

静電場的解釈に基く代数方程式の解法とその応用

名古屋大学工学部 情報工学科 櫻井鉄也
杉浦 洋
鳥居達生

0. はじめに

解析関数の零点を求める反復解法の多くは、関数の近似と考えられる．そのような解法で古いものでは、17世紀後半のNewton-Raphson法（2次収束）やHalley法（3次収束）などがある．その後、19世紀末から1970年頃までの間に多くの人によって種々の公式があげられている．Traub [1] は従来あげられているいくつかの公式が、 $f(z)$ の逆関数 $f^{-1}(y)$ に対するPade近似において、分子と分母の次数を適当に組合せることによって得られることを示した．また、Nourein [2] は、 $f(z)$ に対する $(1, p)$ Pade近似の分子の零点を近似根とすることによって、 $p+2$ 次の公式を示しており、Newton法、Halley法は、この公式においてそれぞれ $p=0$ 、 $p=1$ の場合である．このほかにも、有理式による近似から、Pomentaleの方法 [3] やGarside, Jaratte, Mackの方法 [4] などが得られる．これらの方法はいずれも高次の公式が構成できるが、次数が上につれて近似式としてのモデルの不適當さが目立つようになる．我々は、静電場的なモデルから得られる有理式を用いて反復公式を導く．この方法は従来の方法と比べて、反復回数が少なく、問題による反復回数のばらつきも小さいことが数値実験により確かめられた．後半ではこの有理式による近似を用いて代用電荷法の電荷点の配置を求める方法を示す．

1. Pade近似による反復解法

まず、Pade近似を使って $f(z) = 0$ の根を求めるための反復公式を構成する方法を示す． $f(z)$ は解析的で z_0 は $f(z)$ の零点に十分近いものとし

$$f(z) = f(z_0 + t) = g(t)$$

とする． $g(t)$ を分子が q 次、分母が p 次の有理式（これを (q, p) Typeと呼ぶことにする）によって近似する．点 z_0 での $p+q$ 階導関数まで一致するように有理式を決めるとこれは $g(t)$ に対する (q, p) Pade近似となる．ここで

有理式 $R(t)$ は

$$R(t) = \frac{Q(t)}{P(t)},$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^p P_i t^i, \quad P_0 = 1,$$

$$Q(t) = \sum_{i=0}^q Q_i t^i$$

である。この近似した有理式の分子 $Q(t)$ の零点を求める。 $Q(t)$ は q 次の多項式であるから q 個の零点があり、それらを $d_1, d_2, \dots, d_q$ とする。 $d_1 \sim d_q$ の中でその絶対値が一番小さいものを d として、新しい近似根は $z' = z_0 + d$ で得られる。

1.1 $f(z)$ に対する $(1, p)$ Padé 近似による方法

$Q(t)$ の零点を求めるときの簡便性から

$$Q(t) = Q_0 + Q_1 t$$

として修正量を

$$t = -Q_0 / Q_1$$

で求める方法がよく用いられている。この、分子を 1 次式に固定する方法を $(1, p)$ Type と呼ぶ。分子と分母の次数 q, p の組合せはいろいろありうるが、Padé 近似から導出される方法のうちで従来からある方法はほとんどが分子の次数 $q = 1$ として p を変えることで得られる。この方法の一般化は Nouredin [2] によっておこなわれた。分母の次数によって表 1. のような公式を得る。

p	d	Name
1	$z - u$	Newton
2	$z - u (1 - u D_2 / 2)$	Halley
3	$z - u (1 - u D_2 / 2) / (1 - u D_2 + u^2 D_3 / 6)$	Kiss
4	$z - u (1 - u D_2 + u^2 D_3) / (1 - 3 u D_2 / 2 + u^2 D_3 + u^2 D_2^2 / 4 - u^3 D_4 / 24)$	Nouredin

$$u = u(z) = f(z) / f'(z), \quad D_r = f^{(r)}(z) / f'(z)$$

表 1.

1.2 $f(z)/f'(z)$ に対する $(1, p)$ Padé 近似

$f(z)$ が多重根を持つ場合や、根の集団 (cluster) がある場合には、 $f(z)$ をそのまま用いると収束の次数がおち、反復回数が多くなってしまう。それをさけるために、 $f(z)$ のかわりに $f(z)/f'(z)$ に対して近似することを考える。この関数の零点はすべて1位であるが、極も持っているために Taylor 展開を用いた近似ではうまくいかない。そこで、有理式によって近似をおこない、その分子の零点を近似根とする。Garside, Jarrot & Mack [4] は $f(z)/f'(z)$ に対して '1次式/p次式' で有理補間して分母の1次式の零点を近似値とする方法を示している。また、Pomentalé [3] は有理近似とは別の観点から修正量を求める式

$$d_k = (k-1) \frac{(f'/f)^{(k-2)}}{(f'/f)^{(k-1)}}, \quad k = 2, 3, \dots$$

を示しているが、これは $f(z)/f'(z)$ に対する $(1, p)$ Padé 近似からも求めることができる。 $(1, p)$ Type 以外は一般に2次以上の代数方程式を解く必要があり、方程式を解く手間の問題からか、使われていない。しかし、 $(1, p)$ Type の場合でも $f(z)/f'(z)$ の $2p-1$ 階導関数まで計算する必要があり、その手間と比べれば低次の代数方程式を解く手間は小さい。また、関数 $f(z)/f'(z)$ は m 個の零点 ($m \leq n$) と $m-1$ 個の極を持っているが、 $(1, p)$ Type の近似はこれを1個の零点と p 個の極で近似しており、 p を大きくすれば局所的には近似の次数は上るが対象とする関数とはかなり形が異なる。これに対して、静電場的なモデルから得られる方法は $f(z)/f'(z)$ を p 個の零点と $p-1$ 個の極で近似していることになる。

2. 静電場的解釈

n 次代数方程式 $f(z) = 0$ の根を $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ とし、その多重度をそれぞれ $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ とすると

$$f(z) = \prod_{i=1}^n (z - \zeta_i)^{\mu_i}$$

ここで、 $e(z) = f'(z)/f(z)$ とおくと

$$e(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{z - \zeta_i}$$

である。これを、2次元平面上での電場の式との対応から、点 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ にそれぞれ電荷量 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ の電荷を置いたときに点 z で観測される電場とみる。この観点から2, 3の方法を設計してみよう。

