

ひもの話

大阪大学理学部数学教室

村上 順

ひもは大昔から人間の生活を支える基本的な道具でした。ひもの最も基本的な使い方は、結ぶことにあります。ひもを物に絡めて結ぶことにより、ひもを物につなぐ事ができます。いまでこそ、接着剤やセロテープなど、二つの物をくっつけるためのものは色々ありますが、昔はひもを使って結ぶしか方法が無かったし、いまでも、巨大な吊橋が、ひもで陸と陸とをつないでいるように、ひもは生活に欠かせない道具です。

さて、ひもを用いる上では、それをどのように結んで使うか、というのが、ポイントです。これについては、人類の長い経験に基づき、目的に応じた様々な結び方が知られています。ある場合には、絶対にほどけない結び目が必要となりますし、また、ある場合には、ほどきやすい結び目が便利です。

駒結び、あるいは、かた結びと呼ばれる結び方は、ひもの両端を引っ張るだけでは絶対にほどけないのに対し、蝶結びでは、両端を引っ張るだけで、そのひもがほどけてしまいます。従って、この2つの結び方には、どこか本質的な違いがあるはずです。

数学の結び目理論においては、どのような結び方はほどけ、どのようにするとほどけないのか、ということを研究しています。このようなことは、ひもを引っ張るだけですぐわかりそうですが、実際には摩擦などがあり、うまく緩めればほどけるが、そうでないととてもほどけそうにない、という結び目もたくさんあります。昨年フィールズ賞をもらった V. Jones の仕事も、この、結び目がほどけるかどうか、という問題を解くためのものです。

彼の仕事を説明する前に、ひもを結ぶと言うこと、また、結んだひもがほどけるということを数学的にいうにはどうするかを説明しましょう。こま結びは、紐の両端を引っ張ってもほどけませんが、ひもの端を結び目のなかを通すことによってほどけます。このようなほどきかたは考えないようにするために、ひもの端は無限に遠いところにあると考えたり、さらには、ひもの両端が遠いところでつながっていると考えたりします。そして、このような紐を切ったりつないだりしないで、空間内で変形しても変らない性質を調べるのが結び目理論です。ほどける結び目とは、紐を切ったりつないだりせずにまっすぐな紐、あるいは単純なわっかに変形できる結び目のことなのです。

このような変形で不変な性質は今までも多く研究されていたのですが、Jones は、1984 年に新しい性質を発見しました。これは、現在 Jones 多項式と呼ばれています。このような、結び目の変形で不変な量を不変量と呼ぶのですが、Jones 多項式はこれまでの不変量とは多くの異なった性質をもち、大変な衝撃を巻き起こしました。

これまでは、Alexander 多項式と呼ばれる不変量が結び目理論の中心でした。Alexander 多項式は結び目の補空間の幾何（基本群）から定義されたものなのですが、Jones 多項式にはこれまでの位相幾何的な性質との関係はほとんどありません。彼は量子力学などで使う作用素環の研究から、組み紐群と呼ばれる、やはり、紐と関係した群のトレース、すなわち、観測期待値を定義しました。驚いたことに、これはほとんどそのまま結び目の不変量となったのでした。そのうえ、大変強力な不変量であり、もっとも簡単な単純リー群 $SL(2)$ と関係しており、さらに、統計物理的な解釈もあるのです。

そのため、これまで、どちらかというと数学のなかでも特殊な分野と考えられていた結び目理論が、一転して様々な数学や、理論物理学と結び付くこととなり、多くの研究者が結び目理論を意識するようになったのです。

その後、Jones 多項式は Witten により 3 次元多様体の不変量にも拡張され、現在なお活発に研究されています。