frac{n w_{n'}^2}{2(n'+1)} + \frac{n' w_n^2}{2(n+1)} \right) - n n' + w_n^2 \right] J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& \times \left[\frac{1}{2} \text{fl}_{21ph} \cos(n+n')\theta^* + \frac{1}{2} \text{fl}_{22ph} \sin(n+n')\theta^* + \frac{1}{2} \text{fl}_{23ph} \cos(n-n')\theta^* + \frac{1}{2} \text{fl}_{24ph} \sin(n-n')\theta^* \right] \\
& + \sum_n \sum_{n'} n n' J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& \times \left[\frac{1}{2} \text{fl}_{21ph} \cos(n+n')\theta^* + \frac{1}{2} \text{fl}_{22ph} \sin(n+n')\theta^* - \frac{1}{2} \text{fl}_{23ph} \cos(n-n')\theta^* - \frac{1}{2} \text{fl}_{24ph} \sin(n-n')\theta^* \right] \\
& + \sum_n \sum_{n'} \sum_{n''} \frac{n(n-1)}{2} w_n^2 J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& \times \left[\frac{1}{4} \text{fl}_{31pr} \cos(n+n'+n'')\theta^* + \frac{1}{4} \text{fl}_{32pr} \sin(n+n'+n'')\theta^* \right. \\
& + \frac{1}{4} \text{fl}_{33pr} \cos(n+n'-n'')\theta^* + \frac{1}{4} \text{fl}_{34pr} \sin(n+n'-n'')\theta^* \\
& + \frac{1}{4} \text{fl}_{35pr} \cos(n-n'+n'')\theta^* + \frac{1}{4} \text{fl}_{36pr} \sin(n-n'+n'')\theta^* \\
& \left. + \frac{1}{4} \text{fl}_{37pr} \cos(n-n'-n'')\theta^* + \frac{1}{4} \text{fl}_{38pr} \sin(n-n'-n'')\theta^* \right] \\
& + \sum_n \sum_{n'} \sum_{n''} \left[(n+n') \left(\frac{n w_{n'}^2}{2(n'+1)} + \frac{n' w_n^2}{2(n+1)} + w_n^2 \right) \right. \\
& \quad \left. - n n' \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} + n' - \frac{w_{n'}^2}{2(n'+1)} - 2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \right] \\
& \times \left[\frac{1}{4} \text{fl}_{31ph} \cos(n+n'+n'')\theta^* + \frac{1}{4} \text{fl}_{32ph} \sin(n+n'+n'')\theta^* \right. \\
& + \frac{1}{4} \text{fl}_{33ph} \cos(n+n'-n'')\theta^* + \frac{1}{4} \text{fl}_{34ph} \sin(n+n'-n'')\theta^* \\
& + \frac{1}{4} \text{fl}_{35ph} \cos(n-n'+n'')\theta^* + \frac{1}{4} \text{fl}_{36ph} \sin(n-n'+n'')\theta^* \\
& \left. + \frac{1}{4} \text{fl}_{37ph} \cos(n-n'-n'')\theta^* + \frac{1}{4} \text{fl}_{38ph} \sin(n-n'-n'')\theta^* \right] \\
& + \sum_n \sum_{n'} \sum_{n''} n n' \left(n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} + n' - \frac{w_{n'}^2}{2(n'+1)} - 2 \right) J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& \times \left[\frac{1}{4} \text{fl}_{31ph} \cos(n+n'+n'')\theta^* + \frac{1}{4} \text{fl}_{32ph} \sin(n+n'+n'')\theta^* \right. \\
& + \frac{1}{4} \text{fl}_{33ph} \cos(n+n'-n'')\theta^* + \frac{1}{4} \text{fl}_{34ph} \sin(n+n'-n'')\theta^* \\
& - \frac{1}{4} \text{fl}_{35ph} \cos(n-n'+n'')\theta^* - \frac{1}{4} \text{fl}_{36ph} \sin(n-n'+n'')\theta^* \\
& \left. - \frac{1}{4} \text{fl}_{37ph} \cos(n-n'-n'')\theta^* - \frac{1}{4} \text{fl}_{38ph} \sin(n-n'-n'')\theta^* \right].
