

Rogers-Ramanujan の恒等式と G.C.M. Lie algebra
 — Feingold-Lepowsky の仕事について —

東大 理 成瀬 弘

§.0 序

古典的によく知られた, Rogers-Ramanujan の恒等式というのがある。これは, ある種の分割数の関係を表わしているが, 現在知られている証明は, かなり複雑でその本質的な意味は依然として不明である。一方, Kac, Moody により, Cartan 行列の概念の拡張から, 新しい Lie 環の系列, G.C.M. Lie algebra が考え出され, 最近, Lepowsky その他の人々によりその表現論等が, 半単純 Lie 環の時と, ほぼ同じように成立することがわかり, 特に, Weyl の指標公式, 分母公式などを, 適当に変数を特殊化すると Euler, Jacobi 等の古典的な等式が導びけることや, Macdonald の等式の自然な意味付けが出来ることがわかった。このようなことから, Rogers-Ramanujan の恒等式も, 同じように G.C.M. Lie algebra により証明されることが期待される。しかし今のところこのような証明は,

まだ見つかっていない。ただ、その布石として [Lepowsky-Milne]
[Feingold-Lepowsky] により、 $A_1^{(1)}$ 型の G.C.M. Lie algebra のある
standard module の指標公式を、適当に特殊化すると、その一
部に、Rogers-Ramanujan の恒等式の左辺が現われるという観察が
ある。ここでは、その事実の紹介と合わせて Rogers-Ramanujan
の恒等式の Schur による組合せ論的な証明を述べたい。

§1. Rogers-Ramanujan の恒等式、およびその拡張

1.1 いわゆる Rogers-Ramanujan の恒等式とは次の2つです。

$$(R1) \quad \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{5n-1})(1-q^{5n-4})} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

$$(R2) \quad \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{5n-2})(1-q^{5n-3})} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

歴史的には、Rogers, Ramanujan, Schur, Watson らによって
いろいろな証明がなされてきた。ここでは後に、Schur によ
る Combinatorial proof を紹介するが、その前に、この式の分
割数としての解釈、Gordon, Andrews による拡張を述べておく。

両辺の q^n の係数を分割数として解釈すると

(R1) n の分割で各 part が $5m \pm 1$ の形の数 = n の分割 $(b_1, b_2, \dots, b_r)$

で $b_i \geq b_{i+1} + 2$ ($i=1, \dots, r-1$) を満たすものの数

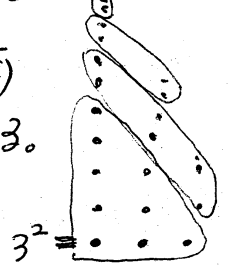
(R2') n の分割で各 part が $5m \pm 2$ の形のものの数

$= n$ の分割 $(b_1, b_2, \dots, b_r)$ で, $b_i \geq b_{i+1} + 2$, $b_r \geq 2$ の形のものの数

を得る。左辺がそれぞれの対応する母関数であることは明らか。

右辺は, (R1) については, 第 i 項 $\frac{q^{i^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^i)}$ は (R1) の右辺で, $r=i$ のものの母関数となっている。

$i=3$ のとき右図参照。 (R2) も同様。



(注) 一般にとり合った数の差が k 以上の分割の母関数は,

$$f_k(q) = 1 + \frac{q}{(1-q)} + \frac{q^{1+(k+1)}}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^{1+(k+1)+k+1}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots = 1 + \sum \frac{q^{1+\frac{k(k-1)}{2}+k}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^r)}$$

と書ける。さらに $k=1$ の時 $f_1(q) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^{2k-1})}$

$$k=2 \text{ の時 } f_2(q) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^{5k-1})(1-q^{5k-4})}$$

と表示できる。しかし $k \geq 3$ の時は, このような積表示は知られていないようである。($k=3$ の時係数を比べてこの形は存在しないことがわかる。)

1.2 Gordon, Andrews の拡張

(R1') (R2') の解釈を一般化して Gordon は次の結果を得た。

$$A_{k,i}(n) := \{ n \text{ の分割 } (a_1, a_2, \dots, a_r) \mid a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r, a_j \not\equiv 0, \pm i \pmod{2k+1} \}$$

$$B_{k,i}(n) := \{ n \text{ の分割 } (b_1, b_2, \dots, b_s) \mid b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_s, b_j - b_{j+k+1} \geq 2 \text{ 1 は高々 } i \text{ 回出現} \}$$

