

3 次精度上流型有限要素近似

電気通信大学 田端正久 (Masahisa Tabata)

電気通信大学 藤間昌一 (Shoichi Fujima)

0. はじめに

高レイノルズ数流れの現象を安定にかつ精度良く近似するために、従来からいろいろなスキムが開発されてきた。それらは移流項に何らかの上流（風上）型近似を用いてスキムの安定化を計る一方、入り込む擬似拡散をなるべく小さくすることを試みている。差分法ではいくつかの 3 次精度上流型技法が開発されてきた。これに対し、有限要素法では 1 次精度上流型スキムは数多く研究されてきた¹⁾が、3 次精度スキムに関しては著者の知る限り、最近の近藤らの結果²⁾のみである。そこで我々は以前開発した上流要素選択型有限要素近似³⁾を拡張して、流れ方向に 3 次精度をもつ近似を開発した。この近似は有限要素法の特長である要素分割の自由性を生かしており、差分法でよく用いられる一般化座標の導入は必要ない。従って、方程式が変更されないという利点がある。

本報ではこの近似の方法を解説し、その応用例としてキャビティ流れ問題と円柱まわり流れ問題の数値計算結果を示す。以下で、 Ω は 2 次元有界領域とする。

1. 非定常ナビエ・ストークス問題

非圧縮粘性流体の運動を記述する非定常ナビエ・ストークス方程式は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f}, \quad (1a)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (1b)$$

である。ここに、 $\mathbf{u}$ は流速、 p は圧力、 ν は動粘性係数、 $\mathbf{f}$ は外力である。

方程式 (1) を時間について刻み τ で差分化する、

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + (u^n \cdot \text{grad}) u^n - \nu \Delta u^n + \text{grad} p^{n+1} = f^n, \quad (2a)$$

$$\text{div} u^{n+1} = 0. \quad (2b)$$

ここに, u^n, p^n は時刻 $n\tau$ での u, p の値である.

空間の離散化には有限要素法を用いる. 基底関数として Bercovier-Pironneau⁴⁾の要素を使う. これは圧力が三角形1次, 流速は各三角形を4分割した小三角形で1次の要素である. この組合せは混合型有限要素近似理論で重要な働きをする Inf-Sup 条件を満たしている.

時間微分項は質量集中化を行い, 移流項以外は標準的な混合型有限要素法の近似を用いる. 移流項には次に説明する流線方向3次精度上流近似を用いる.

2. 3次精度上流近似

移流項 $(u^n \cdot \text{grad}) u^n$ の近似を考える. そのために, $b: \Omega \rightarrow R^2$ は既知の流速, $u: \Omega \rightarrow R$ はスカラー関数として $(b \cdot \text{grad}) u$ の近似 $(b \cdot \text{grad})_h u_h$ を導こう.

節点 O での $(b \cdot \text{grad})_h u_h$ の値は, 次のように計算される. 点 O で流速 $b(O)$ は零でないとする. 点 O を原点とし, $b(O)/|b(O)|$ を ξ 方向の単位ベクトルとする局所直交座標系 (ξ, η) を考える. このとき移流項は, $(|b| \partial u / \partial \xi)(O)$ となる. ξ 軸上かつ点 O の上流方向 (ξ 軸負の方向) に上流点 $U(\xi_U, 0)$ を, 更に上流方向に第2上流点 $W(\xi_W, 0)$ を, 下流方向 (ξ 軸正の方向) に下流点 $D(\xi_D, 0)$ を取る. $\partial u / \partial \xi(O)$ を4点 W, U, O, D での u の値を使って近似する.

