

$$\text{差分方程式 } y(x+1) = y(x) + 1 + \frac{\lambda}{y(x)}$$

の有理型解 について

千葉大 理 柳原=郎

1. 序 論

1.-1. 一般的性質

T. Kimura [1] は, 解析函数の iteration に関連して, 7.1 のような差分方程式を考察した:

$$(1.1) \quad y(x+1) = y(x) + 1 + \frac{\lambda_1}{y(x)} + \frac{\lambda_2}{y(x)^2} + \dots$$

== 7.1 $\frac{\lambda_1}{z} + \frac{\lambda_2}{z^2} + \dots$ は, $|z|$ が大のとき収束するものと

する. この方程式の解を global に研究するための準備的な

研究として, T. Kimura [2] はその最も簡単な場合

$$(E) \quad y(x+1) = y(x) + 1 + \frac{\lambda}{y(x)}$$

について調べ, 7.1 の結果を得た:

1°) (E) は, $y(x) \equiv -\lambda$ なる trivial な解をもつが, それ

以外にも有理型な解が存在し, それらはすべて超越的で,

$\lambda \neq 1$ ならば任意の値をとる。 $\lambda = 1$ ならば -1 以外の任意の値をとる [2, p. 80, 定理 3.2]。したがってとくに

正則な解は, *trivial* な解 $y(x) \equiv -\lambda$ に限る。

2°) $y(x)$ を (E) の有理型な解とする。 x_0 が $y(x)$ の極ならば, $x_0 + m$, $m=1, 2, \dots$ も極である。また, x_1 が $y(x)$ の零点ならば, $x_1 + 1$ は $y(x)$ の極である。

さらに Takano [3] はつぎのことを証明した:

3°) (E) の有理型な解 (*trivial* でない) は *hypertranscendental* である。すなわち, 代数的な微分方程式の解とはならない。

1.-2. Kimura による解

$\varepsilon > 0$ と $R > 0$ とにし

$$(1.2) \quad D_\varepsilon(R, \varepsilon) = \{x; |x| > R, |\arg x - \pi| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\} \cup \\ \cup \{Im(xe^{-i\varepsilon}) > R\} \cup \{Im(xe^{i\varepsilon}) < -R\}$$

とおく。複素数 c と $\varepsilon > 0$ とを任意に与えるとき, $R > 0$ がきまつて,

$D_\varepsilon(R, \varepsilon)$ で正則で,かつ $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \rightarrow \infty$ のとき

$$(1.3) \quad \phi(x, c) \sim x \left(1 + \sum_{j+k \geq 1} p_{j,k} x^{-j} (x^{-1} \log x)^k \right), \quad p_{j,0} = c,$$

をみたす有理型な解 $\phi(x, c)$ が存在する [2, p. 81]。 = のとき

$$4^\circ) \quad \phi(x, c) = \phi(x+c, 0) \quad [2, p. 82].$$

[2] の諸結果から容易に下記のことがわかる:

$$5^{\circ}) \quad D = \{x; |x| > R, \operatorname{Re}(x) < 0\} \cup \{x; |I_m(x)| > R\}$$

とおくと, $\phi'(x, c)$ は D で有界で, $\frac{\phi(x, c)}{x} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty)$.

これから用いると

定理 1. $\phi(x, c)$ の Nevanlinna の位数 $= \infty$.

この応用として

定理 2. c と λ とで与まる直線 $\{I_m(x) = \eta_0\}$ が存在

して下記の性質をみたす: $\Pi_\delta = \{|I_m(x) - \eta_0| < \delta\}$ とおくと

(i) $\lambda \neq 1$ ならば $\phi(x, c)$ は, 任意の $\delta > 0$ に対して

Π_δ 内ですべての値を無限回とる. かくかくいえば, 任意の値 a ($|a| \leq \infty$) に対して, Π_δ 内に $\phi(x, c) = a$ の根を $x_n(a, \delta)$ とおくと, 任意の $\delta > 0$ に対して

$$(1.4) \quad \sum |x_n(a, \delta)|^{-\delta} = \infty.$$

(ii) $\lambda = 1$ ならば, $a \neq -1$ に対して (1.4) が成り立つ.