2.1 $f(z)$ に対する $(p, 0)$ Padé 近似

いちばん単純な場合は、点 z で観測した電場 $e(z)$ が、点 α にある単位電荷のみによってつくられているとするもので、そのときの式は

$$\frac{1}{z - \alpha} = e(z) \quad (\text{方法 1})$$

これより、修正量 $d = z - \alpha$ は

$$d = \frac{1}{e(z)} = \frac{f(z)}{f'(z)}$$

となる。これは、Newton法である。

Newton法がうまくいかない簡単な例は

図1. のようなときである。

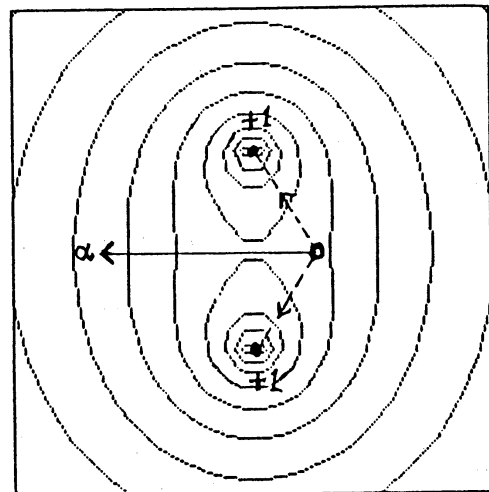


図1.

これを回避するために、単位電荷が2つあるとする。この場合、

$$\frac{1}{z - \alpha_1} + \frac{1}{z - \alpha_2} = e(z) \quad (\text{方法 2})$$

である。この式と、両辺を一回微分した式から、 α_1, α_2 を求める。これは、2次方程式

$$\{e^2(z) + e'(z)\}x^2 - 2e(z)x + 2 = 0$$

を解いて得られるが、 e, e' のかわりに f, f', f'' であらわすと

$$(f''/2)x^2 - f'x + f = 0$$

となり、2次のTaylor展開法である。一般に、 p 次Taylor展開法は、点 z で観測した電場が、 p 個の単位電荷からつくられているとした場合と一致する。

つまり、単位電荷が p 個あると仮定したモデルからは

「 $f(z)$ に対する $(p, 0)$ P a d e 近似」

を得る。

2.2 $f'(z)/f(z)$ に対する $(p-1, p)$ P a d e 近似

つぎに、電場をつくっているのが単位電荷ではなく、電荷量が μ_1 であるとする。

この場合、電荷が2個のときの式は

$$\frac{\mu_1}{z - \alpha_1} + \frac{\mu_2}{z - \alpha_2} = e(z) \quad (\text{方法 3})$$

である。 α_1, α_2 を求めるために $e(z)$ の3階導関数までを用いる。これは、

「 $e(z) = f'(z)/f(z)$ に対する $(1, 2)$ P a d e 近似」

となる。この近似式の分母(2次式)の零点を求めることにより、修正量 $z - \alpha_1, z - \alpha_2$ を得る。局所的な近似をもとにしているので、修正量の小さい方を近似根として採用する。一般に、 p 個の電荷の場合には

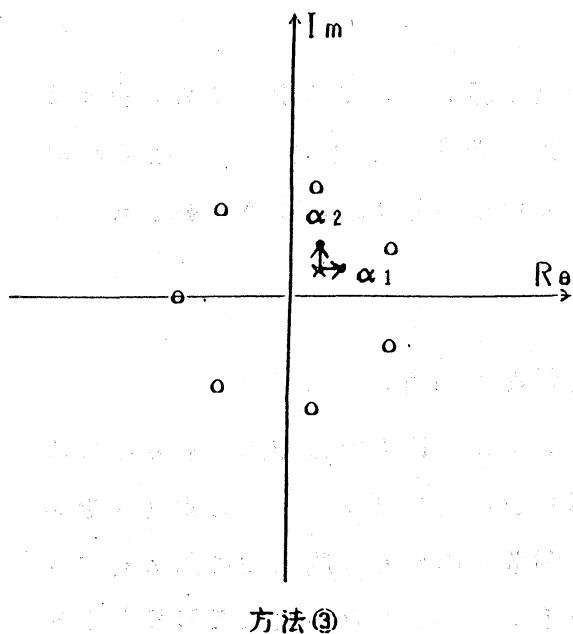
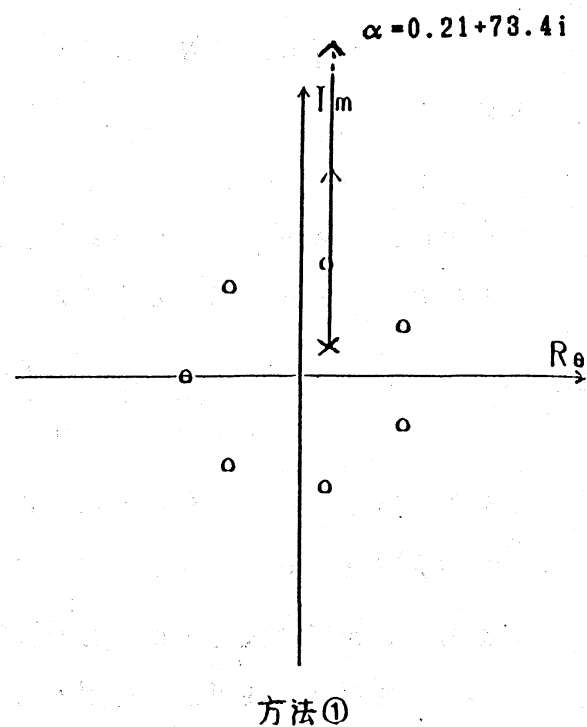
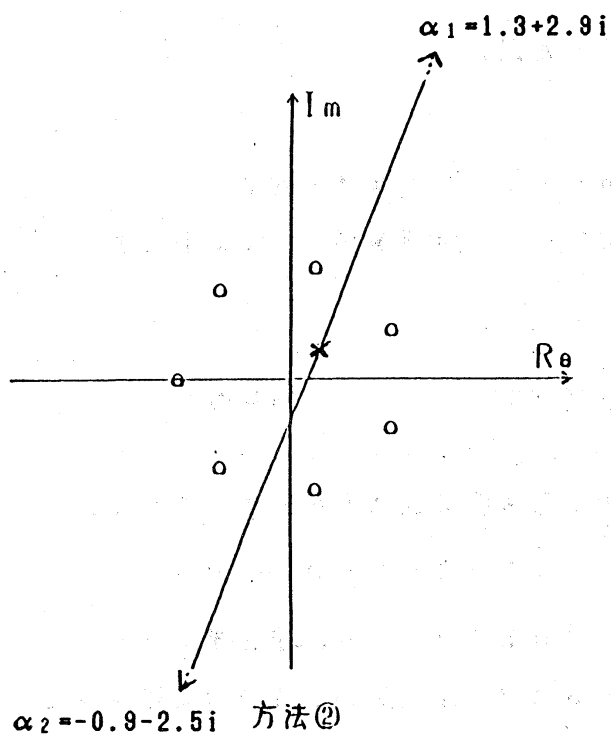
「 $f'(z)/f(z)$ に対する $(p-1, p)$ P a d e 近似」

