

Wittenのゲージ場方程式の解空間の構造について

東工大 理 鈴木 範男 (Norio Suzuki)

§ 0. 序

以下、特に断らない限り形式的巾級数の範疇で考える。

flatな複素8次元空間における $GL(n, \mathbb{C})$ -ゲージ場 ∇ に対し、

$$\begin{aligned} (0.1) \quad [\nabla_{y_\mu}, \nabla_{y_\nu}] &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [\nabla_{y_\alpha}, \nabla_{y_\beta}] \\ [\nabla_{z_\mu}, \nabla_{z_\nu}] &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [\nabla_{z_\alpha}, \nabla_{z_\beta}] \\ [\nabla_{y_\mu}, \nabla_{z_\nu}] &= 0 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \end{aligned}$$

なる方程式を考える。ここで $(y, z) = (y_0, y_1, y_2, y_3, z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^8$,

$\nabla_{y_\mu} = \partial_{y_\mu} + A_{y_\mu}$ は y_μ 方向の共変微分であり、ポテンシャル A_{y_μ} , A_{z_μ} 達がここでの未知函数である。($A_{y_\mu} = A_{y_\mu}(y, z)$ は $gl(n, \mathbb{C})$

に値を採る y, z の形式的巾級数、 $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ は $\varepsilon_{0123} = 1$ なる完全反対称テンソル。尚、Einsteinの規約により総和記号は省略してある。以下同様。) 今、 $x = \frac{1}{2}(y+z)$, $w = \frac{1}{2}(y-z)$ とおくと

$$(0.2) \quad [\nabla_{x_\mu}, [\nabla_{x_\mu}, \nabla_{x_\nu}]] = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3)$$

が (0.1) から従う。 $\mathbb{C}^8$ の4次元部分空間 $w=0$ で考えればこれは所謂 Yang-Mills 方程式に他ならない。即ち、Wittenの方程式(0.1)

を満たす 8次元ゲージ場を 4次元部分空間 $W=0$ に制限すれば、Yang-Mills 場が得られる。しかもこの対応はゲージ変換の自由度を除き単射的である。即ち、

命題 1 (0.1) を満たすふたつの 8次元ゲージ場 $\nabla, \tilde{\nabla}$ が、 $W=0$ 上のゲージ場としてゲージ同値ならば、8次元ゲージ場としてゲージ同値。■

(但し、ゲージ同値とは、ゲージ変換で互いに移り合える事。ゲージ変換とは、 $M_n(\mathbb{C})$ に値を持つ g , g の中級数 $g=g(y, z)$ で可逆なものに対し、ゲージ場 ∇ を $g^{-1}\nabla g$ に移す事である。)

従って、Witten の方程式 (0.1) は Yang-Mills 方程式 (0.2) の解の或るクラスを定義する方程式と見做し得る。このクラスは、所謂 自己双対場全体、反自己双対場全体を真に含む。(命題 6 ~ 9, 定理 3, 及び § 4 参照)

我々は、この Witten の方程式を佐藤理論の枠組で扱う事を試みる。即ち、(0.1) を或る線型微分方程式系の可積分条件と見做し、それを経由して、無限次元グラスマン多様体に値を持つ関数の満たすべき微分方程式に書き直す。そこで、高崎氏の自己双対 Yang-Mills 方程式に関する仕事 ([6], [7]) 同様、或る種の初期値問題を考えると、その時間発展は指数関数で記述される。(定理 2)

我々の場合が、KP-hierarchyや自己双対Yang-Mills方程式の場合と異なる点は、線型化方程式(1.3)が、所謂スペクトル・パラメーターを2個含む点である。 $(\lambda_1 \text{ と } \lambda_2)$ このため、自己双対Yang-Mills方程式の場合、初期値問題は任意の初期データに関し可解であったのに対し、我々の場合は、初期データの満たすべき微分方程式が現われる。(命題5の(2.4)乃至(2.5))この事は、スペクトル・パラメーターが高次元の場合に共通の現象であるらしく思われる。(例えば、R.S. Ward [8] の提案した高次元可積分ゲージ場方程式の場合:[5]参照)

Wittenの方程式の解の中で、(仮)自己双対Yang-Mills場に対応するものを特徴づける事は、Wittenの方程式の由来からしても重要である。我々の立場からは、これを初期データの空間の中で特徴づける事が問題となる。結果としてWittenの方程式の解の初期データの特徴づける方程式に類似のものが得られる。(命題9)これを用いて、例えば、自己双対でも反自己双対でもないYang-Mills場に対応するWitten方程式の有理解等も構成することが出来る。(§4)

§1. 線型化

$$\text{変数変換: } \begin{cases} \eta_1 = y_0 + iy_1, \zeta_1 = y_2 - iz_3, \eta_2 = z_0 + iz_1, \zeta_2 = z_2 - iz_3 \\ \bar{\eta}_1 = y_0 - iy_1, \bar{\zeta}_1 = y_2 + iz_3, \bar{\eta}_2 = z_0 - iz_1, \bar{\zeta}_2 = z_2 + iz_3 \end{cases}$$

(但し、 $(y, z) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4$ なので、 $\bar{\eta}_i$ 等は η_i 等の複素共役ではない