証明には, 帯状領域における Nevanlinna 第 2 基本定理

(それは, M. Tsuji [4, P. 272] による角領域での第 2 基本定理と全く同様にして得られる) を用いる.

定理 2 にいう直線 $\{I_m(x) = \eta_0\}$ は, 多分 1 本であるように

思われるが, よくわからない.

1-3. $|1 - \frac{1}{\lambda}| > 1$ のとき.

$1 - \frac{1}{\lambda} = e^a$ とおくと, $\operatorname{Re}(a) > 0$. $-\pi < I_m(a) \leq \pi$ と

してよい。このとき、上記の Kimura の解 $\phi(x, c)$ のほかに、 γ のような有理型な解 $S(x, c')$ (c' は任意の複素数) がある: $\varepsilon > 0$ を任意に与えるとき、 $c' = \varepsilon$ とする。ある $R > 0$ あり、 $S(x, c')$ は

$$N(a, \varepsilon, R) = \{x; |x| > R, |\arg(ax) - \pi| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\}$$

において正則で、 $\varepsilon = \pi$ のとき

$$(1.5) \quad S(x) \sim -\lambda + \sum_{j=1}^{\infty} p_j e^{j\alpha x}, \quad p_1 = c'$$

なる漸近展開をもつものがある。証明は

$$Q_N(x) = \sum_{j=1}^{N-1} p_j e^{j\alpha x},$$

$$W_N(x) = Q_N(x-1) - Q_N(x) + Q_N(x-1)/(-\lambda + Q_N(x-1))$$

とおき、函数族 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F} = \{f_N(x); f_N(x) \text{ は } N(a, \varepsilon, R_N) \text{ で正則で、} \varepsilon = \pi,$$

$$|f_N(x)| \leq K_N |e^{N\alpha x}| \text{ を満たす}\}$$

とする。ここで K_N, R_N は適当な正数である。

$f_N(x) \in \mathcal{F}$ に對して

$$(Tf_N)(x) = f_N(x-1) + \frac{-\lambda f_N(x-1)}{(Q_N(x-1) + f_N(x-1) - \lambda)(Q_N(x-1) - \lambda) + W_N(x)}$$

と定義すると、 R_N, K_N が適当ならば T は $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}$ の中への写像となり、不動点定理を適用して、解 $S(x, c')$ の存在がわかる。

$S(x, c')$ の性質として

6°) $c' = 0$ ならば $p_1 = 0$ ならば $k = 0$, $k \geq 2$.
 しなかつて, *trivial* な解 $y(x) \equiv -\lambda$ は $S(x, 0)$ である.

$$7^\circ) \quad S(x, c') = S(x + \frac{1}{a} \log c', 1) \quad (c' \neq 0)$$

$$8^\circ) \quad S(x + \frac{2\pi i}{a}, c') = S(x, c'). \quad \text{しなかつて}$$

$S(x, c')$ は e^{-ax} の函数として $S(x, c') = \gamma(e^{-ax})$

とかける. $\gamma(z)$ は $0 < |z| \leq \infty$ で有理型で,
 $z = 0$ で真性特異点をもつ.

1-4. その他の解の表示

4°), 7°) により, ある c, c' に対して $\phi(x, c),$
 $S(x, c')$ ばかりかたは他の c_1, c'_1 に対しての $\phi(x, c_1),$
 $S(x, c'_1)$ もわかる = と なる. しなかつて以下, 單に
 $\phi(x), S(x)$ とかりて任意に指定した $c = p_1, c' =$
 $= p_1 (\neq 0)$ をもつ解をあらわすものとしておく.

$\pi(x)$ を周期1の整函数とする. $\phi(x + \pi(x)), S(x + \pi(x))$
 もまたやはり解となることは明らかである. それ以外に解は
 ないであろうか? $\Rightarrow$ 示そうとするのはつぎの定理である.