となる。

方法1, 2, 3について $f(z) = z^7 - 1$ で例を図2, 3に示す。この多項式は N e w t o n 法の場合、 $|z| < 1$ では修正量が非常に大きくなり、近似根の“飛び”をおこす。また、 $|z| > 1$ では原点に n 重根があるかのように振るまう。

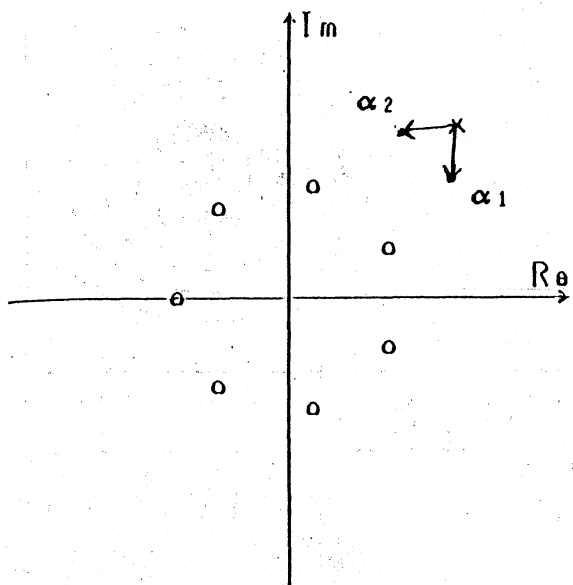
2.3 (q, p) の組合せによる大域的な近似能力の違い

近似する有理式の分子と分母の次数の組み合わせによる近似能力の違いを見るために、 $f'(z)/f(z)$ に対する P a d e 近似において、 (q, p) の組合せをかえたときの近似式の値の絶対値を図4に、被近似関数との誤差の絶対値の対数を図5に示す。①～④は6次、⑤, ⑥は4次の近似である。これらの近似式は R E D U C E を用いて $q - d$ A l g o r i t h m により導出し、F O R T R A N の関数副プログラムとしてファイルに出力するようにした。

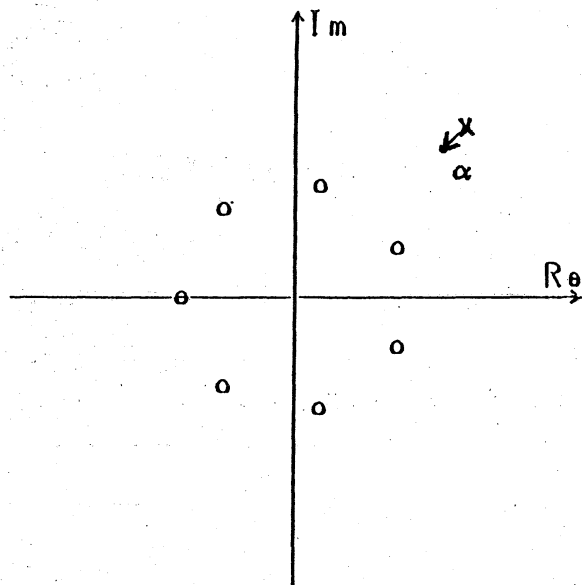


初期値 $z = 0.25 + 0.25i$
 方法①, 方法②ともに近似根は大きく飛ぶ.

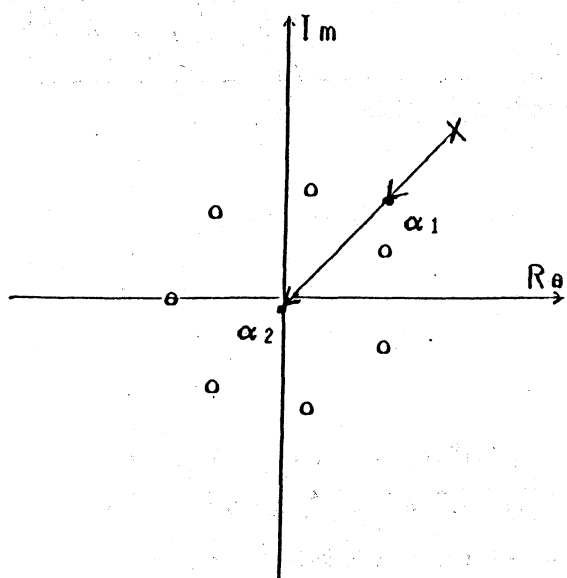
図 2 .



方法②



方法①



方法③

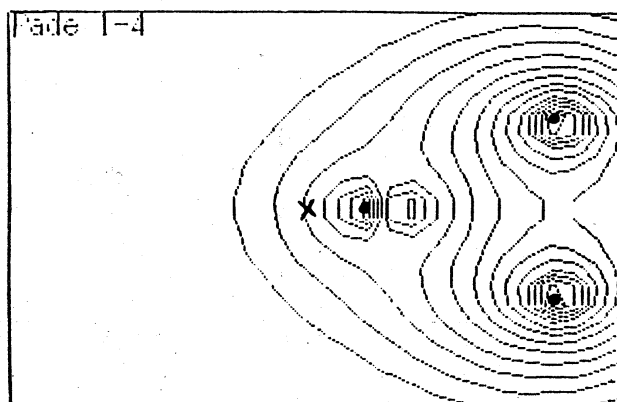
初期値 $z = 1.5 + 1.5i$
 方法①は修正量が小さい。方法③は
 1回の反復で根にかなり近づく。

図 3 .