い) をすると. (0.1) は

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & [-\lambda_1 \nabla_{\eta_1} + \nabla_{\bar{\zeta}_1}, \lambda_1 \nabla_{\zeta_1} + \nabla_{\bar{\eta}_1}] = 0, \\
 & [-\lambda_2 \nabla_{\eta_2} + \nabla_{\bar{\zeta}_2}, \lambda_2 \nabla_{\zeta_2} + \nabla_{\bar{\eta}_2}] = 0, \\
 & [-\lambda_1 \nabla_{\eta_1} + \nabla_{\bar{\zeta}_1}, -\lambda_2 \nabla_{\eta_2} + \nabla_{\bar{\zeta}_2}] = [-\lambda_1 \nabla_{\eta_1} + \nabla_{\bar{\zeta}_1}, \lambda_2 \nabla_{\bar{\zeta}_2} + \nabla_{\bar{\eta}_2}] = 0, \\
 & [\lambda_1 \nabla_{\zeta_1} + \nabla_{\bar{\eta}_1}, -\lambda_2 \nabla_{\eta_2} + \nabla_{\bar{\zeta}_2}] = [\lambda_1 \nabla_{\zeta_1} + \nabla_{\bar{\eta}_1}, \lambda_2 \nabla_{\bar{\zeta}_2} + \nabla_{\bar{\eta}_2}] = 0 \\
 & (\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C})
 \end{aligned}$$

と書き直される。(1.1) から特に, $\nabla_{\eta_1}, \nabla_{\zeta_1}, \nabla_{\eta_2}, \nabla_{\bar{\zeta}_2}$ が互いに可換なる事が従うから, (1.1) を満たすゲージ場 ∇ に対し,

$g^{-1} \nabla_{\eta_1} g = \partial_{\eta_1}, g^{-1} \nabla_{\zeta_1} g = \partial_{\zeta_1}, g^{-1} \nabla_{\eta_2} g = \partial_{\eta_2}, g^{-1} \nabla_{\bar{\zeta}_2} g = \partial_{\bar{\zeta}_2}$ なるゲージ変換 $\nabla \mapsto g^{-1} \nabla g$ が存在する。従って最初から $A_{\eta_1} = A_{\zeta_1} = A_{\eta_2} = A_{\bar{\zeta}_2} = 0$ の場合。即ち

$$\begin{aligned}
 (1.2) \quad & [-\lambda_1 \partial_{\eta_1} + \nabla_{\bar{\zeta}_1}, \lambda_1 \partial_{\zeta_1} + \nabla_{\bar{\eta}_1}] = 0, \\
 & [-\lambda_2 \partial_{\eta_2} + \nabla_{\bar{\zeta}_2}, \lambda_2 \partial_{\bar{\zeta}_2} + \nabla_{\bar{\eta}_2}] = 0, \\
 & [-\lambda_1 \partial_{\eta_1} + \nabla_{\bar{\zeta}_1}, -\lambda_2 \partial_{\eta_2} + \nabla_{\bar{\zeta}_2}] = [-\lambda_1 \partial_{\eta_1} + \nabla_{\bar{\zeta}_1}, \lambda_2 \partial_{\bar{\zeta}_2} + \nabla_{\bar{\eta}_2}] = 0, \\
 & [\lambda_1 \partial_{\zeta_1} + \nabla_{\bar{\eta}_1}, -\lambda_2 \partial_{\eta_2} + \nabla_{\bar{\zeta}_2}] = [\lambda_1 \partial_{\zeta_1} + \nabla_{\bar{\eta}_1}, \lambda_2 \partial_{\bar{\zeta}_2} + \nabla_{\bar{\eta}_2}] = 0 \\
 & (\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C})
 \end{aligned}$$

を扱う事にする。(未知関数は $\nabla_{\bar{\zeta}_1} = \partial_{\bar{\zeta}_1} + A_{\bar{\zeta}_1}$ 等のゲージポテンシアル $A_{\bar{\zeta}_1} = A_{\bar{\zeta}_1}(\eta_1, \zeta_1, \dots, \bar{\zeta}_2) \in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1, \zeta_1, \dots, \bar{\zeta}_2]]$ 等である。)

(1.2) は, $-\lambda_1 \partial_{\eta_1} + \nabla_{\bar{\zeta}_1}, \lambda_1 \partial_{\zeta_1} + \nabla_{\bar{\eta}_1}, -\lambda_2 \partial_{\eta_2} + \nabla_{\bar{\zeta}_2}, \lambda_2 \partial_{\bar{\zeta}_2} + \nabla_{\bar{\eta}_2}$ が互いに可換. という条件だから. $\psi(\lambda)$ に関する線型微分方

各式

$$\begin{aligned}
 (1.3) \quad & (-\lambda_1 \partial_{\eta_1} + \partial_{\bar{\zeta}_1} + A_{\bar{\zeta}_1}) \psi(\lambda) = 0, \\
 & (\lambda_1 \partial_{\zeta_1} + \partial_{\bar{\eta}_1} + A_{\bar{\eta}_1}) \psi(\lambda) = 0, \\
 & (-\lambda_2 \partial_{\eta_2} + \partial_{\bar{\zeta}_2} + A_{\bar{\zeta}_2}) \psi(\lambda) = 0, \\
 & (\lambda_2 \partial_{\bar{\zeta}_2} + \partial_{\bar{\eta}_2} + A_{\bar{\eta}_2}) \psi(\lambda) = 0
 \end{aligned}$$