定理 節点 O 付近の代表メッシュ長 h に依存しない定数 $0 < c_1 \leq c_2$ が存在して,

$$c_1 h \leq -\xi_U, \xi_U - \xi_W, \xi_D \leq c_2 h \quad (3)$$

が満たされているとする. このとき,

$$\begin{aligned} \gamma_W &= \xi_D \xi_U / \{ \xi_W (\xi_D - \xi_W) (\xi_U - \xi_W) \}, \\ \gamma_U &= \xi_W \xi_D / \{ \xi_U (\xi_W - \xi_U) (\xi_D - \xi_U) \}, \\ \gamma_D &= \xi_U \xi_W / \{ \xi_D (\xi_U - \xi_D) (\xi_W - \xi_D) \}, \\ \gamma_O &= -(\gamma_W + \gamma_U + \gamma_D) \end{aligned} \quad (4)$$

と取れば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi}(O) &= \gamma_W u(W) + \gamma_U u(U) + \gamma_O u(O) + \gamma_D u(D) \\ &\quad - c h^3 \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4}(O) + O(h^4) \end{aligned} \quad (5)$$

が成立する. ここに, c は h に依存しない正数である. ■

証明は, 点 O のまわりで, u のテーラー展開式を使って行う.

この定理から, 移流項 $(b \cdot \text{grad})u(O)$ の近似

$$\begin{aligned} (b \cdot \text{grad})_h u_h(O) &= |b(O)| \{ \gamma_W u_h(W) \\ &\quad + \gamma_U u_h(U) + \gamma_O u_h(O) + \gamma_D u_h(D) \} \end{aligned} \quad (6)$$

を定義する. これが我々の用いる移流項の近似である.

3. 上流点, 第2上流点, 下流点の決定

要素分割に現れる辺を閉集合とし, 集合 $\mathcal{F} = \{\text{節点}, \text{辺}\}$ を定義する.

任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して,

$$\mathcal{C}(F) = \{A \in \mathcal{F}; A \cap F = \emptyset\} \quad (7)$$

を定義する. ξ 軸上の点 P に対して, $\mathcal{L}_+(P)$, $\mathcal{L}_-(P)$ で P を端点とする ξ 方向, $-\xi$ 方向の半直線を表記する. このとき, 上流点 U , 下流点 D を次のように決定する (図1).

$$U = (\xi_U, 0), \quad \xi_U = \max\{\xi; P(\xi, 0) \in F \cap \mathcal{L}_-(O), F \in \mathcal{C}(O)\}, \quad (8a)$$

$$D = (\xi_D, 0), \quad \xi_D = \min\{\xi; P(\xi, 0) \in F \cap \mathcal{L}_+(O), F \in \mathcal{C}(O)\}. \quad (8b)$$

$U \in F_U \in \mathcal{C}(O)$ なる F_U を定める. このような F_U は, $U \in \mathcal{C}(O)$ の場合を除いて (そのときは $F_U = U$ と定める) 一意に決まる. 第2上流点 W を次のように決める,

$$W = (\xi_W, 0), \quad \xi_W = \max\{\xi; P(\xi, 0) \in F \cap \mathcal{L}_-(U), F \in \mathcal{C}(F_U)\}. \quad (8c)$$

補題 領域 Ω の分割は正則であるとする. 点 U , W , D を上のように選ぶと, (3)式が成立する. ■

証明は, 分割が正則であることから明らかである.

