

接続問題について

京大 数研 大久保 謙一郎

§1. 序

常微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad \left(\begin{array}{l} x \text{ は } n \text{ 次元ベクトル} \\ t \text{ は複素変数} \end{array} \right)$$

において初期値 $t=0, x=x_0$ で右辺が正則であれば, 存在定理により, t_0 の近傍で $(t-t_0)$ の中に展開される解があり, その解析接続も又解である。従って複素領域では, 特異点に関する問題が意味の対象となる。解の全平面における行動を考察するのには, まず各特異点の近傍での局所的な解の表現から出発して, 次に点 $t=a$ における行動を不変解から, 別の特異点 $t=b$ までの区間における行動を調べる必要がある。これを接続問題という。一般に非線形方程式では, 即ち特異点から現われる可能性があり, 研究が困難であるのに対し線形の場合についてのみ述べる。この場合には点 $t=a$ における基本解系と, $t=b$ における基本解系との一次結合とを与える行列を計算することになる。

勿論，既に微分方程式に限定する必要はなく，一般にある
 式の近傍で与えられる比較要素が，解析接続されて特異点の
 近くでどの様なふるまいをするかという問題は整函数論にあ
 っては基本的な問題である。微分方程式では，比較要素の与
 え方と，考える方程式の解とするに何の結びつき，中級数展開と
 し解の与えられるれば，あとは整函数の理論と分けてしまう
 場合もある。

§ 2. 例

例 1. ガウス型微分方程式

$$t(1-t) \frac{d^2 x}{dt^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)t] \frac{dx}{dt} - \alpha\beta x = 0$$

は $t=0, 1, \infty$ に定常特異点を持ち，各点で 2 つの独立な解の組

$$\begin{cases} \varphi_0 = 1 + O(t) \\ \psi_0 = t^{1-\gamma} \{1 + O(t)\} \end{cases} \quad (t=0)$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = 1 + O(t-1) \\ \psi_1 = (t-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \{1 + O(t-1)\} \end{cases} \quad (t=1)$$

$$\begin{cases} \varphi_\infty = t^\alpha \{1 + O(\frac{1}{t})\} \\ \psi_\infty = t^\beta \{1 + O(\frac{1}{t})\} \end{cases} \quad (t=\infty)$$

を持つことが容易に確かめられる。接続問題とは，これらの
 解の間の一次関係，たとえば

$$\begin{cases} \varphi_0 = c_1 \varphi_1 + d_1 \psi_1 \\ \psi_0 = c_2 \varphi_1 + d_2 \psi_1 \end{cases}$$

を計算することである。この場合上の関係式と接続公式とを用いる。接続公式を計算することは、この場合方程式の元/ドロミ一群を計算することによって行っていることに注意しよう。

例2. Weberの方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - t^2 x = \lambda x.$$

は $t=0$ と真性不確定特異点として持つ解がある。解は実数上に限定して $t \rightarrow \pm\infty$ で各々

$$\begin{cases} \varphi_1 = O(e^{-\frac{t^2}{2}}) \\ \psi_1 = O(e^{\frac{t^2}{2}}) \end{cases} \quad (t \rightarrow +\infty)$$

$$\begin{cases} \varphi_2 = O(e^{-\frac{t^2}{2}}) \\ \psi_2 = O(e^{\frac{t^2}{2}}) \end{cases} \quad (t \rightarrow -\infty)$$

というふるまいをする独立解の組が存在することから、易所的な不確定特異点の議論から確かめられる。接続公式

$$\varphi_1 = c \varphi_2 + d \psi_2$$

が計算出来たとしよう。こゝで、 c, d は共に方程式の係数 $t - t - \lambda$ に関係して定まる定数である。

元とせば, $(-\infty, \infty)$ において可積分分解が存在する元の
パラメータの値を計算するには, $\alpha(\lambda) = 0$ とおけばよい。
勿論, これは特異境界値問題における固有値の分布を与える
ことになる。

この例に接線公式の係数を計算するに, 単に数値解析的
な手段を用いて数値的に計算する, あるいは意味が場合が多いの
で, 以下の議論では数値的なことは議論しない。又例 1 の場
合でも, $t=0$ の中級教展開と $t=1$ の中級教展開の収束用が
異なるから, そこで数値計算をすれば, 接線公式は計算され
るのは自明の理である。