の可積分条件に他ならない。即ち。

命題2 $A_{\bar{\zeta}_1}, A_{\bar{\eta}_1}, A_{\zeta_2}, A_{\bar{\eta}_2} \in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1, \zeta_1, \dots, \bar{\zeta}_2]]$ が
 (1.2) の解である $\Leftrightarrow$ (1.3) の解 $\psi(\lambda) = \sum_{i,j \geq 0} \psi_{ij} \lambda_1^{-i} \lambda_2^{-j}$ ($\psi_{ij} \in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1, \zeta_1, \dots, \bar{\zeta}_2]]$) で $\psi_{00} = 1$ なるものが存在する。

$\Leftrightarrow \psi_{ij} \in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1, \zeta_1, \dots, \bar{\zeta}_2]]$ が存在して、($i, j \in \mathbb{Z}$)

$\psi_{00} = 1, \psi_{ij} = 0$ if $i < 0$ or $j < 0$, か

$$\begin{aligned}
 (1.4) \quad & -\partial_{\eta_1} \psi_{i+1,j} + (\partial_{\bar{\zeta}_1} + A_{\bar{\zeta}_1}) \psi_{ij} = 0, \\
 & \partial_{\zeta_1} \psi_{i+1,j} + (\partial_{\bar{\eta}_1} + A_{\bar{\eta}_1}) \psi_{ij} = 0, \\
 & -\partial_{\eta_2} \psi_{i,j+1} + (\partial_{\bar{\zeta}_2} + A_{\bar{\zeta}_2}) \psi_{ij} = 0, \\
 & \partial_{\bar{\zeta}_2} \psi_{i,j+1} + (\partial_{\bar{\eta}_2} + A_{\bar{\eta}_2}) \psi_{ij} = 0 \quad (i, j \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

を満たす。■

(1.4) で特に $i = j = 0$ とすると

$$(1.5) \quad -\partial_{\eta_1} \psi_{10} + A_{\bar{\zeta}_1} = 0, \quad \partial_{\zeta_1} \psi_{10} + A_{\bar{\eta}_1} = 0, \quad -\partial_{\eta_2} \psi_{01} + A_{\bar{\zeta}_2} = 0, \quad \partial_{\bar{\zeta}_2} \psi_{01} + A_{\bar{\eta}_2} = 0.$$

従って、2 Witten の方程式 (1.2) を解くには (1.5) を (1.4) に代入した非

線型微分方程式

$$\begin{aligned}
(1.6) \quad & -\partial_{\eta_1} \psi_{i+1,j} + \partial_{\bar{\eta}_1} \psi_{ij} + (\partial_{\eta_1} \psi_{10}) \psi_{ij} = 0, \\
& \partial_{\xi_1} \psi_{i+1,j} + \partial_{\bar{\eta}_1} \psi_{ij} - (\partial_{\xi_1} \psi_{10}) \psi_{ij} = 0, \\
& -\partial_{\eta_2} \psi_{i,j+1} + \partial_{\xi_2} \psi_{ij} + (\partial_{\eta_2} \psi_{01}) \psi_{ij} = 0, \\
& \partial_{\bar{\xi}_2} \psi_{i,j+1} + \partial_{\bar{\eta}_2} \psi_{ij} - (\partial_{\bar{\xi}_2} \psi_{01}) \psi_{ij} = 0 \quad (i, j \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

を解けばよい。正確に言えば、

命題 3 関係式 (1.5) により、次の (i) と (ii) が 1 対 1 に対応す

る: (i) (1.2) の解 $A = (A_{\bar{\xi}_1}, A_{\bar{\eta}_1}, A_{\xi_2}, A_{\bar{\eta}_2})$

(ii) (1.6) の解 $\psi(\lambda) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \psi_{ij} \lambda_1^{-i} \lambda_2^{-j}$ ($\psi_{00} = 1$) の次を満たす $\varphi(\lambda)$
 $= \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \varphi_{ij} \lambda_1^{-i} \lambda_2^{-j}$ を右から掛ける変換を法とする同値類:

$\varphi_{ij} \in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1, \xi_1, \dots, \bar{\xi}_2]]$, $\varphi_{00} = 1$, か

$$(-\lambda_1 \partial_{\eta_1} + \partial_{\xi_1}) \varphi(\lambda) = (\lambda_1 \partial_{\xi_1} + \partial_{\eta_1}) \varphi(\lambda) = (-\lambda_2 \partial_{\eta_2} + \partial_{\bar{\xi}_2}) \varphi(\lambda) = (\lambda_2 \partial_{\bar{\xi}_2} + \partial_{\eta_2}) \varphi(\lambda) = 0$$