と定義する時,

$$\text{定理 (Gordon)} \quad \# A_{k,i}(n) = \# B_{k,i}(n)$$

とくに, $k=i=2$ のとき (R1'), $k=2, i=1$ のとき (R2') である。

証明は後に述べる Schur の方法をそのまま一般化してできる。

例. $k=3, i=1, n=9$ のとき. $2k+1=7$.

$$A_{3,1}(9) = \{ (9), (5,4), (5,2,2), (4,3,2), (3,3,3), (3,2,2,2) \}$$

$$B_{3,1}(9) = \{ (9), (7,2), (6,3), (5,4), (5,2,2), (4,3,2) \}$$

$$\#A_{3,1}(9) = \#B_{3,1}(9) = 6.$$

Andrews は (R1), (R2) の恒等式としての拡張を行なった。

定理 (Andrews)

$$\prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv \pm i \pmod{2k+1}}}^{\infty} (1-q^n)^{-1} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1} \geq 0} \frac{q^{N_1^2 + N_2^2 + \dots + N_{k-1}^2 + N_1 + N_{k-1} + \dots + N_{k-1}}}{(q)_{n_1} (q)_{n_2} \dots (q)_{n_{k-1}}}$$

$$\therefore (q)_n = (1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)$$

$$N_j = n_j + n_{j+1} + \dots + n_{k-1}$$

とくに $k=i=2$ のとき (R1), $k=2, i=1$ のとき (R2) となる。

(注) 左辺が Gordon の $A_{k,i}(n)$ の母関数であることは明らかだが。

右辺が $B_{k,i}(n)$ の母関数であることの直接証明は知られていないようだ。

1.3 Schur による Rogers-Ramanujan の式の証明.

Franklin による Euler's pentagonal number theorem の証明法と似たやり方で証明する。Jacobi の恒等式

$$(5) \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1-h^{2n})(1-h^{2n-1}z^2)(1-h^{2n-1}z^{-2}) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} (-1)^{\lambda} z^{2\lambda} h^{\lambda^2}$$

は既知として使用する。

$$\phi_1 := \frac{1}{\prod_{n \geq 1} (1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})} \quad \phi_2 := \frac{1}{\prod_{n \geq 1} (1-q^{5n-2})(1-q^{5n-3})}$$

$$\psi := \prod_{n \geq 1} (1-q^n) \quad \text{とおくと,}$$

$$\psi(q) \cdot \phi_1(q) = \prod_{n \geq 1} (1 - q^{5n})(1 - q^{5n-3})(1 - q^{5n-2}) \stackrel{*}{=} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} (-1)^{\lambda} q^{\frac{5\lambda^2 - \lambda}{2}}$$

$$\psi(q) \cdot \phi_2(q) = \prod_{n \geq 1} (1 - q^{5n})(1 - q^{5n-4})(1 - q^{5n-1}) \stackrel{**}{=} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} (-1)^{\lambda} q^{\frac{5\lambda^2 - 3\lambda}{2}}$$

*は (5) で $h = q^{\frac{5}{2}}$, $z = q^{\frac{1}{2}}$, **は (5) で $h = q^{\frac{5}{2}}$, $z = q^{\frac{3}{2}}$ とおいて

得られる。2つをまとめると $\psi(q) \phi_{\mu}(q) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} (-1)^{\lambda} q^{\frac{5\lambda^2 - (2\mu-1)\lambda}{2}}$ ($\mu=1,2$)

(R1')の右辺を $Z_1(n)$, (R2')の右辺を $Z_2(n)$ とし $\zeta_{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} Z_{\mu}(n) q^n$ ($\mu=1,2$)

$$\text{すなわち (H)} \quad \psi(q) \zeta_{\mu}(q) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} (-1)^{\lambda} q^{\frac{5\lambda^2 - (2\mu-1)\lambda}{2}} \quad (\mu=1,2)$$