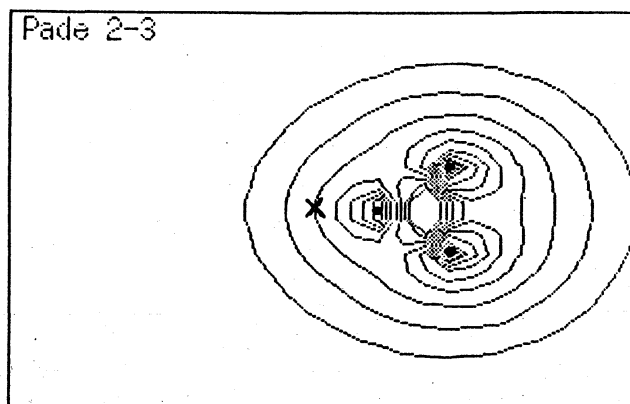
$$\mu_1 = -0.072 - 0.082i$$

$$\mu_2 = 7.024 + 0.035i$$

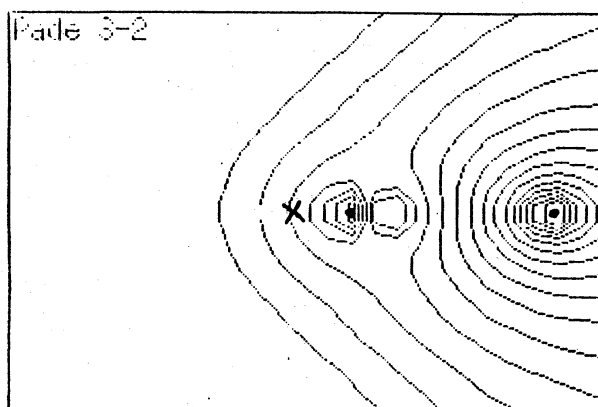
(1, 4) Type



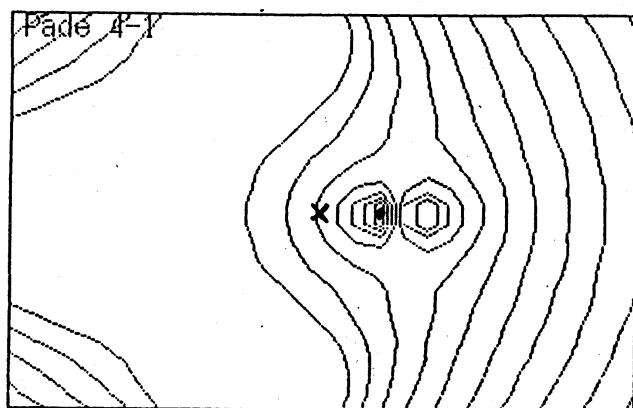
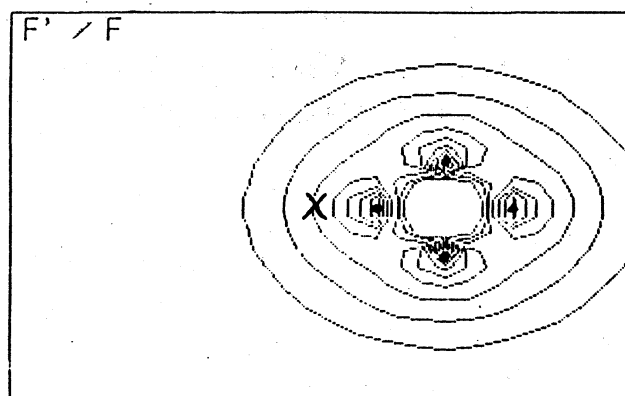
(2, 3)



(3, 2)



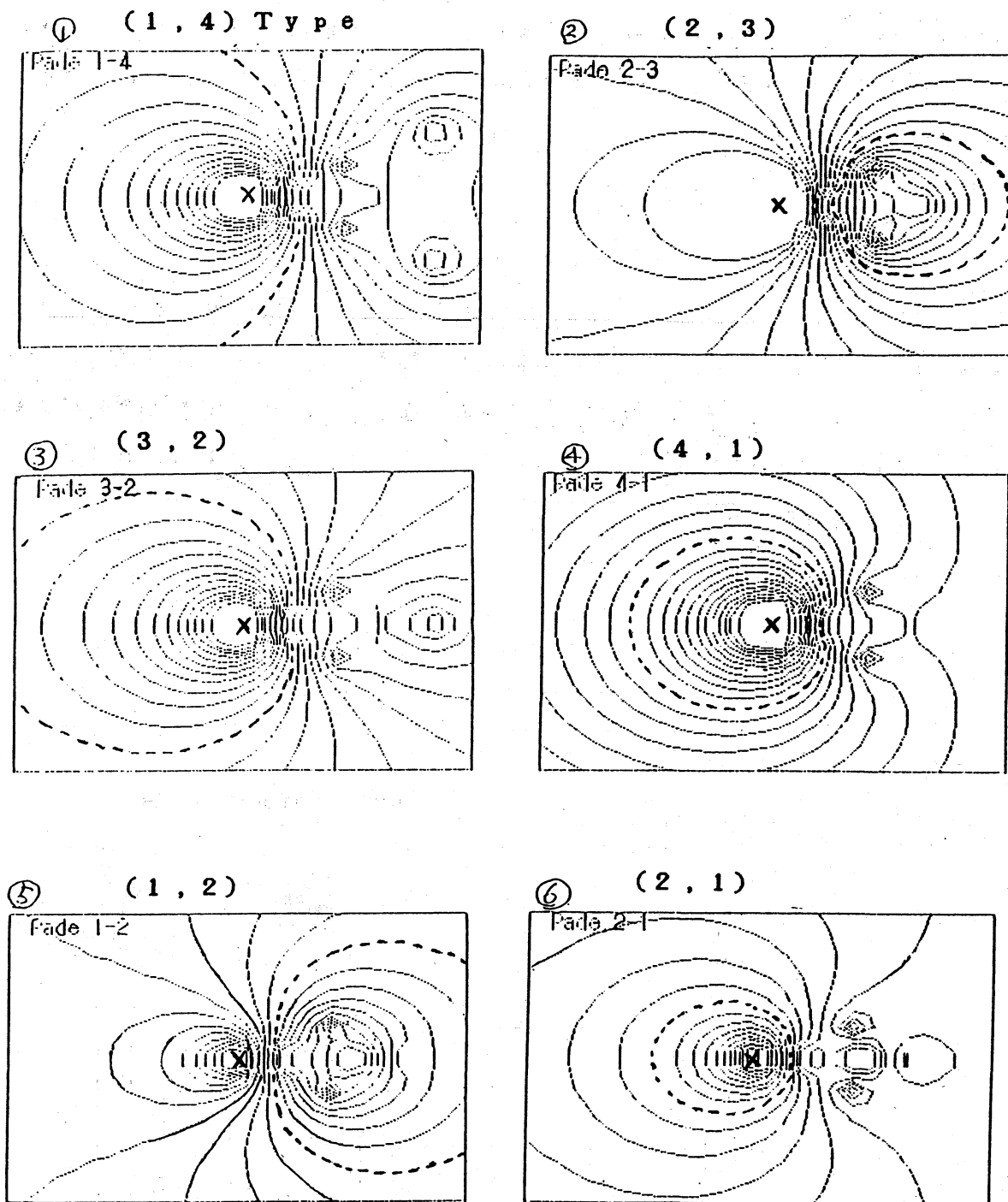
(4, 1)