定理3. (i) $|1 - \frac{1}{\lambda}| > 1$ のとき, (E) の任意の有理型な解

$y(x)$ は

$$(1.6) \quad y(x) = \phi(x + \pi(x))$$

とかけるか, または

$$(1.7) \quad y(x) = S(x + \frac{1}{a} \log \pi(x))$$

とかける. $\pi(x)$ は周期1の整函数である.

(ii) $|1 - \frac{1}{\lambda}| < 1$ のときには, (E) の有理型な解はすべて (1.6) の形にかける.

(1.7) $\pi(x) \equiv 0$ とし π の *trivial* 解 $y(x) \equiv -\lambda$ である. ($|1 - \frac{1}{\lambda}| = 1$ の場合はまた異なる.)

これを少し言いなおしておく. つぎの記号を用いる:

$$L(\eta_0; K) = \{x = \xi + i\eta_0; -\infty < \xi \leq K\},$$

$$Q_\delta = Q_\delta(\eta_0; c) = \{x = \xi + i\eta_0; c \leq \xi \leq c+2, |\eta - \eta_0| \leq \delta\}$$

$$S_\delta(\eta_0) = \{x = \xi + i\eta; -\infty < \xi < \infty, |\eta - \eta_0| < \delta\},$$

$$H(\eta_0, \delta; K) = \{x = \xi + i\eta; -\infty < \xi \leq K, |\eta - \eta_0| \leq \delta\}.$$

いま $y(x)$ は (E) のある有理型な解とする.

$$(1.8) \quad \begin{cases} X = \{\eta; \text{ある定数 } K(\eta) \text{ に対し, } y(x) \text{ は} \\ L(\eta, K(\eta)) \text{ 上に極をもたない} \end{cases}$$

とおく. このとき明らかに, つぎの2つのうちのどちらか1方が成り立つ:

$$(1.9) \quad \text{ある } \eta_0 \in X \text{ に対し } \lim_{\xi \rightarrow -\infty} |y(\xi + i\eta_0)| = \infty.$$

$$(1.10) \quad \text{任意の } \eta_0 \in X \text{ に対し } \lim_{\xi \rightarrow -\infty} |y(\xi + i\eta_0)| < \infty.$$

すなわち明らかに, 定理3 はつぎの定理4-6 に含まれる.

定理4. $y(x)$ が条件 (1.9) をみたすならば, $y(x)$ は (1.6) の形にかける.

定理5. $|1 - \frac{1}{\lambda}| > 1$ とし, $y(x)$ は条件 (1.10) を満たすとする, $y(x)$ は (1.7) の形にかける.

定理6. $|1 - \frac{1}{\lambda}| < 1$ ならば, (E) の *trivial* でない解は (1.10) を満たさない.

さらに n と高次の方程式

$$(E_n) \quad y(x+1) = y(x) + 1 + \frac{\lambda_1}{y(x)} + \dots + \frac{\lambda_n}{y(x)^n}$$

も考えよう. このとき

$$t^n + \lambda_1 t^{n-1} + \dots + \lambda_n = P(t) \quad \text{とおく}$$

μ を $P(t) = 0$ の単根ならば, 上記の -1 の代わりに μ をとり, 対応する λ とおける. 重根については事情がやや複雑である.

2. 定理4の証明.

2-1. いくつかの補題

補題 2.1. $\phi(z)$ は (1.3) にいう解とする. $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$ とす

る. $h > \max(\sqrt{2}R, 1)$ を十分大にとれば

$$(2.1) \quad |\phi'(z) - 1| < 1/2 \quad \text{in } D_h(R, \varepsilon; h)$$

$$(2.2) \quad |\phi(z)/2 - 1| < 1/6 \quad \text{in } D_h(R, \varepsilon; h),$$

$$(2.3) \quad w = \phi(z) \text{ は } D_h(R, \varepsilon; h) \text{ において } \operatorname{Re}(w)$$

$< -4h$ なる位置の値をとる,

(2.4) $\phi(z)$ は $D_2(R, \varepsilon; \ell)$ で単葉である,
 $(D_2(R, \varepsilon; \ell) = D_2(R, \varepsilon) \cap \{|z| > \ell\})$.