を示せば、(R1') (R2') したがって (R1), (R2) が証明できたことになる。

(H)の左辺の q^m の係数は $A_m := \left\{ (a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_k) : \text{partition apart} \mid \sum a_i + \sum b_i = m, a_1 > a_2 > \dots > a_k, (b_1, \dots, b_k) \text{ は } b_j - b_{j+1} \geq 2 \text{ を満たす} \right\}$
 $\mu=2$ のときはさらに $b_k \geq 2$

$$A_m^e = \{ (a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_k) \in A_m \mid k \text{ は偶数} \}$$

$$A_m^o = \{ (a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_k) \in A_m \mid k \text{ は奇数} \} \quad \text{このとき } |A_m^e| = |A_m^o| \text{ となる。}$$

以下 $m \geq 4$ を 1 つ固定し、 A_m を 4 つの部分に分割する。 ($m=0,1,2,3,4$ のときは直接計算で q の係数を算出)

$$A_m = A^+ \sqcup A^- \sqcup B \sqcup C, \quad A^+ = \{ (a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_k) \in A_m \mid b_1 > a_1 \}$$

$$A^- = \{ (a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_k) \in A_m \mid a_1 > b_1 + 1 \} \quad B = \{ (a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_k) \in A_m \mid a_1 = b_1 \}$$

$$C = \{ (a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_k) \in A_m \mid b_1 = a_1 - 1 \geq 1 \}$$

(H)の右辺の q^m の係数は、0 または ± 1 となる事に注目し A_m^e と

A_m^o の間に高々 1 コの例外を除いて 1:1 の写像がある事を示

し、その例外が $m = \frac{5\lambda^2 - (2\mu-1)\lambda}{2}$ のとき、 λ の偶, 奇に応じて A_m^e に 1 コ

または A_m^o に 1 コ余りが生ずることを示せばよい。

$$A^+ \xrightleftharpoons[f]{f} A^- \quad \text{を} \quad f((a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_k)) = (b_1, a_1, \dots, a_k | b_2, \dots, b_k)$$

$$g((a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_k)) = (a_2, \dots, a_k | a_1, b_2, \dots, b_k)$$

とすれば f は A^+ , g は A のすべての元に対し定義され, 互いに他の逆を与えている。しかも f, g により k が偶数のものは奇数, 奇数のものは偶数に写るから, $A^+ \sqcup A^-$ 中に, k が偶数のものと奇数のものが丁度 1 つずつ pair をなしていることがわかる。よってこの $B \sqcup C$ について考えればよい。

今, $(a_1, \dots, a_k | b_1, \dots, b_k) \in A_m$ に対し, 3つの整数の対 (p, q, r) を,

$$p = \begin{cases} 0 & q \neq 0 \\ a_k & q = 0 \end{cases} \quad q \text{ は } a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \dots = a_{q-1} - a_q = 1 \text{ なる最大の } q'$$

$$r \text{ は } b_1 - b_2 = b_2 - b_3 = \dots = b_{r-1} - b_r = 2 \text{ なる最大の } r'$$

と定める。図式的には右の様, $\left(\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} q \\ q \\ q \\ q \\ q \\ q \\ q \\ q \end{array} \left| \begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} r \\ r \\ r \\ r \\ r \\ r \\ r \\ r \end{array}$

これにより

$$B = \bigsqcup_{v=1}^{\infty} (B_{v,1} \sqcup B_{v,2} \sqcup B_{v,3}) \quad C = \bigsqcup_{v=1}^{\infty} (C_{v,1} \sqcup C_{v,2} \sqcup C_{v,3})$$

と分解する。(実は有限直和)

$$\text{ここで, } B_{v,1} = \{ (a | b) \in B \mid p=v, q \geq v, r \geq v \text{ なるもの} \}$$