 $f'(z)/f(z)$ 被近似関数 $f'(z)/f(z)$

$$f(z) = z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 5$$

 $z = 0$ において近似している。

図 4 .



破線は誤差 10^{-1} の等高線を表わす。

図 5 .

2.4 反復回数の比較

反復回数を他の方法と比較した結果を図6に示す。10個の多項式に対して、それぞれ根ごとの反復回数の最大値と最小値および平均の反復回数をグラフにしている。用いた方法は

- a. 静電場モデルによる方法
- b. Pomentaleの方法 ($k=4$)
- c. Nouredinの方法 ($p=3$)

で、a, bは4次, cは5次の方法である。実験に用いた多項式は、次数 $n=15$ で、領域 $(0, 10) \times (0, 10)$ に乱数で根を配置している。根は領域内に一様に分布しているが、分布に偏りがあるものや、領域を変えたばあいでもほぼ同様の結果を示した。乱数は名古屋大学数学ライブラリーの中のサブルーチンRANDOMを用いた。

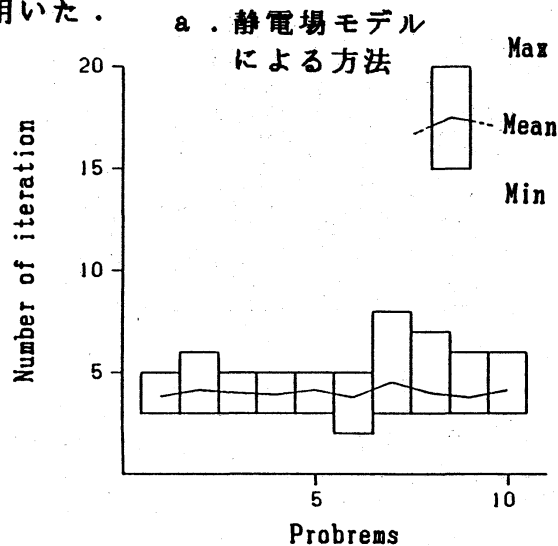
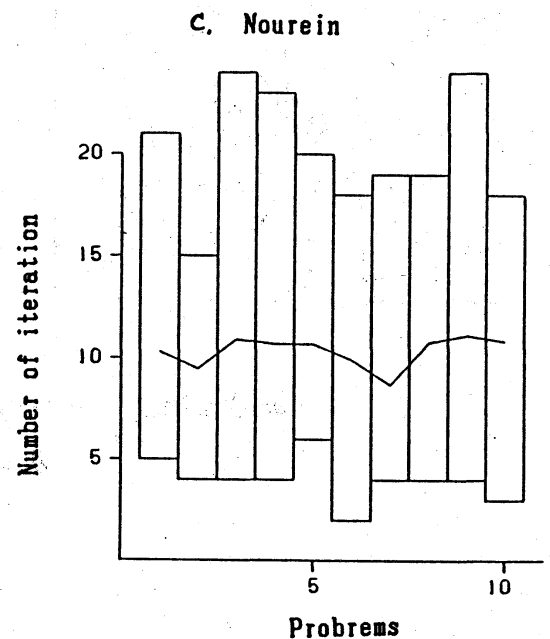
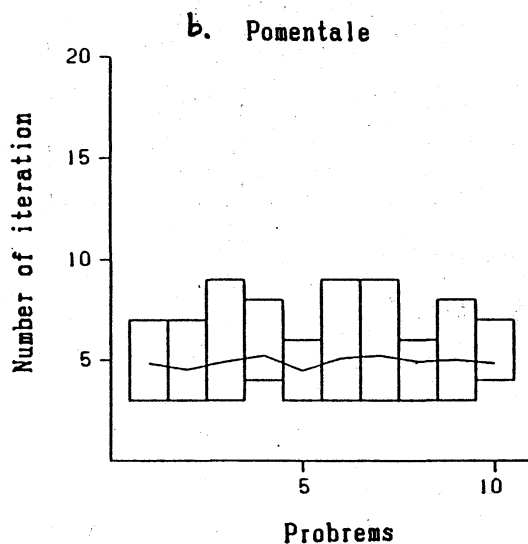


図6. 反復回数の比較



3. 静電場的解釈の応用

我々は静電場的解釈によって、 $(p-1, p)$ Type の有理式による近似と電荷を配置して電場を近似することを同一視できることを見てきた。ここでは、その観点を代用電荷法に応用する。

3.1 代用電荷法

まず代用電荷法について説明する。代用電荷法の代表的な例は、単位電荷と導体を図7のようにあるときの導体の内部のポテンシャルを求める問題である。図8のように境界の外部にいくつかの電荷を配置して、それによってできる等ポテンシャル線の一つが導体と一致するように電荷を決める。

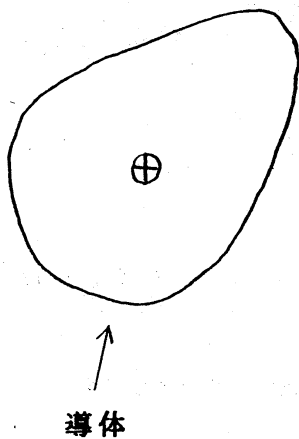


図7.