例 3. 例 2 の基本解のなかに φ_1 と φ_2 が同じ解でないという
がわかる(自明の理ではない)ことを示すために次の方程式を
考える。

$$\frac{dx}{dt} - 2tx = 1$$

解

$$x_0(t) = -e^{t^2} \int_t^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau$$

は漸近値と一回く積分を評価すればわかる係数に追加の
方向で ∞ に近づくとき

$$x_0(t) = O\left(\frac{1}{t}\right) \quad (t \rightarrow +\infty)$$

となる解がある。——積分と積を互いに

$$\begin{aligned}
 x_0(t) &= -e^{t^2} \int_0^\infty e^{-\tau^2} d\tau + \int_0^t e^{t^2-\tau^2} d\tau \\
 &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{t^2} + e^{t^2} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau \\
 &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{t^2} - e^{t^2} \int_{-\infty}^0 e^{-\tau^2} d\tau + e^{t^2} \int_{-\infty}^t e^{-\tau^2} d\tau \\
 &= -\sqrt{\pi} e^{t^2} + e^{t^2} \int_{-\infty}^t e^{-\tau^2} d\tau
 \end{aligned}$$

とすれば、右辺中二項は $t \rightarrow -\infty$ で $O(\frac{1}{t})$ であるから一項は

無限に大なる項であって

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_0(t) = 0$$

であって

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_0(t) = -\infty$$

とあってよい。 $C e^{t^2}$ は同次方程式の一般解であることと

考慮に入れると、 t の正と負の場合(特殊解) $\sum_1^\infty b_n t^{-n} + C e^{t^2}$

における定数 C の値が変化していることになる。

一般に

$$\frac{dx}{dt} = (A + O(\frac{1}{t}))x$$

という形の線形方程式では、 $t = \infty$ は不確定特異点であって

$$x(t) = O(e^{\lambda t} t^k) \quad t \rightarrow +\infty$$

という形の解が存在しても $t \rightarrow -\infty$ には異なる行動を示す，これを Stokes 現象という。

不確定性原理における Stokes 現象の存在は，たとえは量子力学における $\hbar \rightarrow 0$ の極限で，流体力学での層流と乱流の転移の問題と密接な関係がある。又初項上の重要性と同時に，数値的には非常に複雑な性格をばらばらでいて，その解明は三階の二次方程式にあつては，ほとんど手のつけようもない意味を占めてゐる。

3. 接続問題に使われる手法。

解の大域的性質を調べるには，勿論解の表現が重要な役割を演ずる。古典的な方程式の接続を記述はほとんど積分表示からなされてゐる様に，基本的には，解の大域的表現はすべて積分表示に帰着される様に思われるが，方程式によつてあまりにも多様な積分表示があつて，特殊函数論を闇に混入せしめてゐるので，こゝではむしろ積分表示を影の主役にして話をする。

1. 常微分積分表示。これは / 史的に有用であることが確かめられてゐる Laplace 変換，Fourier 変換等を用ゐるもので，あれも可能な様に思われてゐるが，必ずしも役に立たない例をあげることにしよう。

系

$$t \frac{dX}{dt} = (A + tB)X$$

と考へる。 $t=0$ は確定特異点で行列 A の固有値 $p_1, \dots, p_n$ に
整数差のものを加へた $(p_j - p_k \equiv 0 \text{ となる } j \text{ は } j=k \text{ にかゝる})$
と仮定すれば

$$X_j(t) = t^{p_j} \sum G_j(m) t^m \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

という収束する n 個の解ベクトルが存在する。一方 $t=\infty$ は
一位の不確定特異点で B の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が相異なるものと
すれば

$$X^k(t) \sim e^{\lambda_k t} t^{\mu_k} \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s) t^{-s} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

