

退化放物型方程式の基本解とその応用

京大 数理解 岩崎 敷久
阪大 理学部 岩崎 千里

1. 序.

次の発展方程式の基本解について考える.

$$(1) \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} + p(x, D) \right] E(t) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ E(0) = I, \end{cases}$$

ここに, $p(x, D)$ は擬微分作用素 (P.S.-D.O.p) $\mathbb{R}^n$,

$$p \sim p_m + p_{m-1} + p_{m-2} + \dots$$

$$(p_j(x, \lambda \xi) = \lambda^j p_j(x, \xi) \quad \forall \lambda > 0)$$

なる展開をもつものとする.

今, $\frac{\partial}{\partial t} + p(x, D)$ が放物型, 即ち

$$(2) \quad p_m(x, \xi) > 0, \quad \xi \neq 0, \quad m > 1$$

とする. このとき, $p(x, D)$ は強楕円型であり, Garding の不等式

$$(3) \quad \operatorname{Re}(p(x, D)u, u) \geq \varepsilon \|u\|_{m/2}^2 - C \|u\|_0^2, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

及び, a priori estimate

$$(4) \quad \|u\|_{m+s}^2 \leq C_s (\|Pu\|_s^2 + \|u\|_s^2), \quad u \in \mathcal{S}(R^n).$$

を満たす. 従って適当な関数空間を考えれば, semi-groupの理論を使って基本解 $E(t)$ の存在が示される.

一方 (2) のもとで, symbol 計算によつて P_s -D-Op の parametrix: $\sigma(E(t)) \sim e^{-p_m(x, \xi)t} f(t, x, \xi)$

$$f = 1 + f_1 + f_2 + \dots \quad (f_j \in e^{-p_m t} S_{1,0}^{-j})$$

が構成できる. 従つて (3), (4) を使つた u を parameter とする P_s -D-Op として基本解 $E(t)$ を表現することもできる. [4].
そして放物型の特徴である $E(t) \in S^\infty(t>0)$ も従う. これを使うと Garding の不等式や a priori estimate が逆に示せる.

このことを作用素 P を少し一般化して考えてみる. 発展方程式がよい空間で解けないと困るので,

$$(5) \quad p_m(x, \xi) \geq 0, \quad m \geq 1$$

と仮定する. $p_m(x, \xi) = 0$ ($\xi \neq 0$) なる点があれば $P(x, D)$ はもはや楕円型でない. それに代るものとして $p(x, D)$ が準楕円型となる条件をはけるのが放物型の性質をある程度保つという意味で自然だと思われる. ここではそれらを退化放物型と呼ぶことにする.

これに関連した結果をあげる.

A. Melin [6] によると

$p(x, \xi)$ が (5) を満たしている. $\Rightarrow$ (6), (7) は同値

(6) $p(x, D)$ の subprincipal symbol $+\frac{1}{2}$ (positive trace of Fundamental matrix > 0 on $\Sigma = \{(x, \xi); p_m(x, \xi) = 0\}$)

(7) $\operatorname{Re} (P(x, D)u, u) \geq \varepsilon \|u\|_{(m-1)/2}^2 - C \|u\|^2$.
 $u \in C_0^\infty(K)$, K : compact set.

L. Hörmander [3] によると

$p(x, \xi)$ が (5), (6) を満たしている. $\Rightarrow$

(8) $\|u\|_{m-1+s}^2 \leq C_s (\|Pu\|_s^2 + \|u\|_s^2)$, $u \in C_0^\infty(K)$

$\Rightarrow$

(9) P : hypoelliptic.

が成立する. よって P に (5)(6) を仮定すると放物型の時と同じ様に (7), (9) と semi-group の理論より基本解の存在がわかる.

次の問題となるのは $E(t)$ のより詳しい性質である. (例えば P_s -D-Op になるか?) R. Beals [1] によると, P が (5), (8) を満たせば P の parametrix が P_s -D-Op がつくられる. 又, B. Helffer [2] は (7) と同じ論文の中の Beals の結果 ^(*) があれば, 基本解 $E(t)$ が $S_{1/2, 1/2}^0$ に入ることを注意した.