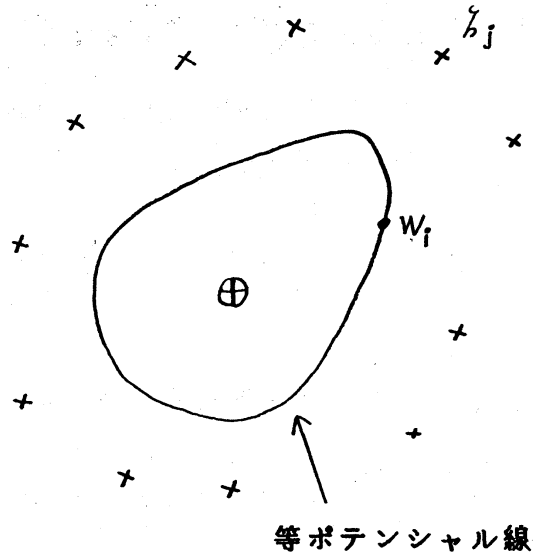


図8.

ここで、 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ は電荷点で、それぞれ $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ 電荷があるものとする。このとき、点 w でのポテンシャルは

$$U(w) = - \sum_{j=1}^n Q_j \log |w - \zeta_j| - \log |w|$$

と表わされる。電荷点 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ と境界上にとった拘束点 $w_1, w_2, \dots, w_n$ が与えられ、境界上でポテンシャルが0であるとする n 個の拘束条件

$$\sum_{j=1}^n Q_j \log |w_i - \zeta_j| = - \log |w_i|, \quad i=1, 2, \dots, n$$

より、電荷 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ が得られる。代用電荷法はこのように連立一次

方程式を解くだけでよいが、問題点として

- (1) 電荷点の配置
- (2) 角を持った領域
- (3) 拘束点の配置

などがある。我々は、 $(p-1, p)$ Type の有理式によって電場を近似することにより、自動的に電荷点の配置が得られる方法を構成し、特に領域が角を持つときの電荷点の配置を求めている。

3.2 有理補間による代用電荷法

[アルゴリズム]

- 1) 問題領域に対応する電場 $E(z)$ を求める。
- 2) $(p-1, p)$ Type の有理式 $R(z)$ によって $E(z)$ を近似する。
ここで $R(z)$ は

$$R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} + \frac{1}{z}$$

である。

- 3) 得られた有理式 $R(z)$ を部分分数展開する。すると $R(z)$ は

$$R(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{z - \zeta_i} + \frac{1}{z}$$

のように表わされる。

- 4) これより点 z でのポテンシャルは

$$U(z) = - \sum_{i=1}^n \mu_i \log \left(1 - \frac{z}{\zeta_i} \right) - \log z$$

で得られる。

これを行うには、電場 $E(z)$ を求める必要がある。ここでは、代用電荷法を用いる方法と等角写像を用いる方法の2つの例を示す。

3.3 代用電荷法を用いる方法

十分大きな N の代用電荷法を用いて

$$U(z) = - \sum_{j=1}^N Q_j \log |z - \zeta_j| - \log |z|$$

より電場 $E(z)$ を求める。このとき、電荷点は境界を拡大した線上や円周上などに

適当にとる．これは、大きな N により得られた結果を用いてその精度と同程度の精度をそれより小さな n により達成することになる．これを、正方形領域を例にして説明する．まず、通常の代用電荷法を用いた場合の誤差を示す．表 2 のうちまん中の列は境界を拡大した正方形の辺上に電荷点をとったもの（図 8）、右の列は円周上にとった場合（図 9）である．誤差は境界上でのポテンシャルの変動の最大値をとっている．

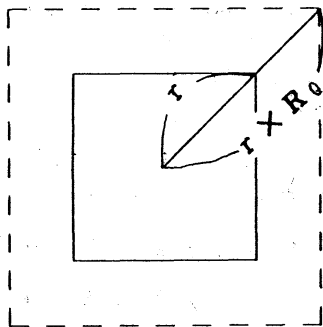


図 8 . 境界拡大上

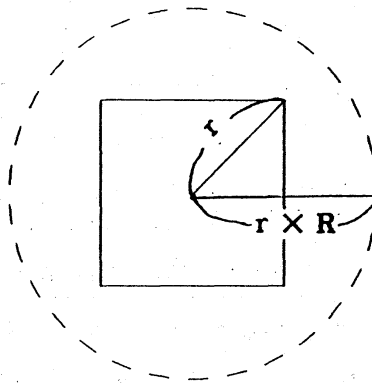


図 9 . 円周上

N	square $R_Q = 1.7$	circle $R = 1.4$
8	2.0×10^{-1}	2.1×10^{-1}
16	1.6×10^{-2}	6.4×10^{-3}
32	3.1×10^{-4}	7.8×10^{-5}
64	3.5×10^{-7}	1.7×10^{-8}
128	1.7×10^{-13}	4.4×10^{-13}
256	1.9×10^{-14}	3.3×10^{-14}

表 2 . 代用電荷法

n	error
4	1.0×10^{-3}
8	3.1×10^{-7}
12	9.0×10^{-12}
16	2.6×10^{-14}
20	1.0×10^{-12}

表 3 . 有理補間を使った場合

表 3 は $N = 256$ の代用電荷法の結果を用いて電場を求め、これを有理補間することでポテンシャルを求めた結果である．この表を見ると $n = 16$ でほぼ $N = 256$ の代用電荷法の精度を達成している．この方法で求めた電荷点の配置を図 10 に示す．

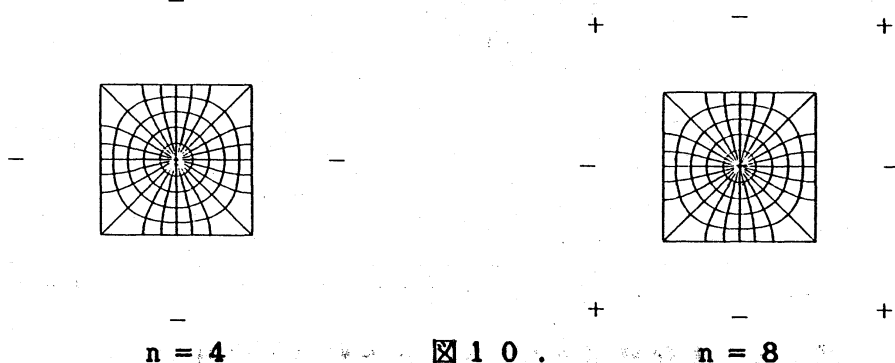
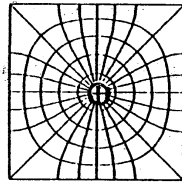


図 10 .

