

log etale cohomology の双対性

東京大学D3 中山能力

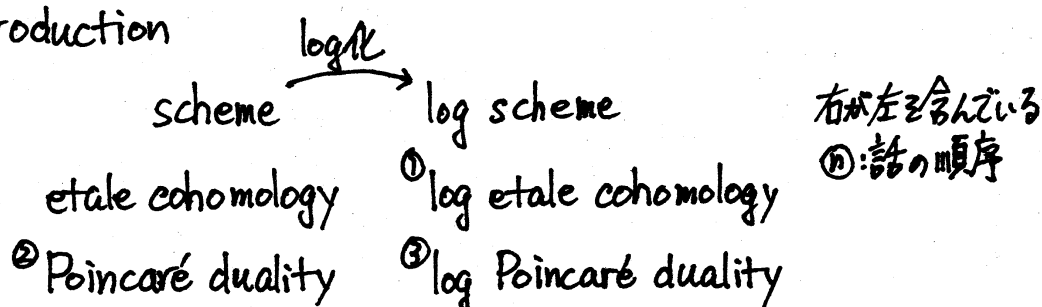
Chikara Nakayama

"Duality in log etale cohomology"

Throughout this manuscript, A denotes a (commutative) ring.

k denotes a (commutative) field.

0. Introduction



④ Proofs

⑤ Application

1. The definition of log etale cohomology

Let X be an fs log scheme (i.e. locally the log str. M_X of X has a chart with an fs monoid).

$$P: \text{fs} \leftrightarrow \begin{cases} \text{finitely generated, } P \rightarrow P^{\text{gp}} \text{ is injective (fine)} \\ \forall a \in P^{\text{gp}}, \exists n \in P, n \geq 1 \Rightarrow a \in P \text{ (saturated)} \end{cases}$$

Then we define the log etale pretopology $X_{\text{et}}^{\log}$ of X as follows:

$$\text{Obj} = \{ Y \rightarrow X \text{ in } (fs)^{(fs|logsch)}, \log \text{ etale and of Kummer type} \}$$

for $\forall y \mapsto x$

$$(M_Y/\mathcal{O}_Y^*)_{\bar{y}} \leftarrow (M_X/\mathcal{O}_X^*)_{\bar{x}} \text{ is}$$

injective and $\forall \bar{a} \quad \exists n \geq 1 \quad \bar{a}^n$

$\text{Fl} = X\text{-morphisms}$

coverings = surjective families

log etale cohomology は K. Fujiwara により導入され、一般の定義は K. Kato による。従来の etale cohomology 論と並行的にあるために、クヌー型を課する。単に log etale だけでは、例えば全射の base change が全射にならないことがある。などの困難が生ずる。(fs) の base change の underlying scheme は、scheme の圏での base change にならない場合がある。)

Proposition If X has the trivial log str., i.e. $M_X = \mathcal{O}_X^*$,
then $X_{\text{et}}^{\log} = \dot{X}_{\text{et}}$ ($\dot{X}$ denotes the underlying scheme.)

このように、log etale cohomology は、fs と同じ性質をもつ log scheme に対してのみ定義されるが、trivial log str. は fs なので、従来の場合は含んでいることになる。

2. A review of relative Poincaré duality in etale cohomology (SGA4 XVIII §3)

Poincaré duality といえば普通は H_c^i と H^{2d-i} が dual ということだが、etale cohomology について証明するとき、relative な定式化が有効であった。

① Formal duality

Let S be a scheme. ($\rightarrow$ base を固定)

Let $f: X \rightarrow Y$ be an S -compactifiable morphism and let A be a torsion ring.

f が proper なら Rf_* , open immersion なら O_Y による拡張, 一般にはその合成で定義

Then $Rf_*: D(X, A) \rightarrow D(Y, A)$ has a (unique) partial right adjoint

$$Rf^!: D^+(Y, A) \rightarrow D^+(X, A), \text{ and}$$

$$Rf_* Rf^! L \simeq Rf^! L, K \in D^+(X, A), L \in D^+(Y, A)$$

これは本質的には圏論の adjoint functor theorem に帰着する形式的な命題である。

② Further assume f is smooth and the relative dimension d of f is pure. Let $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ where n is an integer invertible on S . Then

$$Rf^! L \cong f^* L(d)[2d]$$

Notes. In particular when $Y = S = k = k_{\text{sep}}$, $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[0]$, and $K = F[0]$ is locally constant and constructible on X_{et} ,

① + ② $\Rightarrow$ there is a non-degenerate pairing

$$H_c^i(X, F) \times H^{2d-i}(X, \check{F}(d)) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

3. Log Poincaré duality

以上を log 化したいが, まず formal duality はそのまま成り立つので問題は

① Formal duality OK.

② Problem Calculate $Rf^! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ for various f that is log smooth and compactifiable.

ということになる。では log smooth 射にはどのようなものがあるかという。

Typical examples of log smooth morphisms:

a) toric variety / $S = (\text{Spec } k, \text{trivial log.})$

b) semistable family / $T = (\text{Spec } R, \text{log str. defined by the closed pt})$
 $\uparrow$
 dvr

このように、singularityのある対象が適当な log str. を与えることで、log smooth になるというところが、 $\log$ scheme 導入の動機であった。結果を述べる。

Thm. 1. Let S be as above and let $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ where n is an integer invertible on S . Let $f: Y \rightarrow X$ be a log smooth S -compactifiable morphism in $(fs)/S$ with Y and X connected $\neq \emptyset$. Let $d = \dim Y - \dim X$.