(証明は容易.)

補題 2.2. ([1, p. 222, 定理 9.1])

$$(2.5) \quad F(z) = z + 1 + \frac{\lambda}{z}$$

と置き,

$$(2.5') \quad z_n = F^n(z)$$

と置く. z と z , $n=1, 2, \dots$ に対し

$$(2.6) \quad z_n = z + n + h_n(z) + g_n(z)$$

とする. $z = \tau$.

$$(2.7) \quad h_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda / (z + j)$$

であって, $z \in D'(\varepsilon, T) = \{z; \operatorname{Re}(z) > 0, -z \in D_2(T, \varepsilon)\}$

のときある定数 M に対して (M は n によらない)

$$(2.8) \quad |g_n(z)| \leq M \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|h_{j+1}(z)| + 1}{|z + j|^2}$$

が成り立つ. $z = \tau$. T は十分大の正数である.

これからさらに

補題 2.3. $y(x)$ は有理型解とし, $\eta_0 \in X$ とすると, ある $K(\eta_0)$ がある.

$$\xi \leq K(\eta_0) \text{ のとき } \operatorname{Re}[y(\xi + i\eta_0)] < T' = T + 1$$

が成り立つ (T は補題 2.2 にいう正数).

さらに

補題 2.4 $\eta_0 \in X$ とし, $\gamma(x)$ は $L(\eta_0; N)$ (N は整数) 上に極をもたないとする。このとき $K = K(\eta_0)$ と $\sigma = \sigma(\eta_0)$ とあって, $\gamma(x)$ は $H(\eta_0, \sigma; K)$ において正則でかつ $\operatorname{Re}[\gamma(x)] < T' = T + 1$ (T は補題 2.2 にいう数)。

補題 2.5 $\gamma(x)$ は条件 (1.9) をみたすとする。このときある $\xi_n \downarrow -\infty$ に対して $\operatorname{Re}[\gamma(\xi_n + i\eta_0)] \rightarrow -\infty$ となる。

補題 2.6 $\gamma(x)$ は条件 (1.9) をみたすとする。このときある $\xi_n \downarrow -\infty$ に対し, $\operatorname{Re}[\gamma(\xi_n + x)] \rightarrow -\infty$ かつ, $H(\eta_0, \sigma; K)$ の各 compact 集合上一様に成り立つ。

補題 2.7 $\gamma(x)$ は条件 (1.9) をみたすとする。このときある正数 δ と, $S_\delta(\eta_0)$ で正則な函数 $\pi_\delta(x)$ ($\pi_\delta(x+1) = \pi_\delta(x)$) があって,

$$(2.9) \quad \gamma(x) = \phi(x + \pi_\delta(x))$$

かつ $x \in S_\delta(\eta_0)$ のとき成り立つ。

2-2. 定理 4 の証明

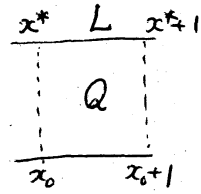
$$\delta^* = \sup \{ \delta ; \delta \text{ は (2.9) が成り立つ正数} \}$$

とおく。 $\delta^* < \infty$ と仮定して矛盾を導く。 $\eta^* = \eta_0 + \delta^*$

とし, $x^* = \xi_0 + i\eta^*$ とし, x^* も $x^* + 1$ も $\gamma(x)$ の極でない

ようにとり, $x_0 = \xi_0 + i\eta_0$ とおき, Q を 4 点 $x_0, x_0 + 1,$

x_{*+1}^*, x_*^* を頂点とする 4 角形で, L はその辺 $\overline{x_*^* (x_{*+1}^*)}$ とする. $\pi_{j*}^*(x)$ なる $S_{j*}^*(\eta_0)$ で正則な函数があつて, (2.9) が成り立つ. $\pi_{j*}^*(x)$ を $\pi^*(x)$ とかくことにする.