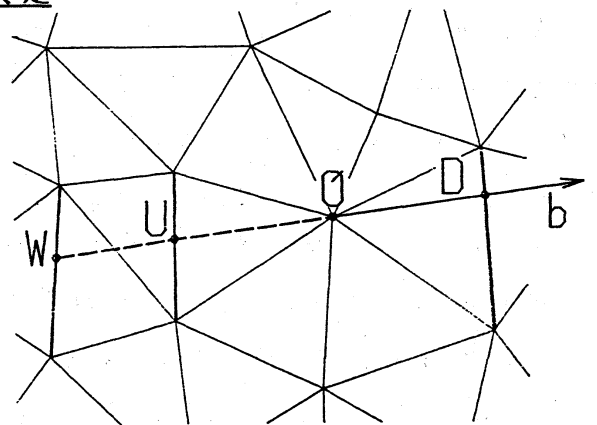


図1. 流速 $b(O)$ と点 W, U, O, D

4. 連立一次方程式の解法

(2)式を解くため、圧力ポアソン方程式(PPE)の解法を有限要素法で実現する。(2)を行列表示すると、

$$(1/\tau)\bar{M}u^{n+1} + B^T p^{n+1} = r^n \quad (9a)$$

$$B u^{n+1} = s^n \quad (9b)$$

となる。 $\bar{M}$ は集中質量行列(対角行列)、 $B = (b_{ij})$ は div から導かれる行列、

$$b_{ij} = - \int_{\Omega} \phi_i \text{div} \phi_j dx, \quad (10)$$

r^n , s^n は既知ベクトルであり、 ϕ_i , ϕ_j はそれぞれ流速、圧力の基底関数である。連立一次方程式(9)は、

$$(B \bar{M}^{-1} B^T) p^{n+1} = B \bar{M}^{-1} r^n - (1/\tau) s^n \quad (11)$$

を解いてまず p^{n+1} を求め、次に(9a)式から、 u^{n+1} を求める。(11)式は、有限要素法でのPPEであり、その一意可解性は、Inf-Sup条件の下で保証される。このように、(2)式は圧力の自由度数の小さい連立一次方程式を解くことに帰着される。

5. 数値例

(i) キャビティ流れ問題

24×24の不等間隔メッシュ分割(要素数 1,152)を用いて計算を行った。レイノルズ数(Re)1,000と10,000に対する流速ベクトルと $x_1=0.5$ での水平方向速度成分 u_1 の分布を図2, 図3に示す。本近似は比較的粗い分割で、高レイノルズ数流れに対する良好な計算結果を得ていることがわかる。

(ii) 円柱まわり流れ問題

計算領域は一辺の長さが32の正方形で、その中心に直径1の円柱を置く。周方向40分割、半径方向23分割の要素分割(要素数1760, 図4)を用いて計算を行った。Re=400に対する流速ベクトルを図5に示す。円柱後流に生じるカルマン渦の様子をよく捉らえているがわかる。