この電荷点の配置を見ると、表現が難しいはずの角の近くにはむしろ電荷を置いていない。この配置について考察してみる。



導体～等ポテンシャル線

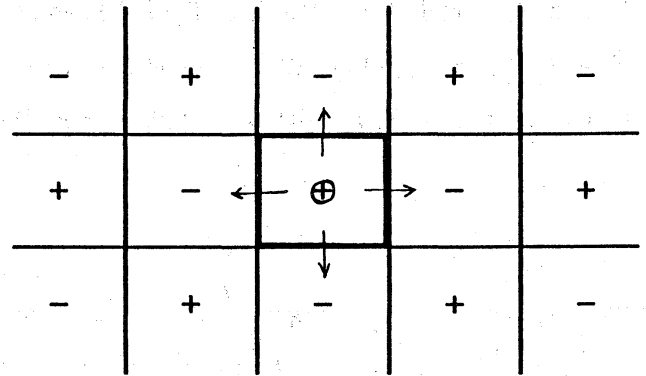


図 1 1 .

代用電荷法においては、導体と等ポテンシャル線は同じとみなせる。また、導体と点電荷によってできるポテンシャルは鏡像原理によって2つの点電荷によってできるポテンシャルに置換えられる。これにより、中心にある+1の電荷の鏡像は、図11のようにまわりの導体と対称の位置の-1の電荷である。さらに、これらの負の電荷の鏡像がそのまわりに展開でき、これを繰り返すと平面上に規則正しく+と-の電荷が配置される。正方形領域のポテンシャルを代用電荷法で求めることは、 n 個の電荷でこの無限にならんだ電荷によってできるポテンシャルを近似していることになる。Pade近似を用いた方法で求めた電荷点の配置を $n=16$ の時で図12に示す。

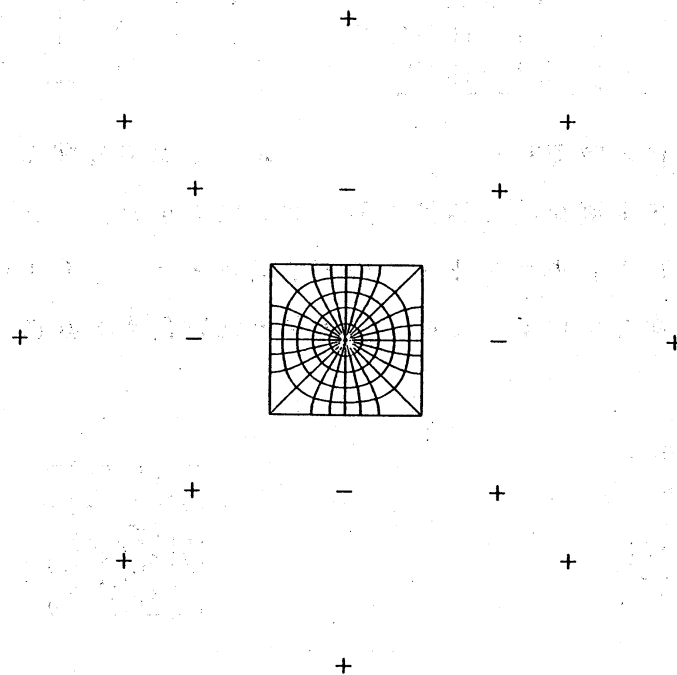


図 1 2 . 有理補間を用いて求めた電荷の配置

3.4 等角写像によって電場を求める方法

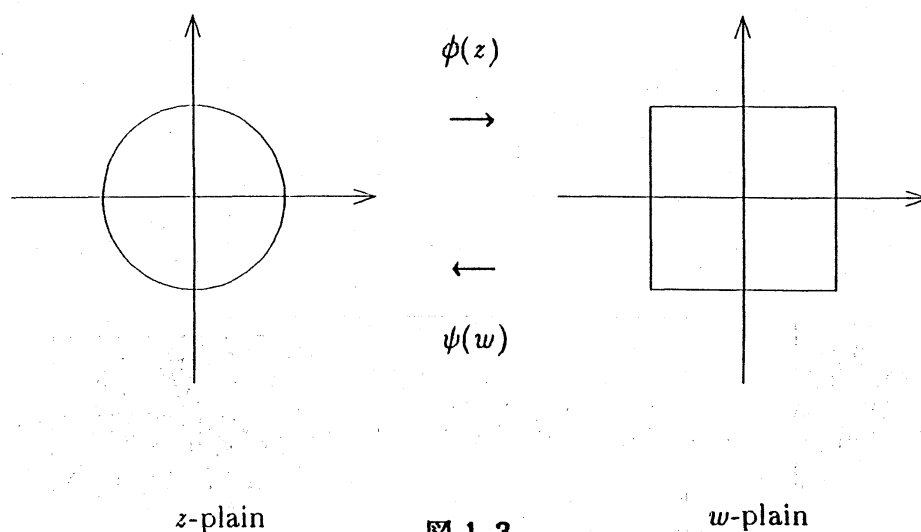


図 13 .

単位円から問題領域への等角写像を $\phi(z)$ 、その逆写像を $\psi(w)$ とする。このとき、 w 平面上の点 w でのポテンシャルは $\psi(w)$ を使って