$x' \in L$ をとる. いま $\{x_n\} \subset Q$, $x_n \rightarrow x'$ あつてその上で $\pi^*(x_n)$ が有界とする. h を補題 2.1 にいう数とし, N を十分大なる正整数とすると

$$x_n - N + \pi^*(x_n) \in D_2(R, \varepsilon; 2h), \quad n=1, 2, \dots$$

すると $\gamma(x_n - N) = \phi(x_n - N + \pi^*(x_n))$ は $n \rightarrow \infty$ のとき有界で, したがつて $x' - N$ は $\gamma(x)$ の極ではなから. $\phi(z)$ は $D_2(R, \varepsilon; h)$ で正則単葉であるから, $\pi^*(x)$ は $x' - N$ まで, したがつて x' まで, 解析的に接続される.

それゆゑ

$$E = \{x'' \in L; \pi^*(x) \text{ が } x'' \text{ まで接続されない}\}$$

とおくと, x が Q 内から $\rightarrow x''$ のとき $\pi^*(x) \rightarrow \infty$ とならねばならない. よつて *Lusin-Privalov* の定理 [4, p. 320, 定理 VIII. 28] により $\text{meas}(E) = 0$.

E は明らかに閉集合であるから, $\pi^*(x)$ は $L - E$ の各開区間を越えて接続される. $I = \{x = \xi + i\eta^*; \xi_1 < \xi < \xi_2\}$ はそのような区間の 1 つとする. ある $\delta_1 > 0$ をとつて, $\pi^*(x)$ は $H = \{\xi + i\eta; \xi_3 < \xi < \xi_4, |\eta - \eta^*| < \delta_1\} (\xi_1 < \xi_3 < \xi_4 < \xi_2)$

が正則となる。 N を十分大な自然数とすれば $\gamma(x-N) = \phi(x-N+\pi^*(x))$ が H で成り立ち、これは H で正則である。

$x^0 = \xi^0 + i\eta^0 \in H$ ($\eta^* < \eta^0 < \eta^* + \delta_1$) をとり。 $\gamma(x)$ はある K^0 に対し $L(\eta^0; K^0)$ 上で極をもたないとしてよい。
 $\{N_m\}$ を自然数列で $N_m \uparrow \infty$ なものとすると $\gamma(x^0 - N_m) = \phi(x^0 - N_m + \pi^*(x^0 - N_m))$ は $m \rightarrow \infty$ のとき有界でない。それゆえ $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} |\gamma(\xi + i\eta^0)| = \infty$ で、 η_0 の代りに η^0 について論ずれば、補題 2.7 によってある $\delta^0 > 0$ があって $\gamma(x) = \phi(x + \pi^0(x))$ が $J_{\delta^0}(\eta^0)$ で成り立つ。 N を十分大にして $x - N + \pi^*(x)$ と $x - N + \pi^0(x)$ とがどちらも $x \in H$ のとき実部が -4δ より小なようにすれば、
 $\gamma(x-N) = \phi(x-N+\pi^*(x)) = \phi(x-N+\pi^0(x))$ で ϕ がそこで単葉であるから $\pi^*(x) = \pi^0(x)$ 。すなわち $\pi^0(x)$ は $\pi^*(x)$ の解接続と与えられる、必要ならばこれをくり返すことにより $\delta^0 = \eta^0 - \eta^*$ としてよい。したがって E のある近傍 U があって、 $\pi^*(x)$ は $U-E$ で 1 価正則となる。

$\pi^*(x)$ が E の真に真性特異点をもつとすると、 E は $N_{\mathbb{C}}$ 集合 ($\text{meas}(E) = 0$ ゆえ) だからその任意の近傍にたかたか 2 個以外の値をすべてとる。とすると $\gamma(x) = \phi(x + \pi^*(x))$ が E の近傍で成り立っているから、これは $\gamma(x)$ が E 上で