計算には、東京大学大型計算機センターHITAC M-680Hを使用した。

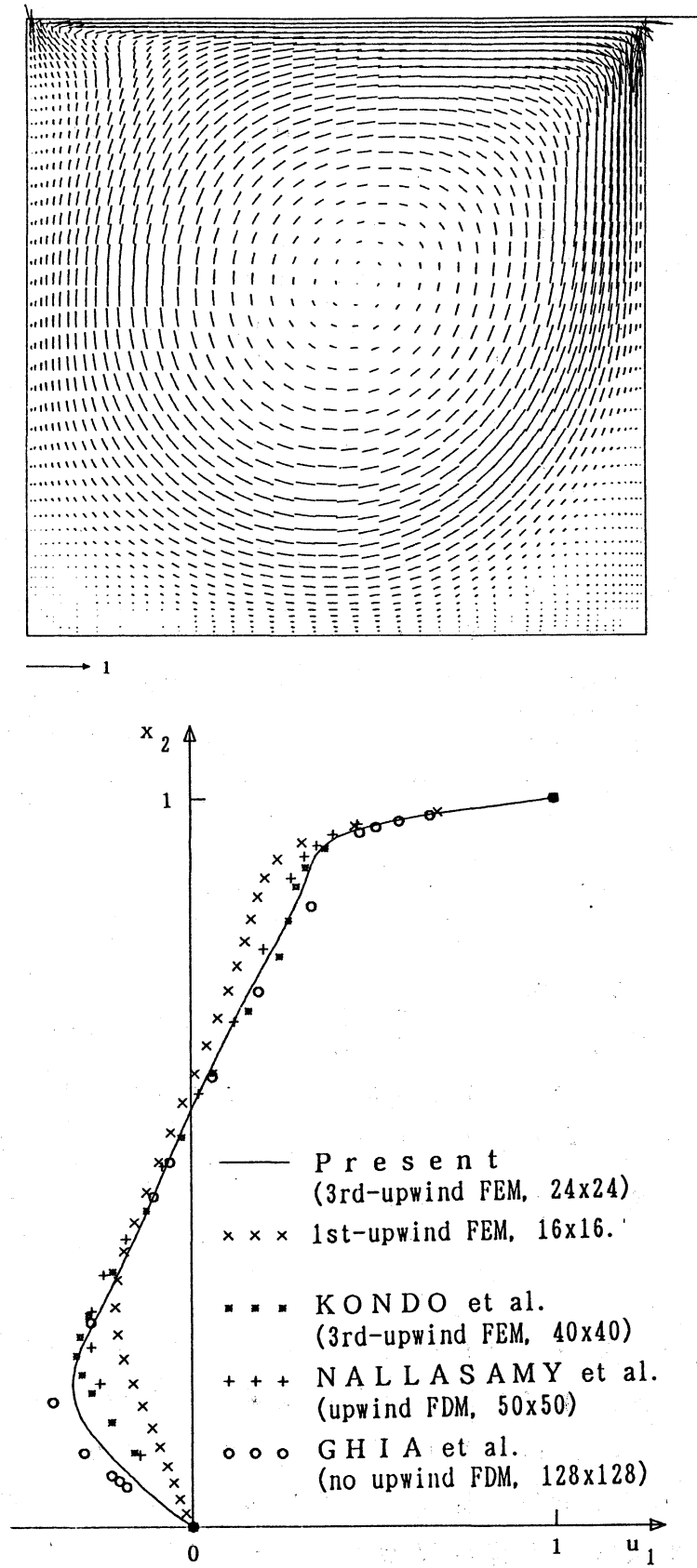


図 2. キャビティ流れの流速ベクトルと $x_1 = 0.5$ での u_1 の分布,
 $Re = 1,000$.

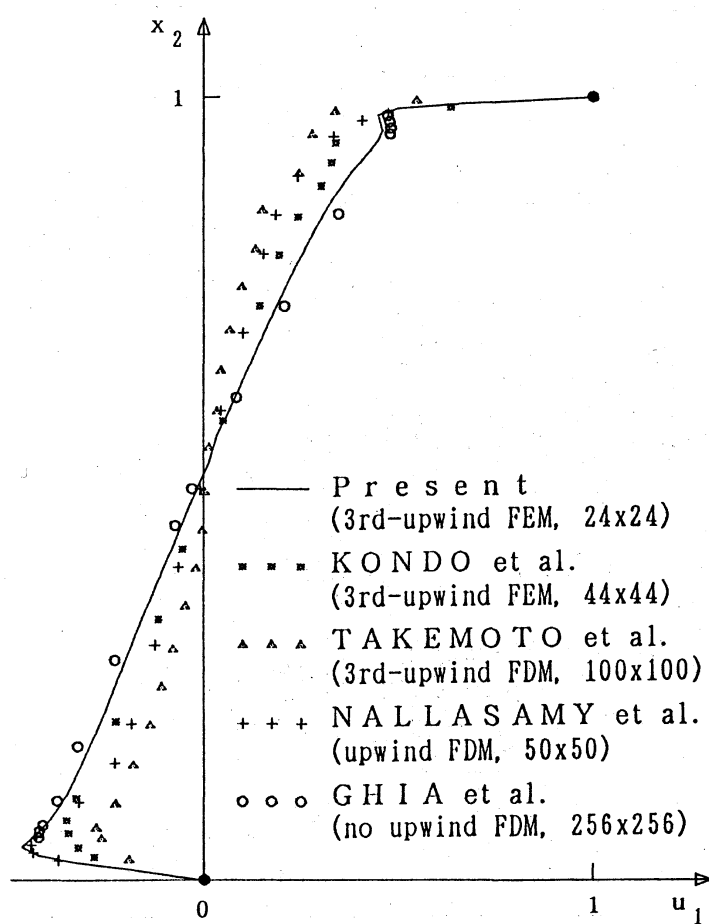
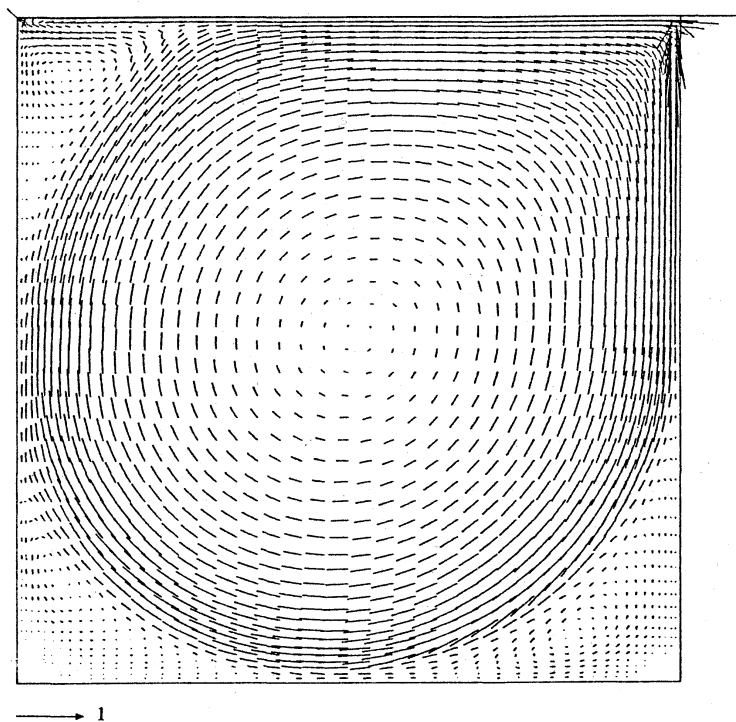