$$B_{v,2} = \{ (a | b) \in B \mid p > v, q \geq v, r = v \text{ なるもの} \}$$

$$B_{v,3} = \{ (a | b) \in B \mid p > v, q = v, r > v \text{ なるもの} \}$$

$$C_{v,1} = \{ (a | b) \in C \mid p > v, q = v, r \geq v \text{ なるもの} \}$$

$$C_{v,2} = \{ (a | b) \in C \mid p = v, q \geq v, r \geq v \text{ なるもの} \}$$

$$C_{v,3} = \{ (a | b) \in C \mid p > v, q > v, r = v \text{ なるもの} \}$$

$$B_{v,1} \xrightarrow{\varphi_{v,1}} C_{v,1} \xleftarrow{\psi_{v,1}}$$

$$\varphi_{v,1}(a_1 - a_k | b_1 - b_k) = (a_{1+v}, a_{2+v}, \dots, a_{v+v}, a_{v+1} - a_k | b_1 - b_k)$$

$$\psi_{v,1}(a_1 - a_k | b_1 - b_k) = (a_{1-v}, a_{2-v}, \dots, a_{v-v}, a_{v-v} - a_k | b_1 - b_k)$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} q \\ q \\ q \\ q \\ q \\ q \\ q \\ q \end{array} \left| \begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} r \\ r \\ r \\ r \\ r \\ r \\ r \\ r \end{array}$$

$$B_{v,2} \xrightleftharpoons[\varphi_{v,2}]{\varphi_{v,2}} C_{v,2} \quad \mathbb{E}$$

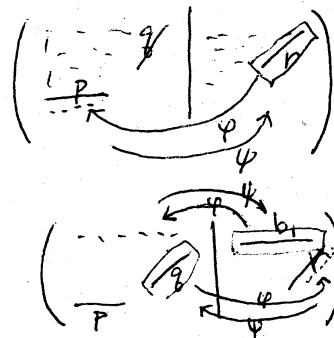
$$\varphi_{v,2}(a_1 \cdots a_k | b_1 \cdots b_k) = (a_1, \dots, a_k, v | b_1-1, b_2-1, \dots, b_{v-1}, b_{v+1}, \dots, b_k)$$

$$\psi_{v,2}(a_1 \cdots a_k | b_1 \cdots b_k) = (a_1, \dots, a_{k-1} | b_1+1, b_2+1, \dots, b_{v+1}, \dots, b_k)$$

$$B_{v,3} \xrightleftharpoons[\varphi_{v,3}]{\varphi_{v,3}} C_{v,3} \quad \mathbb{E}$$

$$\varphi_{v,3}(a_1 \cdots a_k | b_1 \cdots b_k) = (b_1, a_1-1, a_2-1, \dots, a_{v-1}, a_{v+1}-a_k | b_2+1, b_3+1, \dots, b_{v+1}, b_{v+2}, \dots, b_k)$$

$$\psi_{v,3}(a_1 \cdots a_k | b_1 \cdots b_k) = (a_2+1, a_3+1, \dots, a_{v+1}, a_{v+2}, \dots, a_k | a_1, b_1-1, b_2-1, \dots, b_{v-1}, b_{v+1}, \dots, b_k)$$



とおく。ほとんどすべてで定義され、 $\varphi_{v,i}$ と $\psi_{v,i}$ は互いに他の逆になる。しかも、偶奇を逆にしているから、pairが作れる。定義されないのは、次の4つの型のみ。

I. $a = (2v-1, 2v-2, \dots, v+1, v)$, $b = (2v-1, 2v-2, \dots, 3, 1)$ のとき $\varphi_{v,1}$ は def される。

$$m = \frac{5v^2 - v}{2}, \quad (\mu = 1 \text{ のとき起る})$$

II. $a = (2v, 2v-1, \dots, v+2, v+1)$, $b = (2v, 2v-2, \dots, 4, 2)$ のとき $\varphi_{v,2}$ は def される。

$$m = \frac{5v^2 + 3v}{2} \quad (\mu = 2 \text{ のとき})$$

III. $a = (2v, 2v+1, \dots, v+1)$, $b = (2v-1, 2v-3, \dots, 3, 1)$ のとき $\psi_{v,1}$ は def される。

$$m = \frac{5v^2 + v}{2} \quad (\mu = 1 \text{ のとき})$$

IV. $a = (2v+1, 2v, \dots, v+2, v+1)$, $b = (2v, 2v-2, \dots, 4, 2)$ のとき $\psi_{v,2}$ は def される。

$$m = \frac{5(v+1)^2 - 3(v+1)}{2} \quad (\mu = 2 \text{ のとき})$$

$\mu = 1, 2$ の場合、それぞれ上の例外の a の長さの偶奇に応じて $1, -1$ とすると丁度 (井) の式が得られ証明が終る。

§2. G. C. M. Lie algebra および Numerator formula.