Assume (a) X is log smooth and compactifiable over S

or (b) X is compactifiable over S and is étale locally the log locus of an X' that is log smooth over S . $\text{Supp}(M_{X'}^{\#}/\mathcal{O}_{X'}^*)$

Then

$$Rf^! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = j_! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)[2d]$$

where $j: Y_{\text{vert}}/S \hookrightarrow Y$ is the open immersion from
 $\{y \in Y \mid f \text{ is vertical at } y \text{ i.e. } \forall a \in M_{Y, \bar{y}} \exists b \in M_{X, f(\bar{y})} \text{ s.t. } a|b \text{ in } M_{Y, \bar{y}}\}$ //

For simplicity $\boxed{\wedge := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ in the following. ← 本稿の最後まで

Example 1 (a) Assume $X=S$. Then $Y_{\text{vert}}/S \hookrightarrow Y$ is a toroidal

embedding.

普通の etale cohomology では, toric variety の双対複体は複雑だが, log では, 単に, torus からの 0 による拡張となっている, ということ。

(b) Let $f: Y \rightarrow X$ be the special fiber of a

$$\begin{array}{c} \parallel \\ T \otimes_{\mathbb{R}} k \end{array}$$
 semistable family.

Then X satisfies (b) and $Y_{\text{ver}/f} = Y$, so
 $Rf^! \wedge = \wedge(d)[2d]$ where $d = \dim Y$.

普通の smooth の場合と全く並行的である。実際に族から来ていなくても, 局所的にどうなっているだけでもよい。

Remark For a certain f which does not satisfy (a) nor (b),
 $Rf^! \wedge \neq j_! \wedge(d)[2d]$.

一般にはどうなるかは, 今の所予想することも難しい。

Thm 2. (d.v.r. base) Let T be as above and let η be its generic point. Let n be an integer invertible on T . Let $f: Y \rightarrow X$ be a log smooth T -compactifiable morphism in $(fs)/_T$ with Y and X connected $\neq \emptyset$. Assume that f is vertical. Let $d = \dim(Y_\eta) - \dim(X_\eta)$. Assume X is log smooth and compactifiable over T .

Then the same conclusion as in Thm. 1. holds.

Example 2. Let $f: Y \rightarrow X = T$ be a semistable family. Then Thm 2.

can be applied to f .

4. Proofs

Thm1.(a) reduces to the case where $X = S = k = k_{\text{sep}}$ and $Y = \text{Spec}(k[t_1, \dots, t_d])$ with log str. associated to $\mathbb{N} \ni 1 \mapsto t_1$.

Consider

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{trivial log } \circlearrowleft Y_{\text{ver}} & \xrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & Y \cdot Y_{\text{ver}} =: Z \\
 & \searrow u & \downarrow f & & \downarrow \varepsilon: \text{forgetting log morphism} \\
 & & k & \xleftarrow{z^cl} & Z^{cl} = (\overset{\circ}{Y}/(t_1), \text{trivial log})
 \end{array}$$

(Notation: For a log scheme X , $\overset{\circ}{X}$ denotes the underlying scheme of X and $X^{cl} = (\overset{\circ}{X}, \text{the trivial log str.})$)

We have $j^* Rf^! \Lambda = Ru^! \Lambda \cong \Lambda(d)[2d]$ (usual Poincaré duality).

We prove its adjoint $Rf^! \Lambda \xleftarrow{\mu} j_! \Lambda(d)[2d]$ is an isomorphism.

To see this, it suffices to show $Rz^! \mu$ is an isomorphism.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Consider } Rz^! j_! \Lambda(d)[2d] & \xleftarrow{\partial} & Rz^! z_* \Lambda(d)[2d-1] = \Lambda(d)[2d-1] \\
 \downarrow Rz^! \mu & & \downarrow \downarrow \\
 Rz^! Rf^! \Lambda & = & R\varepsilon^! Rz^{cl!} \Lambda \cong R\varepsilon^! \Lambda(d-1)[2d-2] \\
 & & \text{usual P.d. for } \overset{\circ}{Z}
 \end{array}$$

where ∂ is an isomorphism by (usual) relative purity and the right vertical arrow is an isomorphism induced by a Galois theory on the constant log scheme Z :

$$\left\{ \text{Module on } Z_{\text{et}}^{\log} \right\} \approx \left\{ \text{Module on } \overset{\circ}{Z}_{\text{et}} \text{ on which } \hat{\mathbb{Z}}(1) = \varprojlim_{(m, \text{ch } k)=1} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1) \text{ acts continuously} \right\}$$

この図式の可換性の証明は難しいが、実は formal duality を利用した論法があって可換性を示すことなしに、 μ の同型をいうことができる。

Thm 1(b) is reduced to (a). Thm 2 is formally induced from Thm 1 and purity for log smooth families over d.v.r.

5. An application of Thm 1(a).

Prop. Let Δ be a finite simplicial fan of dim. r and let k be a field. Let n be an integer prime to $\text{ch}(k)$ and to N_Δ (an integer determined by Δ).

Then $R(X_\Delta \rightarrow k)^! \wedge \cong \wedge(r)[2r]$ on $(X_\Delta)_{\text{et}}$.

$$\wedge = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

the toric variety associated to Δ

(Note that this statement concerns the usual étale cohomology (not log).)

文献について: log scheme の基本的なことについては 論文集 Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins University Press, 1989 の中の K. Kato の論文 (pp. 191-224) をはじめ、いくつかの文献が出版されている。しかし 3-5 の内容が書かれた文献は今の所 (1995年4月現在) preprint の段階である。