図 3. キャビティ流れの流速ベクトルと $x_1 = 0.5$ での u_1 の分布,
 $Re = 10,000$.

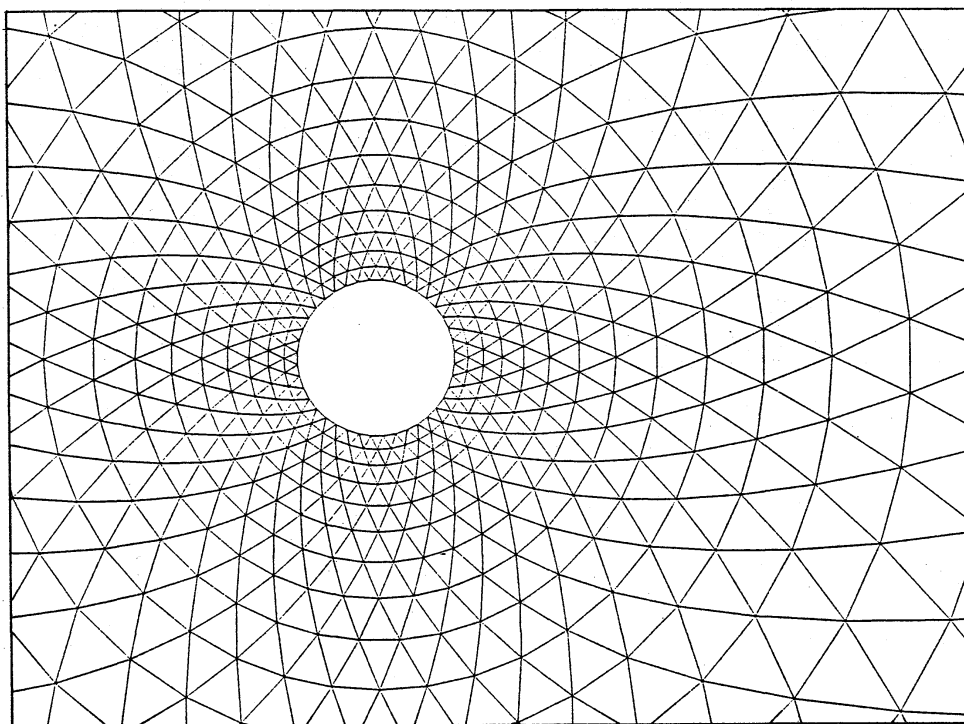