という形の収束しない形の解が存在して、 $\arg t$ を充分さま
い範圍で、任意に固定すれば、 $t \rightarrow \infty$ で

$$\tilde{X}_0^k(t) \cong X^k(t) \quad (|\arg t - 0| < \delta)$$

となる解が存在する。接続問題は

$$X_0^k(t) = \sum_{j=1}^n S_j^k(\theta, \theta') X_j^k(t)$$

となる $S_j^k(\theta, \theta')$ を計算する一実接続と、

$$X_j(t) = \sum_{k=1}^n T_j^k(\theta) X_0^k(t)$$

となる $T_j^k(\theta)$ を計算する二実接続問題と $\Rightarrow$ あり、 $T_j^k(\theta), S_j^k(\theta, \theta')$

只に函数 Φ, Φ' についての不連続函数がある。Poincaré, Birkhoff
は x と t Laplace 変換を用いて,

$$(1) \quad X(t) = \int_C e^{t\sigma} \Phi(\sigma) d\sigma$$

という形の積分表示を求める。方程式に直接代入して,

$$0 = \left[(B-\sigma)\Phi(\sigma)e^{t\sigma} \right]_C + \int_C e^{t\sigma} \left[(A-I)\Phi(\sigma) - (B-\sigma)\Phi(\sigma) \right] d\sigma$$

だから積分路 C は

$$(2) \quad \left[(B-\sigma)\Phi(\sigma)e^{t\sigma} \right]_C = 0$$

$\Phi(\sigma)$ は

$$(3) \quad (B-\sigma)\Phi(\sigma) = (A-I)\Phi(\sigma)$$

の解とすれば良い。(2)が成立し(1)が0となる積分路 C は
系(3)の $\sigma = \lambda_k$ 多価^{多価}な解をとって、 ∞ から ∞ に $\sigma = \lambda_k$ と一周
してかえる道ととして良い。一方 $\Phi(\sigma)$ は ∞ で確率特異点と
して持つから、 C は $-\arg \lambda_k$ の方向に沿って、なければならない。
たとえは C が実軸の負の部分に沿って ∞ に行くならば、(2)
は $\operatorname{Re} t > 0$ のみ成立する。つまり半平面で解を表現すれば
 $t=0$ の全近傍を内部に含み得ないから接続問題に役に立つ大
域的な解の積分表示ではない。

大域的な積分表示を求めるには、多価性を持つ部分 $\lambda_k^{\beta_j}$ と
対にして

$$(1)' \quad x_j(t) = t^{p_j} \int_C e^{\sigma t} \Phi_j(\sigma) d\sigma$$

という表示を試みると、

$$(2)' \quad \left[(B - \sigma) t^{p_j} \Phi_j(\sigma) e^{t\sigma} \right]_C = 0$$

$$(3)' \quad (B - \sigma) \frac{d\Phi_j}{d\sigma} = (A - (p_j - 1)I) \Phi_j$$

α = 1 の条件より、 $\sigma = \infty$ で 1 個の解 $\Phi_j(\sigma)$ と定めて (1)' の解と任意の t に対して表示する。

一方 $\Phi_j(\sigma)$ は $\sigma = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ に確立特異点を持つから $\sigma = \infty$ で 1 個の解 $\sigma = \lambda_k$ で 2 つの解はかるまゝとするか、つまり α と α の系の接続問題か、積分変換によって、新しい系 (3)' の接続問題におまかせられるわけである。特に系 α の次元が 2 のとき (3)' は初等積分可能であるので、この場合は両方の系に対する接続問題は完全に与えられる。

6. 差分方程式を用いる方法。差分要素としての解は普通収束する巾級数によって与えられる。巾級数か微分方程式の解であるならば、その係数の満足するのは差分方程式であり係数のかるまゝかわかれれば、差分乃至は解のかるまゝ又かわかるはずである。是程の例とかない議論にやう。

$t=0$ における確定解

$$(4) \quad X_j(t) = \sum_{m=0}^{\infty} G_j(m) t^m \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

の係数 $G_j(m)$ は

$$(5) \quad (\rho_j + m - A) G_j(m) = B G_j(m-1)$$

を満足する。

差合方程式の理論によれば (5) は $m \rightarrow +\infty$ で

$$(6) \quad G_j^k(m) \cong \frac{\lambda_k^m}{\Gamma(\rho_j + m - \alpha_{jk} + 1)} H_k^{(0)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right\}$$