2. 無限次元グラスマン多様体上の運動

$Z = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $N^c = Z \setminus N$ とする。 ($\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$) R を単位元を持つ環とする時、 $\psi(\lambda) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \psi_{ij} \lambda_1^{-i} \lambda_2^{-j}$
 $\in R[[\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}]]$ s.t. $\psi_{00} = 1$ に対し、 $\xi = (\xi_{kl}^{ij})_{(i,j) \in Z, (k,l) \in N^c}$
 なる無限サイズの行列を $(\psi_{i-k, j-l}^*)_{(i,j) \in Z, (k,l) \in N^c}$ と
 $(\psi_{i-k, j-l})_{(i,j) \in N^c, (k,l) \in N^c}$ の積、即ち $\xi_{kl}^{ij} = \sum_{(g,h) \in N^c} \psi_{i-g, j-h}^* \psi_{g-k, h-l}$
 で定義する。ここで ψ_{ij}^* とは、 $\psi(\lambda)^{-1} = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \psi_{ij}^* \lambda_1^{-i} \lambda_2^{-j}$ の係数である。
 例によ、 $i < 0$ 又は $j < 0$ の時は $\psi_{ij}^* = \psi_{ij} = 0$ と解釈するの
 で ξ_{kl}^{ij} の定義は実質的有限和で well-defined。更にこの時、

$\Lambda_1 = (\delta_k^{i+1} \delta_l^j)_{(i,j) \in \mathbb{Z}, (k,l) \in \mathbb{Z}}, \Lambda_2 = (\delta_k^i \delta_l^{j+1})_{(i,j) \in \mathbb{Z}, (k,l) \in \mathbb{Z}}$
 (但し δ_k^i は Kronecker の δ (1.4) とおく). $\Lambda_1 \xi = \xi C_1, \Lambda_2 \xi = \xi C_2$

$$C_1 = (\xi_{k,l}^{i+1,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^c, (k,l) \in \mathbb{N}^c}, C_2 = (\xi_{k,l}^{i,j+1})_{(i,j) \in \mathbb{N}^c, (k,l) \in \mathbb{N}^c}$$

また $\xi_{k,l}^{i,j} = \begin{cases} \delta_k^i \delta_l^j & (i,j) \in \mathbb{N}^c \\ 0 & i < k \text{ or } j < l \\ * & \text{otherwise} \end{cases}$ が成り立つ。大切な事は。

これらが、上の様にして得られる枠 ξ の特徴づけになる、という
 ことである：

命題 4 $\xi = (\psi_{i-k, j-l}^*)_{(i,j) \in \mathbb{Z}, (k,l) \in \mathbb{N}^c} \cdot (\psi_{i-k, j-l})_{(i,j) \in \mathbb{N}^c, (k,l) \in \mathbb{N}^c}$
 により、次の (i) と (ii) が 1 対 1 に対応する：

(i) $\psi(\lambda) \in R[[\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}]]$ s.t. $\psi_{0,0} = 1$

(ii) $\xi = (\xi_{k,l}^{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{Z}, (k,l) \in \mathbb{N}^c}, \xi_{k,l}^{i,j} \in R$ を満たすもの：

(2.1.A) $\xi_{k,l}^{i,j} = \delta_k^i \delta_l^j \quad (i,j) \in \mathbb{N}^c$

(2.1.B) $\xi_{k,l}^{i,j} = 0 \quad i < k \geq 0 \text{ or } j < l \geq 0$

(2.1.C) $\Lambda_1 \xi = \xi C_1, \Lambda_2 \xi = \xi C_2$ for $\exists C_1, C_2 : \mathbb{N}^c \times \mathbb{N}^c$ -行列

逆対応 $\xi \mapsto \psi(\lambda)$ は $\psi_{i,j} = -\xi_{-i,-j}^{0,0}$ で与えられる。■

定理 1 $R = M_n(\mathbb{C})[[\eta_1, \zeta_1, \dots, \eta_2, \bar{\zeta}_2]]$ とする時、命題 4 の対応
 $\psi(\lambda) \leftrightarrow \xi$ により (1.6) は次と同値：

(2.2) $(-\Lambda_1 \partial_{\eta_1} + \partial_{\bar{\zeta}_1}) \xi = \xi A_1,$

$(\Lambda_1 \partial_{\zeta_1} + \partial_{\eta_1}) \xi = \xi B_1,$ for $\exists A_1, B_1, A_2, B_2 : \mathbb{N}^c \times \mathbb{N}^c$ -行列

$(-\Lambda_2 \partial_{\eta_2} + \partial_{\bar{\zeta}_2}) \xi = \xi A_2,$

$(\Lambda_2 \partial_{\zeta_2} + \partial_{\eta_2}) \xi = \xi B_2$

ここで A_1, B_1, A_2, B_2 は存在すれば ξ に対し一意的であらう。

(2.2) は次の様に書き下される：

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad & -\partial_{\eta_1} \xi_{k\ell}^{ihj} + \partial_{\xi_1} \xi_{k\ell}^{ij} = -\sum_{h \geq 0} \xi_{i+h}^{ij} \partial_{\eta_1} \xi_{k\ell}^{oh} \\
 & \partial_{\xi_1} \xi_{k\ell}^{ihj} + \partial_{\eta_1} \xi_{k\ell}^{ij} = \sum_{h \geq 0} \xi_{i+h}^{ij} \partial_{\xi_1} \xi_{k\ell}^{oh} \\
 & -\partial_{\eta_2} \xi_{k\ell}^{ijh} + \partial_{\xi_2} \xi_{k\ell}^{ij} = -\sum_{g \geq 0} \xi_{j+g}^{ij} \partial_{\eta_2} \xi_{k\ell}^{ig} \\
 & \partial_{\xi_2} \xi_{k\ell}^{ijh} + \partial_{\eta_2} \xi_{k\ell}^{ij} = \sum_{g \geq 0} \xi_{j+g}^{ij} \partial_{\xi_2} \xi_{k\ell}^{ig}
 \end{aligned}$$