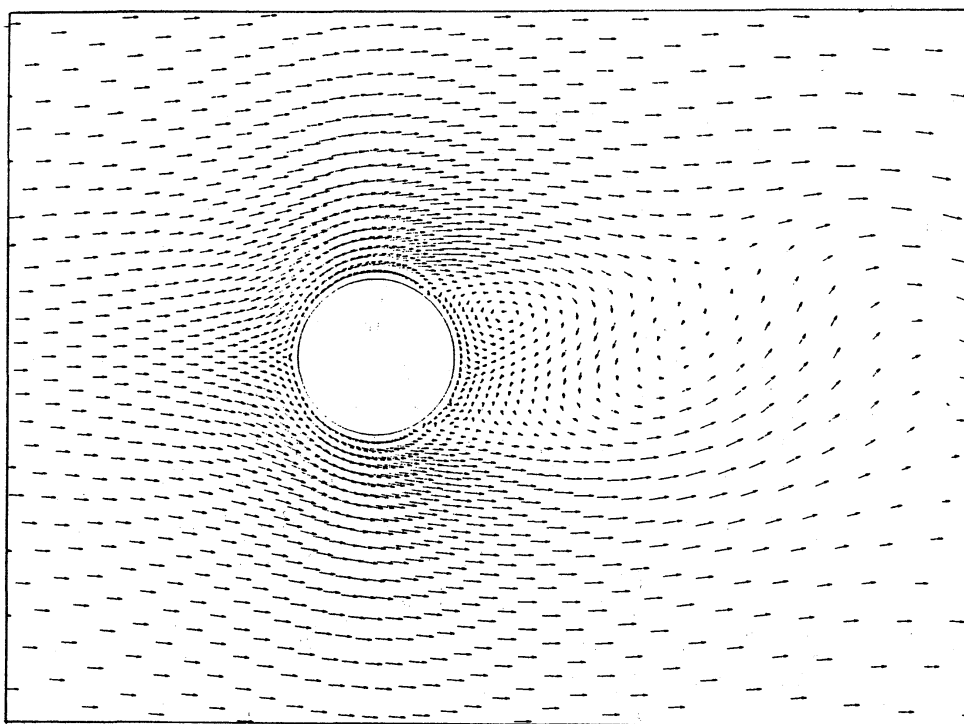
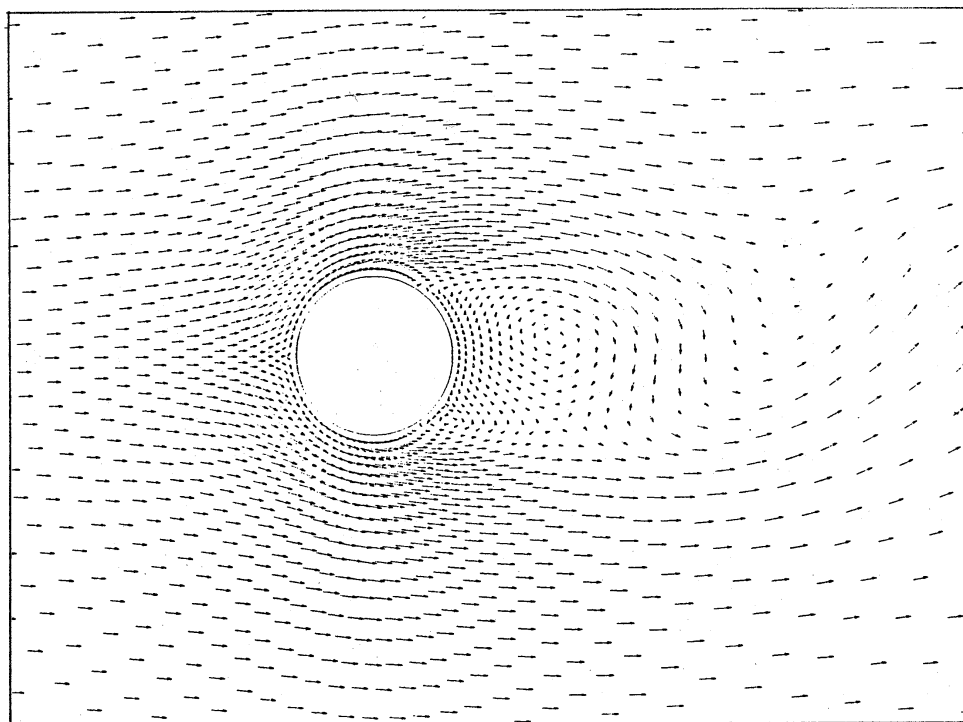
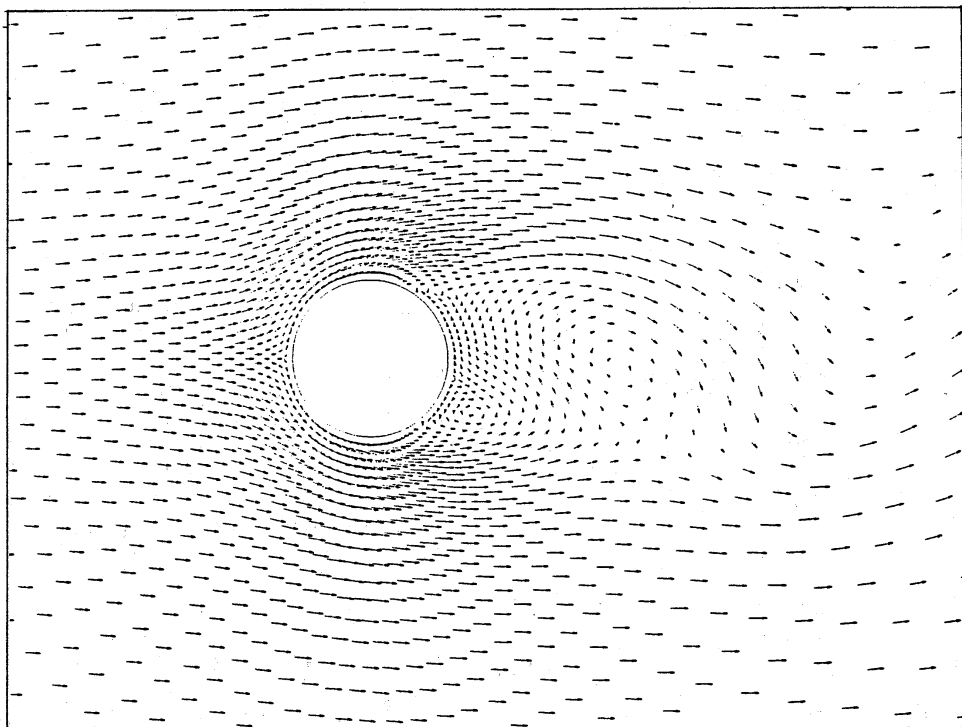


