

t -design の存在分類

広島大 教育 景山三平

序

$v \geq k+t$ に対し t -(v, k, λ_t) design の complement も $\lambda'_t = \sum_{l=0}^t (-1)^l \binom{t}{l} \lambda_l = \lambda_t \binom{v-k}{t} / \binom{k}{t}$ なる t -($v, v-k, \lambda'_t$) design となることはよく知られている。こゝでは、 t -(v, k, λ_t) design ($k \leq v/2$) とその complementary design の拡大可能性の問題を次の論文に従って論じる。

S. Kageyama: Classifications of certain t -designs.
To appear in J. Combinatorial Th. (A).

Π を t -(v, k, λ_t) design, α を Π の処理とする。こゝで α をき処理とは α を除く Π の処理, つまり α を含む Π の α からなる design Π_α は $(t-1)$ -($v-1, k-1, \lambda_t$) design となり, Π の contraction といわれる。今, Π, Π

をそれぞれ t -, $(t+1)$ -design とし, Π の適当な処理 α に対し Π' と Π_α とが同型になるとき, Π は Π' の 拡大 (extension) または Π' は 拡大可能 である. 定義から一般には同じパラメータをもつ t -design Σ , π が拡大可能でも π は拡大不可能のことがある.

記号 $PG(S, \delta):d$, $AG(S, \delta):d$ はそれぞれ, $PG(S, \delta)$, $AG(S, \delta)$ を表す処理, d -flat をブロッックと見ることを得る Σ -design (BIBD) を示す ($S > d$).

問題の設定

Π, Π^* をそれぞれ t -(v, k, λ_t) design ($k \leq v/2$) とその complement とする. このとき Π が拡大不可能でも Π^* は拡大可能とあることがある. そこで t -design の拡大可能性の問題として次の四つのクラスを考えた.

(A) Π は拡大可能; Π^* は拡大不可能.

(B) Π と Π^* は共に拡大可能.

(C) Π は拡大不可能; Π^* は拡大可能.

(D) Π と Π^* は共に拡大不可能.

上のそれぞれに属する t -design のクラスが特徴づけられると, それら自身の組合せ論的興味に加え, t -design の構造の分類に役立つ. この方面の最近の多くの研究は t -design

が拡大可能か不可能かを決定する方向にあり、これはクラス (A) と (B) の考察に貢献している。ここでは上記4つのクラスの各々に関する t -design を考察する。

議論

次のことはよく知られている: ブロック数 b の t -(v, k, λ_t) design が拡大可能のための必要条件は

$$(I) \quad b(v+1) \equiv 0 \pmod{k+1}$$

である。

同様に、ブロック数 b の t -(v, k, λ_t) design の complement が拡大可能のための必要条件は

$$(II) \quad b(v+1) \equiv 0 \pmod{v-k+1}$$

である。これは、最も基本的な条件である。

補題. t -($v, k, 1$) design の complement は $t < k \leq v/2$ に対して拡大不可能である。

(証明) Π を $t < k \leq v/2$ なる t -($v, k, \lambda_t = 1$) design とする。このとき Π^* は t -($v, v-k, \lambda_t^*$) design となる。ここで $\lambda_t^* = \binom{v-k}{t} / \binom{k}{t}$ 。さらにもし Σ が Π^* の extension ならば Σ^* は $(t+1)$ -($v+1, k, \lambda_{t+1}^*$) design となる。ここで

$$\lambda'_{t+1} = \lambda_t^* \binom{k}{t+1} / \binom{v-k+1}{t+1} = (k-t)/(v-k+1) < 1 \quad (\because t < k \leq v/2).$$

このように $(t+1)-(v+1, k, \lambda'_{t+1})$ design は存在しない。
 2. Σ も存在しない。(証明)

ここで 4つのクラスそれぞれに属する t -design について述べる。

クラス(A) このクラスに属する t -design は一般には調べるす。この 11 について述べる。

(1) Affine resolvable $2-(m^2[(m-1)p+1], m[(m-1)p+1], mp+1)$ design が拡大可能 $\iff$ χ が $2-(m^2, m, 1)$ design. χ があるものは素数 m は素数 m に対して $AG(2, m):1$ として存在する。このとき $AG(2, m):1$ を拡大した $3-(m^2+1, m+1, 1)$ design が存在する。自明な $2-(4, 2, 1)$ design を除いた affine resolvable 2-design の complement は拡大不可能である。