$$U(w) = -\log \psi(w)$$

と表わされる。電場は

$$E(w) = -\frac{dU}{dw} = \frac{\psi'(w)}{\psi(w)}$$

となる。 $\psi(\phi(z)) = z$ 、 $\psi(w) = z$ より

$$E(w) = \frac{1}{z \phi'(z)}$$

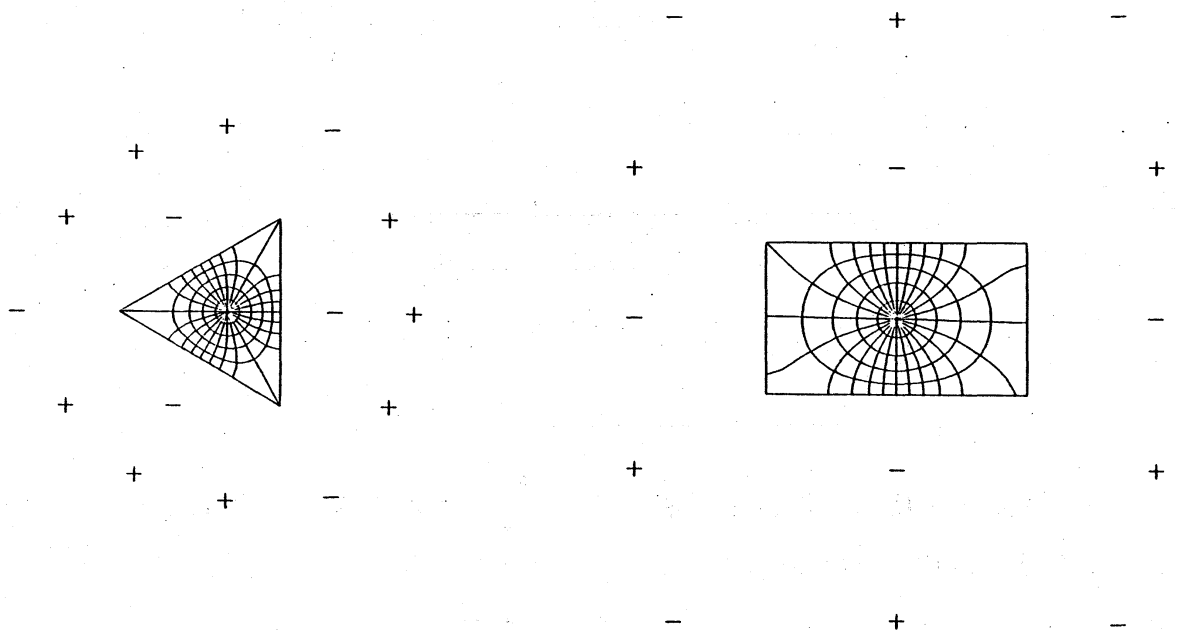
のようになる。とくに、 $\phi(z)$ が Schwarz-Christoffel 変換の時には

$$\phi(z) = C \int_0^z \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{z'}{z_i}\right)^{-\beta_i} dz'$$

であるから、 $\phi'(z)$ は簡単に計算でき、電場 $E(w)$ は

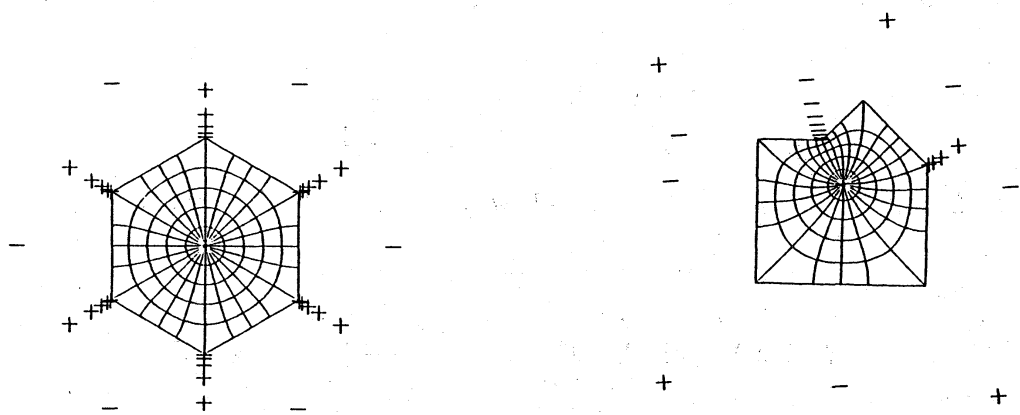
$$E(w) = \frac{1}{z \phi'(z)} = \frac{1}{z C} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_i}\right)^{\beta_i}$$

で得られる．これを用いたいくつかの結果を示す．



$n = 15$ $\text{error} = 1.4 \times 10^{-9}$

$n = 16$ $\text{error} = 6.0 \times 10^{-13}$



$n = 36$ $\text{error} = 1.0 \times 10^{-4}$

$n = 28$ $\text{error} = 4.1 \times 10^{-4}$

図 14 .

3. 等角写像の逆写像への応用

代用電荷法を用いて問題領域から単位円への等角写像を求める方法を天野[5]が示している。そのアルゴリズムは

- 1) 代用電荷法によってDiraclet問題

$$\nabla^2 g(w) = 0, \quad w \in D.$$

を解く。

- 2) $g(w)$ の共役調和関数である $h(w)$ を求める。

- 3) このとき問題領域から単位円への等角写像は

$$\psi(w) = w e^{g(w) + ih(w)}, \quad w \in \bar{D}.$$

によって得られる。

電場に対する有理近似を用いた方法では

$$U(w) = -\log \psi(w)$$

より

$$\psi(w) = e^{-U(w)}$$

となる。この方法は電場の計算に単位円から問題領域への等角写像を必要とするため、この等角写像がすでにあるときにその逆写像を求める方法として用いることが効果的である。正方形から単位円への等角写像の例を示す。

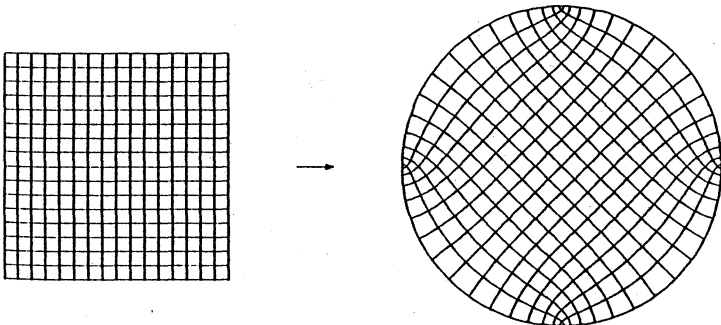


図 15 .

n	error
4	1.0×10^{-3}
8	3.1×10^{-7}
12	9.0×10^{-12}
16	2.6×10^{-14}

表 4 .

< 参考文献 >

- [1] Traub, J. F. : On a Class of Iteration Formulas and Some Historical Notes, Comm. Assoc. Comp. Math. 4(6), pp. 276-278 (1981)
- [2] Nourein, A. M. : Root Determination by Use of Pade Approximants, BIT 16, pp.291-297 (1976)
- [3] Pomentale, T. : A Class of Iterative Method for Holomorphic Functions, Numer. Math. 18, pp.193-203 (1971)
- [4] Garside, G. R., Jarrat, P., Mack, C. : A New Method for Solving Polynomial Equations, Comp.J. 11, pp.87-89 (1968)
- [5] 天野 要 : 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理, Vol.28, No. 7, pp. 697-704 (1987)