\end{aligned} \tag{37}$$

$$[\text{EED}] = 1 + \sum_N [h_{1n} \cos n\theta^* + h_{2n} \sin n\theta^*] J_n(w_n)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_N \sum_{N'} \left[n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right] J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& \times \left[\frac{1}{2} \mathfrak{f}_{21hr} \cos(n+n')\theta^* + \frac{1}{2} \mathfrak{f}_{22hr} \sin(n+n')\theta^* + \frac{1}{2} \mathfrak{f}_{23hr} \cos(n-n')\theta^* + \frac{1}{2} \mathfrak{f}_{24hr} \sin(n-n')\theta^* \right] \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} \left[\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right] J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& \times \left[\frac{1}{4} \mathfrak{f}_{31hrr} \cos(n+n'+n'')\theta^* + \frac{1}{4} \mathfrak{f}_{32hrr} \sin(n+n'+n'')\theta^* \right. \\
& + \frac{1}{4} \mathfrak{f}_{33hrr} \cos(n+n'-n'')\theta^* + \frac{1}{4} \mathfrak{f}_{34hrr} \sin(n+n'-n'')\theta^* \\
& + \frac{1}{4} \mathfrak{f}_{35hrr} \cos(n-n'+n'')\theta^* + \frac{1}{4} \mathfrak{f}_{36hrr} \sin(n-n'+n'')\theta^* \\
& \left. + \frac{1}{4} \mathfrak{f}_{37hrr} \cos(n-n'-n'')\theta^* + \frac{1}{4} \mathfrak{f}_{38hrr} \sin(n-n'-n'')\theta^* \right].
\end{aligned} \tag{38}$$

$$N = \pm n$$

$$\begin{aligned}
-[\text{EEN}] = & (1 + \frac{D_0}{2h_0})(\frac{2}{H} + \frac{1}{1 + \beta H})\bar{\sigma} \\
& + \sum_N \frac{A''}{6} \phi^\dagger_N e^{iN\theta^*} J_n(w_n) \\
& + \sum_N [(1 + \frac{D_0}{2h_0})(-\frac{2}{H} - \frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2}\beta H) + (\frac{2}{H} + \frac{1}{1+\beta H}) + \frac{D_0}{4R_0}G] h^\dagger_N e^{iN\theta^*} J_n(w_n) \\
& + \sum_N [-(1 + \frac{D_0}{2h_0})\frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2}] R^\dagger_N e^{iN\theta^*} J_n(w_n) \\
& + \sum_N \bar{\sigma} [(1 + \frac{D_0}{2h_0})(-\frac{2}{H} - \frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2}\beta H) + (\frac{2}{H} + \frac{1}{1+\beta H})] h^\dagger_N e^{iN\theta^*} J_n(w_n) \\
& + \sum_N \bar{\sigma} [-(1 + \frac{D_0}{2h_0})\frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2}] R^\dagger_N e^{iN\theta^*} J_n(w_n) \\
& + \sum_N \sum_{N'} -\frac{1}{2} [(\frac{nw_{n'}^2}{2(n'+1)} + \frac{n'w_n^2}{2(n+1)}) - nn' + NN'] \phi^\dagger_N \phi^\dagger_{N'} e^{i[N+N']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \frac{A''}{6} (n - \frac{w_n^2}{2(n+1)}) \phi^\dagger_N R^\dagger_{N'} e^{i[N+N']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} [(1 + \frac{D_0}{2h_0})(-\frac{2}{H} - \frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2}\beta H) + (\frac{2}{H} + \frac{1}{1+\beta H}) + \frac{D_0}{4R_0}G] [n - \frac{w_n^2}{2(n+1)}] \\
& \quad \times h^\dagger_N R^\dagger_{N'} e^{i[N+N']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} (1 + \frac{D_0}{2h_0}) \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3} \beta H h^\dagger_N R^\dagger_{N'} e^{i[N+N']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} [(1 + \frac{D_0}{2h_0})(\frac{2}{H} + \beta H \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3}\beta H) + (-\frac{2}{H} - \frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2}\beta H)] \\
& \quad \times h^\dagger_N h^\dagger_{N'} e^{i[N+N']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} [(1 + \frac{D_0}{2h_0}) \beta H \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3} - \frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2}] R^\dagger_N h^\dagger_{N'} e^{i[N+N']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} [(1 + \frac{D_0}{2h_0}) \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3}] R^\dagger_N R^\dagger_{N'} e^{i[N+N']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \bar{\sigma} [(1 + \frac{D_0}{2h_0})(-\frac{2}{H} - \frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2}\beta H) + (\frac{2}{H} + \frac{1}{1+\beta H})] [n - \frac{w_n^2}{2(n+1)}] \\
& \quad \times h^\dagger_N R^\dagger_{N'} e^{i[N+N']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \bar{\sigma} [(1 + \frac{D_0}{2h_0}) \beta H \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3}] h^\dagger_N R^\dagger_{N'} e^{i[N+N']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \bar{\sigma} [(1 + \frac{D_0}{2h_0})(\frac{2}{H} + \beta H \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3}\beta H) + (-\frac{2}{H} - \frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2}\beta H)] \\