我々は(1.6)乃至(2.1) & (2.2) の解空間の構造を調べるために高崎[4], [7]の自己双対Yang-Millsの場合同様、 $\xi_1 = \eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0$ なる部分空間を初期空間とする初期値問題を考える。我々の場合、この初期値問題が任意の初期データに対し可解、ではない点がある。実際、例えば(1.6)において $i = -1$ とすれば、 $-\partial_{\eta_1} \psi_{0j} = 0, \partial_{\xi_1} \psi_{0j} = 0$ が従う。これらは時間変数 $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ に関する微分を含まない、時間発展に関係ない方程式であり、初期データは少なくともこれらの微分方程式を満たしていなければならない。一般の i, j に対する ψ_{ij} に関しても、例えば $-\partial_{\eta_1} \psi_{ij} + \partial_{\xi_1} \psi_{0j} + (\partial_{\eta_1} \psi_{i0}) \cdot \psi_{0j} = 0$ の両辺を ∂_{η_1} で微分すれば、 $\partial_{\eta_1} \psi_{0j} = 0$ を用いて $\partial_{\eta_1}^2 (-\psi_{ij} + \psi_{i0} \cdot \psi_{0j}) = 0$ を得る様に、順々に同様の関係式が得られる。実はこれらは ξ の言葉で書くと導出も記述も容易である：

命題5 (2.1) & (2.2) から次が従う：

$$(2.4) \quad k \geq 0, p+q > i-k \Rightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\xi_1}^q \xi_{k,l}^{ij} = 0 \quad (p, q \in \mathbb{N}, (i, j) \in \mathbb{Z}, (k, l) \in \mathbb{N}^c)$$

$$l \geq 0, p+q > j-l \Rightarrow \partial_{\eta_2}^p \partial_{\xi_2}^q \xi_{k,l}^{ij} = 0 \quad (p, q \in \mathbb{N}, (i, j) \in \mathbb{Z}, (k, l) \in \mathbb{N}^c)$$

尚. これらは (2.1) の仮定の下. 次と同値:

$$(2.5) \quad p+q = i+1 \Rightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\xi_1}^q \xi_{0,l}^{i0} = \partial_{\eta_1}^p \partial_{\xi_1}^q \left(- \sum_{g=0}^i \psi_{i-g,0}^* \psi_{g,-l} \right) = 0$$

$$p+q = j+1 \Rightarrow \partial_{\eta_2}^p \partial_{\xi_2}^q \xi_{k,0}^{0j} = \partial_{\eta_2}^p \partial_{\xi_2}^q \left(- \sum_{h=0}^j \psi_{0,j-h}^* \psi_{-k,h} \right) = 0 \quad \blacksquare$$

逆に (2.4) (又は (2.5)) を満たす任意の初期データに対し. 初期値問題は可解である事がわかる:

定理 2 (2.1) と (2.4) (又は (2.5)) を満たす任意の $\xi^{(0)} = (\xi_{k,l}^{(0),ij})_{(i,j) \in \mathbb{Z}, (k,l) \in \mathbb{N}^c}$ $\xi_{k,l}^{(0),ij} \in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1, \xi_1, \eta_2, \xi_2]]$ に対し. $\xi|_{\xi_1=\eta_1=\xi_2=\eta_2=0} = \xi^{(0)}$ 及び (2.1) (2.2) を満たす $\xi = (\xi_{k,l}^{ij})_{(i,j) \in \mathbb{Z}, (k,l) \in \mathbb{N}^c}$, $\xi_{k,l}^{ij} \in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1, \xi_1, \eta_2, \xi_2, \bar{\eta}_1, \bar{\xi}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\xi}_2]]$ が一意的に存在し. 次の公式で与えられる:

$$\tilde{\xi} = \exp(\xi_1 \wedge \partial_{\eta_1} - \bar{\eta}_1 \wedge \partial_{\xi_1} + \xi_2 \wedge \partial_{\eta_2} - \bar{\eta}_2 \wedge \partial_{\xi_2}) \xi^{(0)}$$

$$\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_{(-)} \\ \tilde{\xi}_{(+)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\xi}_{(-)} = (\tilde{\xi}_{k,l}^{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}^c, (k,l) \in \mathbb{N}^c}, \quad \tilde{\xi}_{(+)} = (\tilde{\xi}_{k,l}^{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N}, (k,l) \in \mathbb{N}^c}$$

$$\text{とする時. } \xi = \tilde{\xi} \cdot (\tilde{\xi}_{(-)})^{-1} \quad \blacksquare$$

定理 2 の意味する所は. (2.1.C) & (2.2) が枠の取りかえ $\xi \mapsto \xi P$ (P は各成分が $M_n(\mathbb{C})[[\eta_1, \dots, \bar{\eta}_2, \bar{\xi}_2]]$ に属する $\mathbb{N}^c \times \mathbb{N}^c$ -行列) で不変な方程式であることから. (2.1.A) の制限をはずして適当な枠に取りかえれば. (2.2) において $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 0$ とした定数係数線型微分方程式になるということである。