(*) $P \in S_{0, m}^0$ かつ $P: L^2 \rightarrow L^2$ isomorphism ならば $P^{-1} \in S^0$

しかし, symbol の形は不明である. 一方, A. Menikoff & J. Sjöstrand [7] では (5), (6) さらに p_m が $\Sigma = \{p_m = 0\}$ 上 exactly double 上 vanish, $t > 0$ Σ が symplectic manifold になるとき, $E(t)$ に対して $f \exp \varphi$ なる形の complex phase function をもつ Fourier Integral Operator として parametrix をつくり, それを使って $\text{Tr} E(t)$ ($t \rightarrow 0$) を計算した.

ここでは (5), (6) のもとで $E(t)$ は $t > 0$ で $S^{-\infty}$ なる P_s -D-Op があり, $f \exp \varphi$ (φ : real valued) なる形の symbol をもつ P_s -D-Op の parametrix を持つことを示す. ここでは, p, f は p の symbol 計算によって求められることに注意する. 系として (7), (8) の不等式が従う. A. Menikoff & J. Sjöstrand の結果で Σ が symplectic なる仮定もはぶくことができる.

2. 記号と仮定

以下では P_s -D-Op の symbol として Weyl symbol を使う. 即ち $a \in S_{\rho, \delta}^m$ に対して, 作用素 $a(x, D)$ を

$$a(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y) \cdot \xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi$$

と定義する.

記号の定義

σ : Canonical two form $= d\xi \wedge dx = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j$ on T^*R^n .

h : Hamilton vector field of p_m i.e. $\sigma'(u, h) = dp_m(u)$

F : Hamilton (Fundamental) matrix of p_m

i.e. $\sigma'(u, Fv) = d^2p_m(u, v)$

但し d^2p_m : Hesse matrix in $(x, \xi) \in T^*R^n$.

J_1 : $\sigma'(u, J_1 g) = g(u)$

注意: $h = J_1 dp_m$, $F = J_1 d^2p_m$ と書ける.

$b = ih$, $A = iF$ とおきこの記号を使うこととする

$\tilde{\text{Tr}} A = \sum_{i \in \mathcal{O}} \text{Re } \lambda_i$, 但し λ_i は A の固有値, $\mathcal{O} = \{i; \text{Re } \lambda_i > 0\}$
(positive trace of A) とする.

仮定 $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}$ ($m > 1$); $p_R(x, \lambda \xi) = \lambda^R p_R(x, \xi)$, $\lambda > 0$
 $\Sigma = \{X = (x, \xi); p_m(X) = 0\} \subset T^*R^n$

(i) $p_m(x, \xi) \geq 0$

(ii) $\exists c > 0$ $2 \text{Re } p_{m-1} + \tilde{\text{Tr}} A > c$ on $\Sigma \cap \{|\xi| = 1\}$

注意 ① Σ 上 λ は A の real eigenvalue のみをもつ.

② p_{m-1} は subprincipal symbol である.

3. 結果.

定理1. 仮定(i)(ii)のもと $z''(1)$ の基本解 $E(t)$ は $S_{k, k}$ symbol をもつ P_S -D-Op として構成できる. $t > 0$ かつ $E(t) \in S^{-\infty}$. さらに $E(t)$ は次の漸近形をもつ.

$E(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} f_j \exp \varphi$, $f_0 \equiv 1$, $f_j \exp \varphi \in S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}j}$ ($0 < \varepsilon < 1/6$).
ここで z'' . φ は次の様に決める. $\{\Sigma \text{ かつ } t=0\}$ の近傍 z'' は

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & -p_m t - p_{m-1} t - \sigma^1(b\sqrt{t/2}, F(At/2) b\sqrt{t/2}) \\ & - z^{-1} \operatorname{Tr}(\log [\cosh(At/2)]), \\ \text{但し } F(\lambda) = & (i\lambda)^{-1} (1 - \lambda^{-1} \tanh \lambda). \end{aligned}$$