& \quad \times h^\dagger_N h^\dagger_{N'} e^{i[N+N']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \bar{\sigma} [(1 + \frac{D_0}{2h_0}) \beta H \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3} - \frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2}] R^\dagger_N h^\dagger_{N'} e^{i[N+N']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \bar{\sigma} [(1 + \frac{D_0}{2h_0}) \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3}] R^\dagger_N R^\dagger_{N'} e^{i[N+N']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} \frac{1}{2} [-(\frac{nw_{n'}^2}{2(n'+1)} + \frac{n'w_n^2}{2(n+1)})(n + n') \\
& \quad + (nn' - NN')(n + n' - \frac{w_n^2}{2(n+1)} - \frac{w_{n'}^2}{2(n'+1)} - 2)] \\
& \quad \times \phi^\dagger_N \phi^\dagger_{N'} R^\dagger_{N''} e^{i[N+N'+N'']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} -\frac{1}{2} [(\frac{nw_{n'}^2}{2(n'+1)} + \frac{n'w_n^2}{2(n+1)}) - nn' + NN']
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \phi^\dagger_N \phi^\dagger_{N'} h^\dagger_{N''} e^{i[N+N'+N'']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} \left[\frac{A''}{6} \left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right) \right. \\
& \quad \times \phi^\dagger_N R^\dagger_{N'} R^\dagger_{N''} e^{i[N+N'+N'']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} \left[\left(1 + \frac{D_0}{2h_0} \right) \left(-\frac{2}{H} - \frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2} \beta H \right) + \left(\frac{2}{H} + \frac{1}{1+\beta H} \right) + \frac{D_0}{4R_0} G \right] \\
& \quad \times \left[\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n+1)}{4(n+1)} w_n^2 \right] \\
& \quad \times h^\dagger_N R^\dagger_{N'} R^\dagger_{N''} e^{i[N+N'+N'']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} \left[\left(1 + \frac{D_0}{2h_0} \right) \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3} \beta H \right] \left[n - \frac{w_n^2}{2(n+1)} \right] \\
& \quad \times h^\dagger_N R^\dagger_{N'} R^\dagger_{N''} e^{i[N+N'+N'']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} \left[- \left(1 + \frac{D_0}{2h_0} \right) \frac{(1-3n^2)}{(1+\beta H)^4} \beta H \right] \\
& \quad \times h^\dagger_N R^\dagger_{N'} R^\dagger_{N''} e^{i[N+N'+N'']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} \left[\left(1 + \frac{D_0}{2h_0} \right) \left(\frac{2}{H} + \beta H \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3} \beta H \right) + \left(-\frac{2}{H} - \frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2} \beta H \right) \right] \\
& \quad \times \left[n + n' - \frac{w_n^2}{2(n+1)} - \frac{w_{n'}^2}{2(n'+1)} \right] \\
& \quad \times h^\dagger_N h^\dagger_{N'} R^\dagger_{N''} e^{i[N+N'+N'']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} \left[\left(1 + \frac{D_0}{2h_0} \right) \left(-2\beta H \frac{(1-3n^2)}{(1+\beta H)^4} \beta H \right) + \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3} \beta H \right] \\
& \quad \times h^\dagger_N h^\dagger_{N'} R^\dagger_{N''} e^{i[N+N'+N'']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} \left[\left(1 + \frac{D_0}{2h_0} \right) \beta H \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3} - \frac{(1-n^2)}{(1+\beta H)^2} \right] \left[n' - \frac{w_{n'}^2}{2(n'+1)} \right] \\
& \quad \times R^\dagger_N h^\dagger_{N'} R^\dagger_{N''} e^{i[N+N'+N'']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} \left[\left(1 + \frac{D_0}{2h_0} \right) \left(-2\beta H \frac{(1-3n^2)}{(1+\beta H)^4} \right) + \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3} \right] \\
& \quad \times R^\dagger_N h^\dagger_{N'} R^\dagger_{N''} e^{i[N+N'+N'']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} \left[\left(1 + \frac{D_0}{2h_0} \right) \left(-\frac{2}{H} - (\beta H)^2 \frac{(1-3n^2)}{(1+\beta H)^4} \beta H \right) + \left(\frac{2}{H} + \beta H \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3} \beta H \right) \right] \\
& \quad \times h^\dagger_N h^\dagger_{N'} h^\dagger_{N''} e^{i[N+N'+N'']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} \left[- \left(1 + \frac{D_0}{2h_0} \right) (\beta H)^2 \frac{(1-3n^2)}{(1+\beta H)^4} + \beta H \frac{(1-2n^2)}{(1+\beta H)^3} \right] \\
& \quad \times R^\dagger_N h^\dagger_{N'} h^\dagger_{N''} e^{i[N+N'+N'']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}) \\
& + \sum_N \sum_{N'} \sum_{N''} \left[- \left(1 + \frac{D_0}{2h_0} \right) \frac{(1-3n^2)}{(1+\beta H)^4} \right] \\
& \quad \times R^\dagger_N R^\dagger_{N'} R^\dagger_{N''} e^{i[N+N'+N'']\theta^*} J_n(w_n) J_{n'}(w_{n'}) J_{n''}(w_{n''}).
\end{aligned} \tag{39}$$