ここでは G. C. M. Lie algebra の復習と、Weyl-Kac formula, Denominator formula, Numerator formula を紹介する。詳しくは小池和彦氏の報告を見て頂きたい。

$A = (A_{ij})$ を $(l+1) \times (l+1)$ の Cartan 行列とする。すなわち $A_{ij} \in \mathbb{Z}$, $A_{ii} = 2$ (i), $A_{ij} \leq 0$ ($i \neq j$), $A_{ij} = 0 \Leftrightarrow A_{ji} = 0$ これに対し、 $\mathbb{C}$ 上の Lie algebra $\mathfrak{l}(A)$ を次のように定める。 $\mathfrak{l}_1$ を $3(l+1)$ の生成元 h_i, e_i, f_i ($i=0, \dots, l$) で生成され、基本関係

$[h_i, h_j] = 0$, $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$, $[h_i, e_j] = A_{ij} e_j$, $[h_i, f_j] = -A_{ij} f_j$
 $(\text{ad } e_i)^{A_{ij}+1} e_j = (\text{ad } f_i)^{-A_{ij}+1} f_j = 0$ ($i \neq j$) をもつ Lie algebra とする。
 これは自然に graded Lie algebra とみなせる。 $\Sigma \subset \mathfrak{l}_1$ を

$\langle h_i, e_i, f_i \rangle_{i=0, \dots, l} \cap \Sigma = 0$ を満たす最大の graded ideal とし、
 $\mathfrak{l}(A) = \mathfrak{l}_1 / \Sigma$ と定義する。

$\mathfrak{f} = \langle h_0, \dots, h_l \rangle$, D_i を $\mathfrak{l}$ の derivation で grading に關し i 番目の grade をかけるものとし、 $D_0 = \langle D_0, \dots, D_l \rangle$ の subspace

$$\mathfrak{f}^e = \mathfrak{D} \times \mathfrak{f} \subset \mathfrak{l}^e = \mathfrak{D} \times \mathfrak{l} \text{ かつ } \alpha_i \in (\mathfrak{f}^e)^* \quad i=0, \dots, l \text{ を}$$

$$[h, e_i] = \alpha_i(h) e_i \quad \forall h \in \mathfrak{f}^e \text{ で定める。 } \alpha_j(h_i) = A_{ij} \text{ となる。}$$

$\exists$ $\alpha_0, \dots, \alpha_l$ が線型独立となる最小のものをとり固定しておく。

$$(\mathfrak{f}^e)^* \text{ の 鏡映 } r_i \quad (0 \leq i \leq l) \text{ を } r_i(\phi) = \phi - \phi(h_i) \alpha_i, \quad \phi \in (\mathfrak{f}^e)^*$$

で定め $W = \langle r_0, \dots, r_l \rangle$ を Weyl 群と呼ぶ。 $\mathfrak{f}^e$ の basis を

$$\{h_0, \dots, h_l, d_1, \dots, d_r\} \text{ と } (\mathfrak{f}^e)^* \text{ の dual basis を } \{h_0^*, \dots, h_l^*, d_1^*, \dots, d_r^*\}$$

とする。 $\lambda \in (\mathfrak{f}^e)^*$ が integral かつ $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z} \quad \forall i=0, \dots, l, \lambda \in (\mathfrak{f}^e)^*$ が dominant integral かつ $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_+ \quad i=0, \dots, l$, なることをいう。

$P = \{ \text{dominant integral} \} = \mathbb{Z}_+ h_0^* + \dots + \mathbb{Z}_+ h_l^* + \Delta^*$ とおく。

$\rho \in P$ を $\rho = h_0^* + \dots + h_l^*$ とする。 $\rho(h_i) = 1 \quad 0 \leq i \leq l$ とする。
以下 行列 A は symmetrizable とする。