図 4. 円柱付近の要素分割



(a) $t=48$.

(b) $t=49$.(c) $t=50$.図 5. 円柱まわり流れの流速ベクトル, $Re=400$.

6. おわりに

ナビエ・ストークス方程式のための新しい3次精度上流型有限要素近似を示し、数値計算例でその有効性を確かめた。この近似は1次精度の上流要素選択型有限要素近似の自然な拡張になっている。1次精度から流れ方向3次精度への改良は、解のレイノルズ数依存性に格段の向上をもたらしている。差分法での3次精度上流型近似では一般化座標が用いられる。そのために、方程式も元の形から変形される。われわれの解法で、より良い計算結果を得るには、とりわけ急激な流速変化の生じる境界層で、要素分割が流れに沿っていることが望まれる。このことは差分法で一般化座標を使うことに対応している。3次精度上流型有限要素近似では、一般化座標を使わずに有限要素法の大きな特長である、分割の自由性でこれの実現を計っている。そのために、方程式は何の変更も受けないという利点がある。

参考文献

- 1) Tabata, M.: "A theoretical and computational study of upwind-type finite element methods", Patterns and Waves, eds. Nishida, T. et al., Kinokuniya/North-Holland, 1986, 319-356.
- 2) 近藤典夫, 登坂宣好, 西村敏雄: "高レイノルズ数流れの有限要素解析", 第1回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 207-210(1987).
- 3) Tabata, M.: "A finite element approximation corresponding to the upwind finite differencing", Memoirs Numer. Math., 4, 47-63(1977).
- 4) Bercovier, M. and Pironneau, O.: "Error estimates for finite element method solution of the Stokes problem in the primitive variables", Numer. Math., 33, 211-224(1979).
- 5) Takemoto, Y., Yamabe, H., Abe, Y. and Naito, H.: "On the third-order upwind finite difference scheme in numerical analysis for initial-value problem", Research Report, IPPJ-693, Nagoya Univ., 1984.
- 6) Nallasamy, M. et al.: "On cavity flow at high Reynolds numbers", J. Fluid Mech., 79, 391-414(1977).
- 7) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T.: "High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method", J. Comp. Phys., 48, 387-411(1982).
- 8) 田端正久, 藤間昌一, 守田明生: "ナビエ・ストークス方程式のための二つの風上型有限要素近似", 電気通信大学紀要, 1, 129-136(1988).