必ずしも (2.4) を満たさない。一般に初期データから出発して同じ $\lambda x p$ の時間発展をさせれば (2.1.C) & (2.2) を矢張り満たす。更に定理 2 同様、右から $(\tilde{\xi}_i)^{-1}$ を掛けて枠を標準化すれば (2.1.A) をも満たす。しかし、この場合、(2.1.B) は全く保証できない。(2.4) は丁度、この (2.1.B) が、時間発展で保存される事を保証する条件になっている。

かくして、(1.6) 乃至 (2.1) & (2.2) の解空間の構造は、部分空間 $\tilde{\xi}_1 = \tilde{\eta}_1 = \tilde{\xi}_2 = \tilde{\eta}_2 = 0$ における方程式 (2.5) 乃至 (2.4) の解空間の構造に帰着した。 $\psi(\lambda)$ が λ_1, λ_2 の有限級数の場合に (2.5) を具体的に解く事は或る程度可能だが、(2.4) 乃至 (2.5) を代数解析的に見通しよく解析する事は今後の課題である。

3. Yang-Mills 場との関係

$W=0$ 上の自己双対場 ∇ 。即ち共変微分 $\nabla_{x_\mu} = \partial_{x_\mu} + A_{x_\mu}(x)$ で

$$(3.1) \quad [\nabla_{x_\mu}, \nabla_{x_\nu}] = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [\nabla_{x_\alpha}, \nabla_{x_\beta}] \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

を満たすものに対し、 y, z -空間上のゲージ場 $\tilde{\nabla}$ を

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tilde{\nabla}_{y_\mu} &= \partial_{y_\mu} + \tilde{A}_{y_\mu}, & \tilde{A}_{y_\mu} &= A_{x_\mu}(y) \\ \tilde{\nabla}_{z_\mu} &= \partial_{z_\mu} + \tilde{A}_{z_\mu}, & \tilde{A}_{z_\mu} &= 0 \end{aligned}$$

で定義すれば

$$(3.3) \quad \begin{aligned} [\tilde{\nabla}_{y_\mu}, \tilde{\nabla}_{y_\nu}] &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [\tilde{\nabla}_{y_\alpha}, \tilde{\nabla}_{y_\beta}] \\ [\tilde{\nabla}_{z_\mu}, \tilde{\nabla}_{z_\nu}] &= 0 \\ [\tilde{\nabla}_{y_\mu}, \tilde{\nabla}_{z_\nu}] &= 0 \end{aligned} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

解, また特に Witten 方程式 (0.1) の解でもある. しかも $\tilde{\nabla}_{x_\mu} = \partial_{x_\mu} + \tilde{A}_{x_\mu}$, $\tilde{A}_{x_\mu} = \tilde{A}_{y_\mu} + \tilde{A}_{z_\mu} = A_{x_\mu}(y) = A_{x_\mu}(x+w)$ だから $\tilde{\nabla}_{x_\mu}|_{w=0} = \nabla_{x_\mu}$ ($\mu=0,1,2,3$). つまり, 任意の自己双対場は, Witten の方程式 (0.1) を $w=0$ に制限して得られる様な Yang-Mills 場のクラスに含まれる. (3.3) はゲージ不変だから命題 1 からして, 自己双対場に対応する (0.1) の解はすべて (3.3) を満たす事があるが, 逆に (3.3) を満たす任意のゲージ場は, ゲージ変換により $\tilde{A}_{z_\mu} = 0$ ($\mu=0,1,2,3$) とし得る. $0 = [\partial_{z_\nu}, \tilde{\nabla}_{y_\mu}] = \frac{\partial \tilde{A}_{y_\mu}}{\partial z_\nu}$ 即ち $\tilde{A}_{y_\mu} = \tilde{A}_{y_\mu}(y)$ だから $A_{x_\mu} = \tilde{A}_{y_\mu}(x)$ と定義すれば, $\nabla_{x_\mu} = \tilde{\nabla}_{x_\mu}|_{w=0}$ は $w=0$ 上の自己双対場である.

命題 6 Witten の方程式 (0.1) の解を $w=0$ に制限した時,

$$\text{自己双対場に対応} \Leftrightarrow [\nabla_{z_\mu}, \nabla_{z_\nu}] = 0 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

$$\text{反自己双対場に対応} \Leftrightarrow [\nabla_{y_\mu}, \nabla_{y_\nu}] = 0 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

任意の(反)自己双対場は, この仕方と得られる. ■

$[-\lambda_2 \partial_{\eta_2} + \nabla_{\xi_2}, \lambda_2 \partial_{\bar{\xi}_2} + \nabla_{\bar{\eta}_2}] = 0$ の仮定の下, $\partial_{\eta_2}, \nabla_{\xi_2}, \nabla_{\bar{\eta}_2}, \partial_{\bar{\xi}_2}$ が互いに可換 $\Leftrightarrow [\partial_{\eta_2}, \nabla_{\bar{\eta}_2}] = [\partial_{\eta_2}, \nabla_{\xi_2}] = [\partial_{\bar{\xi}_2}, \nabla_{\eta_2}] = 0$. (1.5) を代入すれば, これは更に $\partial_{\eta_2} \partial_{\bar{\xi}_2} \psi_{01} = \partial_{\eta_2}^2 \psi_{01} = \partial_{\bar{\xi}_2}^2 \psi_{01} = 0$ と同値.