$\mathfrak{f}^e$ -module X に対し λ weight $\nu \in (\mathfrak{f}^e)^*$ の weight space を
 $X_\nu = \{ x \in X \mid h \cdot x = \nu(h)x \quad \forall h \in \mathfrak{f}^e \}$ で定める。各 $\lambda \in P$ に対し λ highest weight に持つ既約な standard module X^λ が存在
することが知られている。 weight module X に対し 指標を
 $\chi(X) = \sum_{\nu \in (\mathfrak{f}^e)^*} \dim(X_\nu) e(\nu)$ で定める。この時次の指標公式が
成立する。(A が symmetrizable のときしか証明されていない)

$$[\text{Weyl-Kac character formula}] \quad \frac{\chi(X^\lambda)}{e(\lambda)} = \frac{N(\lambda)}{D}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } N(\lambda) &= \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) e(w(\lambda + \rho) - (\lambda + \rho)) \\ D &= N(0) = \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) e(w\rho - \rho) \end{aligned}$$

これは $R = \mathbb{Z} [e(-\alpha_0), \dots, e(-\alpha_l)]$ の元である。

さらに分母については

$$[\text{Denominator formula}] \quad D = \prod_{\varphi \in \Delta_+} (1 - e(-\varphi))^{\dim \mathfrak{g}^\varphi}$$

が成立する。

分子については。そのままでは積公式はないが、 $e(-\alpha_i)$ たちを、適当に specialize すると積表示をもつ。

$$R = \mathbb{Z}[[e(-\alpha_0), \dots, e(-\alpha_\ell)]] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}[[q]]$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$e(-\alpha_i) \longmapsto q^{s_i} \qquad s_i \in \mathbb{Z}_+$$

により、環の準同型 φ を定義し、 $f \in R$ に対し $\varphi(f) = f|_{(s_0, \dots, s_\ell)}$ と書く。type $(s_0, \dots, s_\ell)$ の specialization と呼ぶ。とくに type $(1, \dots, 1)$ の specialization を principal specialization とする。この時、 $N(\lambda)$ の principal specialization は次の積公式をもつ。

$$[\text{Numerator formula}] \quad N(\lambda)|_{(1, \dots, 1)} = D' |_{(\lambda+\rho)(h_0), (\lambda+\rho)(h_1), \dots, (\lambda+\rho)(h_\ell)}$$

2.2 で、 D' は tA について作った G.C.M. Lu algebra

$\mathcal{L}' = \mathcal{L}({}^tA)$ の指標公式の分母。

$$\begin{aligned} \text{証明の概略. } \quad \iota: f &\longrightarrow R' & \iota(h_i) &= \alpha_i' & R' &= \langle \alpha_i' \rangle (f^*)^* \\ \quad \quad \quad \iota: R &\longrightarrow f' & \iota(\alpha_j) &= h_j' & R &= \langle \alpha_i \rangle (f^*)^* \end{aligned}$$

で linear map を定めると、bijection で pairing を保ち、さらに

$$\iota: W \longrightarrow W' \quad v_i \mapsto v_i' \quad \text{とすると } W \text{ の action と } W' \text{ の action とは compatible とする。}$$

(Lemma.) $\lambda \in (f^*)^*$ に対し $\delta \lambda' \in f'^*$ とし、 $\alpha_i'(\delta \lambda') = (\lambda + \rho)(h_i)$ $i=0, \dots, \ell$

$$\text{とすると、} \quad (\omega(\lambda + \rho) - (\lambda + \rho))(\delta) = (\omega \rho' - \rho')(\delta \lambda') \quad \text{と成る。}$$

$$\text{ここで } \delta \in f \text{ は、} \quad \alpha_i(\delta) = 1 \quad \forall i=0, \dots, \ell \quad \text{なる元。}$$

$$\begin{aligned} \text{これを使うと、} \quad N(\lambda)|_{(1, \dots, 1)} &= \sum_{\omega \in W} (\det \omega) q^{-(\omega(\lambda + \rho) - (\lambda + \rho))(\delta)} \\ &= \sum_{\omega \in W'} (\det \omega) q^{-(\omega \rho' - \rho')(\delta \lambda')} \quad (\text{Lemma}) \\ &= \sum_{\omega \in W'} (\det \omega) q^{-(\omega \rho' - \rho')(\delta \lambda')} \\ &= D' |_{(\lambda + \rho)(h_0), \dots, (\lambda + \rho)(h_\ell)} \quad (\text{略証終り}) \end{aligned}$$

§3. $A_1^{(1)}$ 型 GCM Lie algebra と Rogers-Ramanujan の等式.