それ以外 z'' は

$$\varphi_2 = -p_m t - \langle \xi \rangle^{m-1} t \text{ なるもの. すなわち,}$$

$\varphi = \psi_1 \varphi_1 + (1 - \psi_1) \varphi_2$ とする. 但し $\psi_1 = \psi^1 \psi^2$,
 $\psi^1 = \psi(p_m \langle \xi \rangle^{1-m-2\varepsilon})$, $\psi^2 = \psi(t \langle \xi \rangle^{m-1-\delta}) z''$, $0 < 1/2\delta < 1-6\varepsilon < 1$,
 $\psi(s)$ は $\psi \in C^\infty[0, \infty)$, $\psi = 1$ ($s \leq 1$), $\psi = 0$ ($s \geq 2$), $\psi' < 0$ ($1 < s < 2$)
とする.

$$\int_0^c E(t) dt \quad (c > 0) \text{ は } P \text{ に対する parametrix } z'' \text{ があるから } z''$$

の結果と得る.

系. (A. Melin & L. Hörmander)

$$\exists \lambda \text{ s.t. } \operatorname{Re}((P + \lambda)u, u) \geq 0, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

$$\|u\|_{m-1+s}^2 \leq C_s (\|Pu\|_s^2 + \|u\|_s^2), \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Example. R^{2n+l}_2 $p = \sum_{j=1}^k (D_{x_j}^2 + x_j^2 D_{y_j}^2) + \sum_{j=1}^l D_{z_j}^2$ を
考える. $E(t)$ の symbol は

$$\prod_{j=1}^k \{ \cosh |\eta_j| t \}^{-1} \exp \left\{ - \sum_{j=1}^k \left(\frac{\xi_j^2 + x_j^2 \eta_j^2}{|\eta_j|} \right) \tanh (|\eta_j| t) - \sum_{j=1}^l \xi_j^2 t \right\} \\ = \exp \mathcal{G}_1$$

と与えられる. $\Sigma = \{ \xi_j, x_j \eta_j = 0 \ (1 \leq j \leq k), \ S_i = 0, \ (1 \leq i \leq l) \}$
である.

p_m に対してさらに制限をおく.

仮定 (ii) p_m exactly double に Σ 上 vanish する.

i. e. $p_m(X) \geq c d(X, \Sigma)^2 \ (|X|=1, X=(x, \xi), c>0)$

$d(X, \Sigma)$ = distance of X to Σ in $R_x^n \times R_\xi^n \times S^{n-1}$

注意. この時 Σ は C^∞ -submanifold of $R_x^n \times R_\xi^n \setminus \{0\}$ となる.

定理 2. 仮定 (ii), (iii) のもとで ε ($0 < \varepsilon \leq 1$). $\mathcal{G}_1$ を次の $\mathcal{G}_3$
に代えた時, R^n a compact set 上で一様な漸近展開が成立す
る.

$$\mathcal{G}_3 = -p_{m+1}(a)t + i\sigma^1((a-x)_3 \tanh(A(a)t/2)(a-x)) \\ - 2^{-1} \text{Tr}(\log [\cosh(A(a)t/2)]),$$

但し a は nbd. of Σ から Σ への C^∞ -写像

$$|d(X, a(X)) - d(X, \Sigma)| \leq c d(X, \Sigma)^2$$

を満たすものとする。

4. 応用.

定理2を使うと, $\text{Tr} E(t)$ ($t \downarrow 0$) が計算できる. これに Karamata の Tauber 型定理を適用すると P の固有値の漸近分布が得られる.

M を n 次元 compact C^∞ -manifold, dM と Σ の $\pm$ の positive smooth density とする.

仮定. (iv) P : formally self-adjoint P_3 -D-Op in M .

$$\text{i.e.} \quad \int_M P u \bar{v} dM = \int_M u \bar{P} v dM, \quad u, v \in C^\infty(M).$$

補題 (i) $p_m(x, \xi)$ well defined on T^*M . これより仮定(i) (ii) が well defined.

(2) 仮定(i)のもとで, p_{m-1} , A は Σ 上 well defined. これより仮定(ii) が well defined.