というふるまいをする n 個の一次独立な解がある。(5) の初期値問題

$$G_j(m) = \sum_{k=1}^n T_j^k G_j^k(m)$$

がとければ、あとに述べる W-F-N-H 理論によつて

$$X_j(t) \cong \sum_{k=1}^n T_j^k \chi_k^k(t) \quad \left(\bigcap_{k=1}^n \{t; |\arg \lambda_k t| < \frac{3}{2}\pi - \delta\} \right)$$

という形で接続問題の解が与えられる。

この場合、差合方程式 (5) の一次独立な n 個の解 (6) が、理論上は漸近的に 1 から与えられずに正確な値とある固定した m の値について計算するんでは、積分表示の値をもっと計算する必要があるので、必ずしも常に成功するとは限らず、

方程式の形に依存する。この例については、積分表示

$$G_j(m) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_C \sigma^{m-1} V(\sigma) d\sigma$$

を用いて、差分方程式を解くことが出来るので、比較的容易である。

係数の漸近的性質から、係数の漸近的性質と導くのは微分方程式論における中核的問題であるが、微分方程式論における様々な精細な結果は得られていない様に思われる。又、差分方程式の解の持つ周期1の係数の不定性や接点の現に及ぼす影響と詳細に論じている研究はないので、~~第4~~第4節で、その事と論ずる。

C. 初等解の構成による方法.

1913年, J. Hadamard は order 0 の Bessel 係数と不完全ガンマ係数に展開し, G. N. Watson はそれと任意の order の場合に拡張した。近年, 久々保, 河野はその手法と高階単独の方程式や, 系の場合に用いて, 特異点と0, ∞ に関する場合の一般論を展開している。

再び前の例にもどる。この方法の骨子は、各特異点において指定されたふるまいを示すもっとも簡単な係数を作り、これを用いて解を展開するというところにある。この場合

$$t \frac{dx_j^*(t,s)}{dt} = (\lambda_k t + a_{kk} - p_j - s) z_j^*(t,s) + c_j^k$$

という微分方程式の解 $x_j^k(t, s)$ は $t=0$ で一価正則なものである。簡単計算から

$$x_j^k(t, s) \cong e^{\lambda_k t} t^{a_{kk}-s} + O\left(\frac{1}{t}\right) \quad \left(t \rightarrow \infty \quad |\arg \lambda_k t| < \frac{3}{2}\pi\right)$$

となる。と仮定する。この形を解 $x^k(t)$ と作成するために、

$$x^k(t) \sim e^{\lambda_k t} t^{a_{kk}} \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s) t^{-s}$$

の係数 $H^k(s)$ を用いて

$$t^j \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s) x_j^k(t, s) = \xi_j^k(t)$$

とすれば、ほとんど t^j 形を解と同じかきまゝとする。この係数 $\xi_j^k(t)$

を作ることは出来る。勿論 $\xi_j^k(t)$ 自身は解ではなく、その一次

結合

$$\sum_{k=1}^n T_j^k \xi_j^k(t)$$

が始めの解になる。度同 $\xi_j^k(t)$ が収束することと示すのには

パラメータ ε を導入して

$$\sum H^k(s) x_j^k(t, s) \varepsilon^s = \Xi(t, \varepsilon)$$

を作りその満足する微分方程式 (ε についての) の特異点の

分布を調べることにより $\varepsilon=1$ とした場合の収束性を調べる。

この方法は

$$t \frac{dX}{dt} = \left(\sum_{r=0}^N A_r t^r \right) X$$

乃至は

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \sum_{k=1}^n p_k(t) \frac{d^{n-k} x}{dt^{n-k}} = 0$$

$$\left(p_k(t) = \sum_{r=-k}^{Nr} p_{kr} t^r \right)$$

の形の系について有効である。 ([], []))

一方特異点の数が3又はそれ以上の場合, 簡単な初等解を構成するのは困難なために今のところ特異点の数が2の場合にのみ用いられている。

§4. 微分方程式の解の任意性について。

係数の漸近的なふるまいから与えられた中級数の行部を記述するものの方法は整函数論における indicatrix や order の議論があるが, 微分方程式論ではもっと詳しく記述が必要であって, いろいろの方法が考えられている。古くは Perron や Koch の無限行列の議論, それと整函数に拡張した Wittich 等の研究 ([]) 等がある。こゝでは主に Barnes Integral とよばれる超幾何函数の積分表示と, いわゆる W-F-V-H 理論との関連において, 微分方程式の解として与えられた級数を考察することにする。