命題 7 (1.6) の解 $\psi(\lambda)$ が

$$\text{自己双対場に対応} \Leftrightarrow \partial_{\eta_2}^2 \psi_{01} = \partial_{\eta_2} \partial_{\bar{\xi}_2} \psi_{01} = \partial_{\bar{\xi}_2}^2 \psi_{01} = 0$$

$$\text{反自己双対場に対応} \Leftrightarrow \partial_{\eta_1}^2 \psi_{10} = \partial_{\eta_1} \partial_{\xi_1} \psi_{10} = \partial_{\xi_1}^2 \psi_{10} = 0$$

||

命題 8 ([3]の Prop. 6 の訂正) (2.1) & (2.2) の解 ξ が

$$\text{自己双対場に対応する} \iff \partial_{\eta_1}^2 \xi_{0-1}^{00} = \partial_{\eta_2} \partial_{\xi_2} \xi_{0-1}^{00} = \partial_{\xi_2}^2 \xi_{0-1}^{00} = 0$$

$$\text{反自己双対場に対応する} \iff \partial_{\eta_1}^2 \xi_{-10}^{00} = \partial_{\eta_1} \partial_{\xi_1} \xi_{-10}^{00} = \partial_{\xi_1}^2 \xi_{-10}^{00} = 0$$

すべての (反)自己双対場はこの仕方を得られる。■

但し、注意すべき事は、上の条件だけでは時間発展で安定でないということである。つまり、初期空間 $\bar{\xi}_1 = \bar{\eta}_1 = \bar{\xi}_2 = \bar{\eta}_2 = 0$ において、例えば ψ_{0i} が η_2 と ξ_2 の高々 1 次の式であつても、初期空間の外で同じ条件を満たすとは限らない。実際、例えば $-\partial_{\eta_1} \psi_{11} + \partial_{\xi_1} \psi_{01} + (\partial_{\eta_1} \psi_{10}) \psi_{01} = 0$ において、両辺を $\partial_{\eta_2}^2$ で微分すれば、自己双対場に対応する場合、 $\partial_{\eta_2}^2 \psi_{01} = 0$ から $\partial_{\eta_1} \partial_{\eta_2}^2 (-\psi_{11} + \psi_{10} \psi_{01}) = 0$ が出る。同様に、(1.6) との両立性から、一般の i, j に対する ψ_{ij} が初期空間において満たすべき微分方程式が順に求まる。この場合も、導出・記述ともとの言葉が有利である：

命題 9 (反)自己双対場に対応する (2.1) & (2.2) の解に対し

$$(3.4) \quad p+q \geq i-k, k \geq 0, r+s > j-l \Rightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\xi_1}^q \partial_{\eta_2}^r \partial_{\xi_2}^s \xi_{kl}^{ij} = 0$$

$$(p+q > i-k, r+s \geq j-l, l \geq 0 \Rightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\xi_1}^q \partial_{\eta_2}^r \partial_{\xi_2}^s \xi_{kl}^{ij} = 0)$$

これは (2.1) の条件下、次と同値

$$(3.5) \quad p+q \geq i, r+s > -l \Rightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\xi_1}^q \partial_{\eta_2}^r \partial_{\xi_2}^s \xi_{0l}^{i0} = 0$$

$$(p+q > -k, r+s \geq j \Rightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\xi_1}^q \partial_{\eta_2}^r \partial_{\xi_2}^s \xi_{k0}^{0j} = 0) \quad \blacksquare$$

定理3 (2.1) & (2.2) の解 ξ に対し. $\xi^{(0)} = \xi|_{\bar{s}_1=\bar{r}_1=\bar{s}_2=\bar{r}_2=0}$ とおく時. ξ が (反)自己双対場に対応するための必要十分条件は. $\xi^{(0)}$ が (3.4) 乃至 (3.5) を満たすことである。

§ 4. 例

命題10 命題4の対応 $\psi(\lambda) \leftrightarrow \xi$, それぞれの初期値を $\psi^{(0)}(\lambda) \leftrightarrow \xi^{(0)}$ とする. ($\psi(\lambda)|_{\bar{s}_1=\bar{r}_1=\bar{s}_2=\bar{r}_2=0} = \psi^{(0)}(\lambda)$, $\xi|_{\bar{s}_1=\bar{r}_1=\bar{s}_2=\bar{r}_2=0} = \xi^{(0)}$) $\psi(\lambda)$ が (1.6) の解の時. 任意の $p, q \in \mathbb{N}$ に対し 次は同値:

- (i) $i > p$ または $j > q \Rightarrow \psi_{ij}^{(0)} = 0$
- (ii) $i > p$ または $j > q \Rightarrow \psi_{ij} = 0$
- (iii) $k < -p$ または $l < -q \Rightarrow \xi_{kl}^{(0)} = 0 \quad ((i, j) \in \mathbb{Z})$
- (iv) $k < -p$ または $l < -q \Rightarrow \xi_{kl}^{(0)} = 0 \quad ((i, j) \in \mathbb{Z})$ ■