(3) 仮定(iv)より p_m : real valued on T^*M , p_{m-1} : real valued on Σ .

(4) 仮定(iii)のもとで $\Sigma = \bigcup_{\text{disjoint}} \Sigma^j$, (Σ^j : connected component $j=1, \dots, l$) と分けると,
 Σ^j : closed conic submanifold $\subset T^*M$ である. 従って

$\text{codim } \Sigma^j = d_j$ とし、 $d = \text{codim } \Sigma \in d = \min_{1 \leq j \leq l} \{d_j\}$ と定義する。又、 $\Sigma^0 = \bigcup_{j: d_j = d} \Sigma^j$ とする。

定理 3. 仮定 (i), (ii), (iv) のもとで

(1) $P: D(P) = C^\infty(M)$ は $L^2(M, dM)$ 上の下に有界な essentially self-adjoint operator である。

(2) P は discrete eigenvalues のみを持つ。

さらに (iii) を仮定すると

(3) $N(\lambda) \in \lambda$ 又はそれより小さい n eigenvalues の数とする。 $\lambda \rightarrow \infty$ の時の漸近形は次で与えられる。

(a) $n - md/2 < 0$ のとき

$$N(\lambda) = \{C_1 + o(1)\} \lambda^{n/m}$$

(b) $n - md/2 = 0$ のとき

$$N(\lambda) = \{C_2 + o(1)\} \lambda^{n/m} \log \lambda$$

(c) $n - md/2 > 0$ のとき

$$N(\lambda) = \{C_3 + o(1)\} \lambda^{(n-d/2)/(m-1)},$$

但し

$$C_1 = (2\pi)^{-n} \Gamma(n/m + 1)^{-1} \int_{T^*M} e^{-p_m} dx d\xi$$

$$C_2 = 2^{-n} \pi^{d/2 - n/m - 1} \Gamma(n/m + 1)^{-1} \\ \times \int_{\Sigma^0} (p_{m-1} + \frac{1}{2} \tilde{T}_n A) e^{-(p_{m-1} + \frac{1}{2} \tilde{T}_n A)} d\Sigma^0$$

$$C_3 = 2^{-n} \pi^{d/2-n} \Gamma((n-d/2)/(m-1) + 1)^{-1} \\ \times \int_{\Sigma^0} \bar{\phi}^{p_{m-1}} \left\{ \det \left[\left(\frac{A}{2} \right)^T \sinh \left(\frac{A}{2} \right) \right] \right\}^{1/2} d\Sigma^0.$$

注意. (1) $dx d\xi$ は $d\xi \wedge dx$ から induce される T^*M の density.

(2) $d\Sigma^0$ は $p_m \circ dx d\xi$ による induced density on Σ^0 .

i.e. $(u, v) \in \Sigma^0 = \{u=0\}$ (locally) なる local coordinate とするとき $d\Sigma^0 = \left\{ \det (H_{uu}/2) \right\}^{1/2} \bar{\phi} dv$ で定義する. 但し, $\bar{\phi} du dv = dx d\xi$, H_{uu} は 変数 u に関する Hesse matrix of p_m .

注意. $n - md/2 = 0$ の場合は $p_{m-1} + \frac{1}{2} \text{tr} A$ は, 正值 z'' ξ に Γ として homogeneous order $m-1$ の関数なら何におきかえ z もよい. 即ち, C_2 は $p_{m-1} + \frac{1}{2} \text{tr} A$ には independent z'' $d\Sigma^0$ のみによる.

5. 証明について.

Weyl symbol に対しては $a_i \in S_{p_i, \delta_i}^{m_i}$ ($i=1, 2$),

$p_i > \delta_{3-i}$ とするとき P_3 -D-Op の積 $a_1(x, D) a_2(x, D) = (a_1 a_2)(x, D)$ は

$$a_1 \circ a_2 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (2i)^{-k} (k!)^{-1} \sigma_k(a_1, a_2) \quad \text{mod } S^{-\infty}$$

なる symbol 展開をもつ. $\sigma_k(a_1, a_2) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} \frac{k!}{\alpha! \beta!} (-1)^{|\beta|} \partial_{\xi}^{\beta} \partial_x^{\alpha} a_1 \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} a_2$.