今 $\mu(w)$ と $w=0, 1, 2, \dots$ に位数1の極を持つ, ここで留数が1である函数とする。たとえは

$$\mu(w) = 2\pi i (e^{2\pi i w} - 1)^{-1}$$

はその標準な函数である。与えられた中級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) z^n$$

の係数 $g(n)$ が複素平面での解析函数として拡張されるものと

すれば、これと同じ記号 $g(w)$ で書くことにし、積分

$$F(z) = \int_C \frac{1}{2\pi i} \mu(w) \cdot g(w) z^w dw$$

を考える。こゝに積分路 C は $\mu(w)$ の極 $w=0, 1, 2, \dots, n, \dots$ と内部に含む確な道であるとする。 $g(w)$ の C 内にある極 β_j とすれば

$$F(z) = f(z) + \sum_j \{ \text{Res } g(w) \}_{\beta_j} z^{\beta_j}$$

である。

$z \rightarrow \infty$ における $f(z)$ の挙動を記述するには、積分路 C と適当に変形することから求めれば、たとえば C が虚軸に平行な直線で、原点から充分遠い所の $F(z)$ の積分が充分小さいといふ仮定の下に右半平面での積分と左半平面での積分に等しい。

$$F(z) \sim \sum g(-n) z^{-n}$$

の形に書き通せる可能性がある。

以上に述べた確な仮定は可成り、 $g(w)$ の growth の order と、 $\mu(w)$ の極積に依存するので、いろいろな $g(w)$ に対して適当な $\mu(w)$ と定める必要がある。その任意性が最終的な結果に影響を及ぼさないう保証も必要である。これらの議論が所謂 W-F-V-H 理論であって、その必要は数年前に紹介した。

微分方程式の接続問題に W-F-V-H 理論を応用する際の最大の

障害となるのは、 $g(n)$ の解析的延長と discrete な n と continuous な w -平面にどのような関係にしているかという問題である。これは

以外に複雑な問題となる。このことは、Bohr-Mollerup の定理

" $xg(x) = g(x+1)$ の解として (1) $x > 0$ は logarithmically convex (2) $g(0) = 1$

である実数値解は Γ -函数に限る" と見れば明らかである。

本来的なことは差分方程式と複素領域で与えられる理論は、この多項式係数の場合 G. D. Birkhoff の次の形で解決されている。

差分方程式系

$$g(x+1) = A(x)g(x)$$

で $A(x)$ は多項式と要素とする n 行 n 列の行列で

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\mu} A_k x^{\mu-k}$$

という展開の主要部 A_0 は相異なる固有値を持つものとする。

これら $p_1, p_2, \dots, p_n$ とすると形可解の行列

$$S(x) = x^{\mu x} S(x) \begin{pmatrix} (p_1 e^{-\mu})^x x^{r_1} & 0 & & 0 \\ 0 & (p_2 e^{-\mu})^x x^{r_2} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & (p_n e^{-\mu})^x x^{r_n} \end{pmatrix}$$

が存在する。 $S(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} S_r x^{-r}$

このとき2つの基本解行列 $G(x)$ と $H(x)$ があり、左右各半面で $S(x)$ に漸近的で、ある discrete な実集合を除いて正則な解の行列となる。

二つの解行列は周期1の周期函数と要素とする行列 $P(x)$ に

よって

$$G(x) = H(x) P(x)$$

よって j -項の係数は $P(x)$ の (j, k) 項 $p_{jk}(x)$ の π は

$$\begin{cases} p_{jj}(x) = 1 + \sum_{l=1}^{\mu-1} c_{jl} e^{2\pi i l x} + e^{2\pi i j x} e^{2\pi i \mu x} \\ p_{jk}(x) = e^{2\pi i j k x} \sum_{l=0}^{\mu-1} c_{jl} e^{2\pi i l x} \end{cases}$$

$$\lambda_{jk} = \left[\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} (\log p_j - \log p_k) \right]$$