(2) $PG(5, 2):d$ は $AG(5+1, 2):d+1$ に拡大可能。
 $PG(5, 2):d$ の complement は $d=1, 2, 5-1, 5-2$ のとき拡大不可能。

(3) $AG(5, 8):1$ は条件(I)を常に満たすが, $AG(5, 8):1$ の complement は $g=2$ のときのみ条件(II)を満たす。

(4) 対称型 2-design が拡大可能ならば χ は次の型に属する (Cameron). χ の complement は明らかに拡大不可

例: (i) Hadamard design, (ii) $v=(\lambda_2+2)(\lambda_2^2+4\lambda_2+2)$, $k=\lambda_2^2+3\lambda_2+1$,
 (iii) $v=111$, $k=11$, $\lambda_2=1$, (iv) $v=495$, $k=39$, $\lambda_2=3$.

(5) 3-(10,4,1) design, 3-(22,6,1) design, 3-(10,4,2) design type".

クラス(B)

(6) Σ is $(t+2)-(v+2, k+1, \lambda')$ design $\in$ (, α, β is Σ
 の処理とする. Π is 処理 is Σ の処理 α, β is 異なる Σ の処理で,
 ブロック α is Σ を含み β is 含まない Σ のブロックを取るこ
 とより構成できる $t-(v, k, \lambda)$ design とする. $\lambda = \lambda'(v-k+1)/(k-t)$. Σ is Π is Π^* is 共に Σ
 であり $(t+1)$ -design $((\Sigma^*)_{\beta})^*$ と $(\Sigma_{\alpha})^*$ に拡大する.

和 Σ is Π is 4-, 5-design の系列を用いて クラス(B)
 に属する多くの 2-, 3-design の系列が与えられる.

(7) 自明な $t-(v, t, \lambda_t)$ design (all combination type),
 $t-(v, v-1, \lambda_t)$ design, 2-(9,4,3) design, 2-(15,7,27) design
 type".

(8) 偶数 t に対して拡大可能な $t-(2k+1, k, \lambda_t)$
 design はクラス(B) の例を与えることが多し.

クラス(C)

このクラスの t -design の存在が本稿の動
 機づけとなった. 例として 2-(31,8,28) design を挙げる. Σ
 は乗法群 (I) より拡大不可能. (ただし Σ の complement の
 である 2-(31,23,253) design は 3-(32,24,253) design

(i.e., $AG(5,2):3$ は 12 存在) に拡大可能である。

(9) Σ を $(t+1)-(v+1, k, \lambda)$ design とし, α を Σ の一々の処理とする. Π は Σ で α と異なるものを処理とし, α を含まない Σ のブロックをブロックとすれば $t-(v, k, \lambda')$ design となる. $\therefore \lambda' = \lambda(v+1-k)/(k-t)$. $\therefore \alpha$ と Π^* は Σ^* に拡大可能である. 即ち, $(t+1)-(v+1, k, \lambda)$ design $\Sigma = (\Omega^x, \mathcal{Q})$ ($\therefore \therefore, \Omega^x = \Omega \cup \{\alpha\}, |\Omega| = v$) を $\Sigma = (\Omega^x, \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2)$ と分割すれば $\Pi = (\Omega, \mathcal{Q}_2)$ が $t-(v, k, \lambda(v+1-k)/(k-t))$ design となる. $\therefore \therefore, \mathcal{Q}_1 = \{B: \alpha \in B \in \mathcal{Q}\}, \mathcal{Q}_2 = \{B: \alpha \notin B \in \mathcal{Q}\}$ である. $\therefore \alpha$ と $\Pi^* = (\Omega, (\mathcal{Q}_2^*)^x)$ は $\Sigma^* = (\Omega^x, \mathcal{Q}_1^* \cup \mathcal{Q}_2^*)$ に拡大する. $\therefore \therefore \mathcal{Q}_1^* = \{\Omega^x - B: B \in \mathcal{Q}_1\}, (\mathcal{Q}_2^*)^x = \{B - \{\alpha\}: \alpha \in B \in \mathcal{Q}_2\}$ である. 故に Π が拡大不可能なときは $\therefore \Pi$ はクラス (C) に属する.

$\therefore$ の応用として, 例として $4-(23, 8, 4)$ design, $4-(23, 8, 8)$ design, $4-(35, 12, 135)$ design 等がある.

クラス (D)

知られた t -design の系列から条件 (I), (II) を用いて, このクラスの t -design の系列を容易に与えることが出来る. 例として 2 -design $AG(5, 2): (5-1)$ は $5 \geq 3$ のときこのクラスに属する.