注意 $\sigma_1(a_1, a_2) = \{a_1, a_2\}$ (Poisson bracket) 2" σ_k はその extension 2" ある.

今 $\exp \varphi$ が $S_{k, 1/2}^0$ に属するとして

$(\frac{\partial}{\partial t} + p) \circ \exp \varphi$ を展開すると次を得る.

$$\begin{aligned} & \sim \frac{\partial}{\partial t} \exp \varphi + \sum_{k=0}^{\infty} (2i)^k (k!)^{-1} \sigma_k(p, \exp \varphi) \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \exp \varphi + \sum_{k=0}^2 (2i)^k (k!)^{-1} \sigma_k(p_m, \exp \varphi) \\ & \quad + p_{m-1} \exp \varphi + S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{m-1-1/2} \\ & = g \exp \varphi \end{aligned}$$

$g \exp \varphi \in S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{m-1-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) となる様に φ を求める. 実際 φ はこれと満たしている. 特= φ_1 は $\Sigma \cap \{t=0\}$ の近傍 2" 次の方程式を近似的に満たしている.

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \sum_{k=0}^2 (2i)^k (k!)^{-1} \sigma_k(p_m, \exp \varphi_1) \exp(-\varphi_1) + p_{m-1} = 0 \\ \varphi_1|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

φ_1 の求め方は (10) の微分した方程式を考え, $\varphi, d\varphi, d^2\varphi$ とそれぞれ独立な関数として近似的に解く. 2回微分すると, $X = iJd^2\varphi$ の近似式

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} + A - \frac{1}{4}AX^2 = 0 \\ X|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

を得る. この解は $X = -2 \tanh(At/2)$ である.

φ_i が求まれば, 次の形の Transport equation (11) を近似的に順次といて, $f = 1 + f_1 + f_2 + \dots$ を求める.

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^2 (z_i^\nu (V_i)^\nu) \{ \sigma_\nu(p_m, f \exp \varphi_1) - \sigma_\nu(p_m, \exp \varphi_1) f \} \\ x \exp(-\varphi_1) = h \\ f|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

このようにして φ , f_j は決まるが, φ の中に現われる $\tanh(At/2)$, $F(At/2)$ 等の well defined なることや $f_j \exp \varphi$ が $S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{-\varepsilon}$ に属することと示すのには, 詳しい議論が必要である.

parametrix が求まれば, $E_N(t) = \sum_{j=0}^N f_j \exp \varphi$, $G_N(t) = (\frac{d}{dt} + P) E_N(t)$ とおくと, 基本解 $E(t)$ は

$$E(t) + \int_0^t E(t-s) G_N(s) ds = E_N(t, s)$$

なる P_s -D-Op の Volterra 型積分方程式と満たす. これと解くと $E(t)$ が P_s -D-Op であることがわかる.

文 献

- [1] R. Beals : Characterization of pseudodifferential operators and applications. *Duke Math. J.*, 44, 45-57 (1977).
- [2] B. Helffer : Quelques exemples d'opérateurs pseudo-différentiels localement résolubles. Lecture note in Math., 660. Springer.
- [3] L. Hörmander : A class of hypoelliptic pseudodifferential operators with double characteristics. *Math. Ann.*, 217, 165-188 (1975).
- [4] C. Iwasaki : The fundamental solution for pseudo-differential operators of parabolic type, *Osaka J. Math.*, 14, 569-592 (1977).
- [5] C. Iwasaki & N. Iwasaki : Parametrix for a degenerate parabolic equations *Proc. Japan Acad.*, 55, 237-240 (1979).
- [6] A. Melin : Lower bounds for pseudo-differential operators. *Ark. Mat.*, 9, 117-140 (1971).
- [7] A. Menikoff & J. Sjöstrand : On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators. *Math. Ann.*, 235, 55-85 (1978).