も有理型という $\gamma = z$ に矛盾する (N_{∞} 集合に γ については [5], [6] をみよ。)

さうして, E の点は $\pi^*(x)$ に對し, 左から右極であるに
あてなう。もし $\pi^*(x)$ が $x'' \in E$ で極をもてば, $\gamma(x)$
 $= \phi(x + \pi^*(x))$ は x'' で真性特異点をもつ $= z \in N_{\infty}$, $\gamma(x)$
 が有理型という $\gamma = z$ に矛盾する。

よって $E = (\emptyset)$ で, $\pi^*(x)$ は L 全体を越えて接続
された。 $\pi^*(x+1) = \pi^*(x)$ であるから $\pi^*(x)$ は $I_m(x) = \eta^*$
 全体を越えて接続された。同様に $I_m(x) = \eta_0 - \delta^*$ を越えて
 接続され, よって $\gamma(x)$ はある $\delta^* > 0$ に對し, (2.9)
 のようにあらわされ, γ は δ^* が $\sup$ という $\gamma = z$ に矛盾
 する。

以上により, $\delta^* = \infty$ となる場合があるが, $\gamma(x)$ は (1.6)
 の形にあらわされることになる。 証明 終。

3. 定理 5 の証明

3-1. いくつかの補題

$S(x)$ は $\psi(e^{-ax})$ とかかれ, $\gamma(z)$ は $0 < |z| \leq \infty$ で正則
 かつ $z=0$ で真性特異点をもつ γ であることに注意する。

補題 3.1. $\gamma(z)$ は $|z| > R$ (R は十分大) で單葉である。

補題 3.2. σ は十分小のとき, $\gamma(z)$ は, $0 < |w+\lambda| < \sigma$

をみれば任意の w を, $|z| > 4R$ においてとる。

補題 3.3. $\gamma(x)$ が極 $\{x_n^0\}$, $x_n^0 = \xi_n^0 + i\eta_0$, $\xi_n^0 \downarrow -\infty$ をもつとする。任意の $\delta > 0$ に対し $\delta = \delta(\eta_0, \rho) > 0$ と $K = K(\eta_0, \delta)$ とおいて

$$(3.1) \quad \begin{cases} H_\delta(\eta_0, \delta; K) = \{x = \xi + i\eta; \xi \leq K, |\eta - \eta_0| < \delta, \\ |x - x_n^0| \geq \delta, n=1, 2, \dots\} \\ \text{において } \gamma(x) \text{ は正則で, } \operatorname{Re}[\gamma(x)] < T' \\ (T' \text{ は補題 2.3 にいう数}) \end{cases}$$

この補題により, 任意の η_0 と $d > 0$ と $\delta > 0$ とに対し $K = K(\eta_0, d, \delta)$ とおいて,

$$(3.2) \quad \begin{cases} H_\delta(\eta_0, d; K) = \{x = \xi + i\eta; \xi \leq K, |\eta - \eta_0| < \delta, \\ |x - x_n| \geq \delta, n=1, 2, \dots\} \\ \text{において } \gamma(x) \text{ は正則でかつ } \operatorname{Re}[\gamma(x)] < T' \\ (\{x_n\} \text{ は } \gamma(x) \text{ の極の全部}) \end{cases}$$

が成り立つことがわかる。また

(3.3) $x \in H_\delta(\eta_0, d; K)$ ならば $x-1 \in H_\delta(\eta_0, d; K)$ なること, および, x が $\gamma(x)$ の極から少くも δ 以上の距離にあつてかつ $|\operatorname{Im}(x) - \eta_0| < d$ なること

(3.4) ある自然数 m に対し $x-m \in H_\delta(\eta_0, d; K)$ なること, に注意しておく。

補題 3.4. $y(x)$ は条件 (1.10) をみたすとする。このとき、自然数の列 $\{m_k\}$, $m_k \uparrow \infty$ があって