従, $\psi^{(0)}(\lambda)$ が λ_1, λ_2 の有限級数になる様な初期値から出発すれば, 解 $\psi(\lambda)$ も λ_1, λ_2 の有限級数として得られる。そこで今, $\psi(\lambda) = 1 + \psi_{10}\lambda_1^{-1} + \psi_{01}\lambda_2^{-1}$ の場合を考える。 $\xi_{0l}^{(0)} = \sum_{q=0}^l \psi_{i-q,0}^* \psi_{q,-l}$
 $= \begin{cases} -\psi_{i0}^* \psi_{01} & (i \geq 0, l = -1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$ $\xi_{kl}^{(0)} = -\sum_{h=0}^j \psi_{0,j-h}^* \psi_{-k,h} = \begin{cases} -\psi_{0j}^* \psi_{10} & (j \geq 0, k = -1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$
 $\psi_{i0}^* = (-\psi_{10})^i, \psi_{0j}^* = (-\psi_{01})^j \quad (i, j \geq 0)$ となる。初期値 $\psi^{(0)}(\lambda) = 1 + \psi_{10}^{(0)}\lambda_1^{-1} + \psi_{01}^{(0)}\lambda_2^{-1}$ (に対応する条件 (2.5) は

$$p+q=i+1 \Rightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\bar{s}_1}^q (\psi_{10}^{(0)} \cdot \psi_{01}^{(0)}) = 0, \quad p+q=j+1 \Rightarrow \partial_{\eta_2}^p \partial_{\bar{s}_2}^q (\psi_{01}^{(0)} \cdot \psi_{10}^{(0)}) = 0$$

更にこの条件の下.

$$\begin{aligned} \text{自己双対場に対応} &\Leftrightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\xi_1}^{i-p} \psi_{10}^{(0)} \cdot \partial_{\eta_2}^r \partial_{\xi_2}^{2-r} \psi_{01}^{(0)} = 0 \quad (i \geq 0, p=0, \dots, i, r=0, 1, 2) \\ &\Leftrightarrow \partial_{\eta_2}^r \partial_{\xi_2}^{2-r} \psi_{01}^{(0)} = 0 \quad (r=0, 1, 2) \end{aligned}$$

$$\text{反自己双対場に対応} \Leftrightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\xi_1}^{2-p} \psi_{10}^{(0)} = 0 \quad (p=0, 1, 2)$$

$$\text{よって. 例えば } \psi_{10}^{(0)} = a\eta_1^2 + b\xi_1^2, \quad \psi_{01}^{(0)} = c\eta_2^2 + d\xi_2^2, \quad a, b, c, d \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\text{とすれば. } \left. \begin{array}{l} \text{自己双対場に対応} \\ \text{反自己双対場に対応} \end{array} \right\} \Leftrightarrow c = d = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = 0$$

$$\text{また. } \left\{ \begin{array}{l} A_{\xi_1}^{(0)} = \partial_{\eta_1} \psi_{10}^{(0)} = 2a\eta_1, \quad A_{\eta_1}^{(0)} = -\partial_{\xi_1} \psi_{10}^{(0)} = -2b\xi_1, \\ A_{\xi_2}^{(0)} = \partial_{\eta_2} \psi_{01}^{(0)} = 2c\eta_2, \quad A_{\eta_2}^{(0)} = -\partial_{\xi_2} \psi_{01}^{(0)} = -2d\xi_2 \end{array} \right.$$

なるで. $[a, b], [c, d] \neq 0$, $a, b, c, d \neq 0$ とすれば. 特に自己双対場にも反自己双対場にも対応せず. また abelian でもない. また. 更に $\psi_{10}^{(0)} \psi_{01}^{(0)} = \psi_{01}^{(0)} \psi_{10}^{(0)} = 0$ 即ち $ac = ca = ad = da = bc = cb = bd = db = 0$ ならば特に (2.5) を満たす.

この様な a, b, c, d の組としては. 例えば

$$a = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ & 1 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

がある. 一般に.

命題 11 命題 10 の場合に. 各 $\psi_{ij}^{(0)}$ 乃至各 $\xi_{ij}^{(0)}$ が有理函数ならば. 各 ψ_{ij} , 各 ξ_{ij} も有理函数. ■

が成り立つので. 上の例は有理解 (各 ψ_{ij}, ξ_{ij} が有理函数) である.

参考文献

- [1] Sato, M. : Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifold. 数理研講究金録 439, 30-46, (1981)
- [2] Sato, M. & Sato, Y. : Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold. Lecture Notes in Num. Appl. Anal. 5 259-271 (1982)
- [3] Suzuki, N. : Structure of the solution space of Witten's gauge-field equations. Proc. Japan Acad., 60 A, 141-144 (1984)
- [4] ——— : General solutions of Witten's gauge-field equations, Proc. Japan Acad. 60 A, 252-255 (1984)
- [5] ——— : Higher-dimensional gauge-field equations and the universal Grassmann manifold. in preparation.
- [6] Takasaki, K. : On the structure of solutions to the self-dual Yang-Mills equations. Proc. Japan Acad. 59 A, 418-421 (1983)
- [7] ——— : A new approach to the self-dual Yang-Mills equations. Commun. Math. Phys., 94, 35-59 (1984)
- [8] Ward, R. S. : Completely solvable gauge-field equations in dimension greater than four. Durham preprint (1983)
- [9] Witten, E. : An interpretation of classical Yang-Mills fields. Phys. Lett. 91 B, 394-398 (1978)