ここでは $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ($A_1^{(1)}$ 型) に対する G.C.M. Lie algebra の表現に対し §2 の議論をあてはめて、指標公式の specialization として、Andrews の Rogers-Ramanujan 等式の左辺が現われることを指摘する.

simple root を α_0, α_1 とすると、Root 系は右図のようになる。(上下に無限に続く)

点線内は positive root 2. imaginary root は $m\gamma$ の形のもの $m \in \mathbb{Z}$.

Weyl 群は、2つの映映 r_0, r_1 で生成される

無限位数の二面体群で、 $r_0 \alpha_0 = -\alpha_0$, $r_0 \alpha_1 = \alpha_1 + 2\alpha_0$

$$r_1 \alpha_0 = \alpha_0 + 2\alpha_1, r_1 \alpha_1 = -\alpha_1$$

で作用する。

$$\begin{aligned} \text{denominator は } D &= \prod_{n \geq 1} (1 - u^n v^n) (1 - u^{n-1} v^n) (1 - u^n v^{n-1}) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n u^{\frac{1}{2}n(n+1)} v^{\frac{1}{2}n(n-1)} \end{aligned}$$

ここで $u = e(-\alpha_0)$, $v = e(-\alpha_1)$

$A = {}^t A$ に注意して、Numerator formula を使うと.

$$\begin{aligned} N(\lambda)|_{(1,1)} &= D|_{(A+p)(\lambda_0), (A+p)(\lambda_1)} \quad \left(n_i = (A+p)(\lambda_i) \right. \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{(n_0+n_1)n}) (1 - q^{(n_0+n_1)n - n_0}) (1 - q^{(n_0+n_1)n - n_1}) \end{aligned}$$

また.

$$D|_{(1,1)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) (1 - q^{2n+1}) (1 - q^{2n-1}) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n+1})$$

//.

したがって、指標公式 $\frac{\chi(V^\lambda)}{e(\lambda)} \Big|_{(1,1)} = \frac{N(\lambda)|_{(1,1)}}{D|_{(1,1)}} = \frac{D|_{(n_0, n_1)}}{D|_{(1,1)}}$ より

定理.
$$\prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n-1}) \frac{\chi(V^\lambda)}{e(\lambda)} \Big|_{(1,1)} = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq 0, \pm n_0 \pmod{n_0+n_1}}}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}$$

特に $\lambda = 1$ とし、 $(\lambda + \rho)(h_0) = n_0 = 1$, $(\lambda + \rho)(h_0 + h_1) = 2k+1 = n_0 + n_1$ なるものにとると、右辺の積は丁度、Rogers-Ramanujanの式の Andrewsによる拡張の左辺に一致する。左辺の $\prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n-1})$ は、どういう意味をもつかはよくわからないう。いなり。

(注) $\frac{\chi(V^\lambda)}{e(\lambda)}$ は [Feingold-Lepowsky] でより詳しく調べられ、 $\lambda = n_0 h_0^* + n_1 h_1^*$ とし、 $n_0 + n_1 \leq 3$ について、

explicitな形で与える公式が得られている。また重複度は、帰納的に計算する方法がある。

参考文献

[Kac] Infinite-Dimensional Algebras, Dedekind's η -Function, classical Möbius function and the Very strange Formula. *Advanc. Math.* 30 (1978) 85-136

[Feingold-Lepowsky] The Weyl-Kac Character formula and Power Series identities *Advanc. Math.* 29 (1978) 271-309

[Lepowsky] Application of the numerator formula
to k -Rowed Plane partitions Advances Math 35 (1980)
179-194

[Lepowsky-Milne] Lie algebra approaches to Classical
Partition identities Advances Math 29 (1978)
15-59

[Schur] Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie und
zur Theorie der Kettenbrüche (1917) Gesammelte Abhandlungen
Vol 2. pp. 117-136

[Andrews] The Theory of Partitions Encyclopedia of Math.
Vol 2. Addison-Wesley 1976