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} H' \text{ (} |x| < \infty \text{ から } y(x) \text{ の 極を除いたもの)} \\ \text{の任意の compact 部分集合上で一様に} \\ y(x - m_k) \rightarrow -\lambda \text{ が成り立つ。} \end{array} \right.$$

証明. $\{\exp[y(x - m)]\}_{m=1}^{\infty}$ は $H_0(\gamma_0, d, K)$ において正規族をなす ((3.2) による). よって, 広義一様収束する部分列がとれる. $d_n \uparrow \infty$, $s_n \downarrow 0$ をとり, 各 n に対してやはり部分列をとる. 二重に (3.4) のため, 正規族をなすための数 K は d_n, s_n によらずに一定にとれることに注意する. 二重に δ 対角線論法により任意の $\delta > 0$, $d > 0$, および K に対し, しかたして H' の任意の compact 集合上で一様に収束する部分列がとれる. その極限函数を $Y(x)$ とすると, $Y(x)$ は $y(x)$ の極を除いては正則であるが, 極の近傍でも $\operatorname{Re}[Y(x)] \leq T'$ 故から, $Y(x)$ は δ 二重に正則で, しかたして ($Y(x)$ はやはり解になっているから) 最終に述べたようにそれは trivial な解となることはない: $Y(x) \equiv -\lambda$. これは (3.5) が成り立つことを示している.

3-2. 定理 5 の証明

$R > 0$ と $\sigma > 0$ とを, 補題 3.1 と 3.2 にいう数とする. 補題 3.4 により, 数 c と $\delta (> 0)$ とがあって

$$(3.6) \quad |y(x) + \lambda| < \sigma \quad \text{for } x \in Q_\delta(\eta_0; c)$$

が成り立つ。 $\Rightarrow$ η_0 と 1 とは, $y(\xi + i\eta_0) \neq -\lambda$ なる
 ξ にとつておく。容易にわかるように, δ を十分小さく

$$(3.6') \quad 0 < |y(x) + \lambda| < \sigma \quad x \in Q_\delta(\eta_0; c)$$

とある。 ($y(x_0) = -\lambda$ ならば $y(x_0+1) = -\lambda$, $\eta_0 = 0$ による。)

$x \in Q_\delta(\eta_0; c)$ に対し, $\psi(t) = y(x)$ とみたす $|t| > R$
 が一意的に定まる (補題 3.1 と 3.2 による)。よって
 $t = \psi^{-1}[y(x)]$ は $Q_\delta(\eta_0; c)$ 上の正則関数である。

$$(3.7) \quad z = -\frac{1}{a} \log(\psi^{-1}[y(x)]) \quad , \text{ i.e., } s(z) = y(x)$$

$$(3.7') \quad \kappa_\delta(x) = -\frac{1}{a} \log(\psi^{-1}[y(x)]) - x$$

と置く。 $\kappa_\delta(x)$ は $Q_\delta(\eta_0; c)$ において正則であり, $x \in Q_\delta$,
 $c \leq \operatorname{Re} x \leq c+1$, のとき (3.7) から

$$y(x+1) = y(x) + 1 + \lambda/y(x) = s(z) + 1 + \lambda/s(z) = s(z+1)$$

とわかる。 $\psi(t)$ の単葉性により

$$(3.8) \quad \kappa_\delta(x+1) = \kappa_\delta(x) + 2k\pi i/a$$

を得る。 $\Rightarrow$ k は整数で, 明らかに $x \in Q_\delta(\eta_0; c)$ によ
 らない。 $\Rightarrow$ $\kappa_\delta(x)$ は $S_\delta(\eta_0)$ 全体に周期性 (3.8)
 によって接続される。

$$(3.8') \quad \kappa_\delta(x) = \frac{1}{a} \log \pi_\delta(x)$$

と置く。 $\kappa_\delta(x)$ は $S_\delta(\eta_0)$ 上の正則関数であるから $\pi_\delta(x)$ は $\neq 0$
 となるから, 正則関数かつ

$$(3.8'') \quad \pi_\delta(x+1) = \pi_\delta(x) \quad x \in J_\delta(\eta_0)$$

をみたす。さうして、ある $\delta > 0$ と $J_\delta(\eta_0)$ 上正則な π_δ とかある。

$$(3.9) \quad \begin{aligned} y(x) &= S(x + \frac{1}{a} \log \pi_\delta(x)) & x \in J_\delta(\eta_0) \\ &= \psi(e^{-ax} \pi_\delta(x)^{-1}) \end{aligned}$$

が成り立つと仮定する。

$$\delta^* = \sup \{ \delta ; (3.9) \text{ が成り立つような } \delta \}$$

とおき、 $\delta^* < \infty$ ということから矛盾を導く。その方法は定理4の場合とほとんど同じであるが、 $\pi_{\delta^*}(x)$ が接続上至るような実数の集合 E を考えると、 E はやはり測度0で $\pi_{\delta^*}(x)$ は $x \in E$ ならば0となることはあり得る。しかし π_{δ^*} が接続上至るような実数はないことが結局示され、 $\delta^* = \infty$ となって、定理5の証明が終了。(3.9)で、 $\pi_\delta(x) \rightarrow 0$ となるので $e^{-ax} \pi_\delta(x)^{-1} \rightarrow \infty$ であり ψ は正則であるから、 $\pi_\delta(x) \rightarrow \infty$ となるので $e^{-ax} \pi_\delta(x)^{-1} \rightarrow 0$ であり、 ψ の直性特異点に近づく、ことに注意しよう。)

4. 定理6の証明.

$y(x)$ は有理型な解で、条件(1.10)をみたすとする。

補題3.4 (それは任意の λ について成り立つものである) により $\eta_0 \in X$ 上で $y(\xi + i\eta_0) \rightarrow -\lambda$ ($\xi \rightarrow -\infty$)。よつ

1 $y(x) = -\lambda + w(x)$ とおくと $w(\xi + i\eta_0) \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow -\infty$).

2 方程式 (E) に より

$$w(x+1)/w(x) = 1 - 1/(-\lambda + w(x)) \rightarrow 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

$|1 - \frac{1}{\lambda}| < A < 1$ なる A をとると, ある ξ_0 に $\xi \neq 1$, $\xi \leq \xi_0$

のとき $|w(x+1)/w(x)| \leq A$ ($x = \xi + i\eta_0$). し た が っ て

$$|w(\xi_0 - m + i\eta_0)| \geq A^{-m} |w(\xi_0 + i\eta_0)|.$$

$m \rightarrow +\infty$ とすれば $\xi_0 - m \rightarrow -\infty$ 7, し か ち

$w(\xi_0 - m + i\eta_0) \rightarrow \infty$ と な る か ら, 二 つ は $y(x) \rightarrow -\lambda$

と し た と に 矛 盾 あり. ゆ え に $|1 - \frac{1}{\lambda}| < 1$ なる (1.10)

は λ の有理型解に つ い て も 成 り 立 ち ない.

REFERENCES

- [1] T. Kimura: "On the iteration of analytic functions".
Funkcialaj Ekvacioj, 14(1971), 197-238.
- [2] T. Kimura: "On meromorphic solutions of the difference
equation $y(x + 1) = y(x) + 1 + \frac{\lambda}{y(x)}$ ".
Lecture Notes in Math., #312 (Symposium on Ordinary
Differential Equations). Springer-Verlag, Berlin-
Heidelberg-New York, 1973.
- [3] K. Takano: "On the hypertranscendancy of solutions of
a difference equation of Kimura". Funkcialaj Ekva-
cioj, 16(1973), 241-254.
- [4] M. Tsuji: Potential Theory in Modern Function Theory.
Chelsea Publ., New York, 1975.
- [5] L. Ahlfors and A. Beurling: "Conformal invariants and
function-theoretic null-sets". Acta Math., 83(1950)
101-129.
- [6] S. Kametani: "On Hausdorff's measures and generalized
capacities with some of their applications to the
theory of functions". Japanese Jour. Math., 19
(1945), 217-257.