これとは Γ -函数の場合に上記の定理を適用する。

$$g(x+1) = x g(x)$$

これより $\mu=1, n=1, p=1$, 簡単な計算より $\gamma = -\frac{1}{2}$, であるから, 左半平面で

$$G(x) \cong e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$$

となる解析的解と, 右半平面で

$$H(x) \cong e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$$

となる解が存在する。 Γ -函数に対する Stirling の公式

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

より

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} H(x)$$

が成立する。一方 $H(x)$ と $G(x)$ の関係式は

$$G(x) = (1 - e^{2\pi i x}) H(x)$$

は $\Gamma(x)$ の負の実軸上の展開である

$$\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \frac{1}{\Gamma(1-x)} \cong \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - e^{2\pi i x}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$$

から与えられること、一般する。

この形に、微分方程式の解と与えられる正整数の係数、
数、解析的に拡張され、任意は周期1の周期函数に限り、
この形に決めるば、左半平面から右半平面に解析接続可能で
あることがわかった。

以下の議論は一般に $t=0$ と $t=\infty$ に確定特異点を持つ、その
他の有限部分にある特異点も全て確定特異点である形の方
程に拡張出来るのであるが、接続点のかわり、このように
見て理解し易い Gauss の方程式

$$(1) \quad x(1-t) \frac{d^2x}{dt^2} + [t - (\alpha + \beta + 1)t] \frac{dx}{dt} - \alpha\beta x = 0$$

について議論することはする。まず方程式(1)を

$$(1)' \quad \frac{1}{t} \left[t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} \right] = t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha + \beta + 1)t \frac{dx}{dt} + \alpha\beta x$$

という形に書くことにする。微分作用素 $\delta = t \frac{d}{dt}$ を用いると、

$$(1)'' \quad \frac{1}{t} \delta(\delta - (1 - \delta))x = (\delta + \alpha)(\delta + \beta)x$$

と表わす。

$t=0$ の正則な解

$$(2) \quad x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} g(m) t^m$$

の $t=\infty$ におけるふるまいと論じよう。 $t=\infty$ には二つの独立な
確定解

$$(3) \quad \begin{cases} x_\alpha(t) = t^{-\alpha} \sum h_\alpha(s) t^{-s} \\ x_\beta(t) = t^{-\beta} \sum h_\beta(s) t^{-s} \end{cases}$$

m に対して, 係数 $\kappa_\alpha(s)$, $\kappa_\beta(s)$ は各々差分方程式

$$(A) \begin{cases} (-s)(-\alpha+\beta-s)\kappa_\alpha(s) = (-\alpha-s+\gamma)(-\alpha-s+1)\kappa_\alpha(s-1) \\ (-s)(-\beta+\alpha-s)\kappa_\beta(s) = (-\beta-s+\gamma)(-\beta-s+1)\kappa_\beta(s-1) \end{cases}$$

を満足し, $g(m)$ は

$$(5) \quad (-m+1)(m-\gamma)g(m) = (m+\alpha)(m+\beta)g(m)$$

を満足する。と置く。 (4) 2' ~~$-s-m+\alpha=\gamma$~~ とおくと, 実は同
一の方程式で係数と置きかえただけにすぎない。故にこれでおく。

差分方程式

$$(6) \quad (w+1)(w-\gamma)g(w+1) = (w+\alpha)(w+\beta)g(w)$$

の左半平面における解を $G(w)$, 右半平面における解を $H(w)$ とおくと, 以下に示すように,

$$\begin{cases} \kappa_\alpha(s) = G(-s-\alpha) \\ \kappa_\beta(s) = G(-s-\beta) \end{cases} \quad g(m) = H(m).$$

という式が成立する。無論 $g(m)$ の解析的延長 $g(w)$ は $H(w)$ であることは明らかである。又 $G(w)$ と $H(w)$ の関係は

$$(7) \quad G(w) = \frac{[1 - \exp\{2\pi i(w+\alpha)\}][1 - \exp\{2\pi i(w+\beta)\}]}{[1 - \exp\{2\pi iw\}][1 - \exp\{2\pi i(w+\gamma)\}]} H(w)$$

によって与えられる。

$$(8) \quad \kappa(\gamma) = \int_{-\varepsilon-i\infty}^{-\varepsilon+i\infty} \frac{H(w)}{e^{2\pi iw} - 1} t^w dw$$

と置いて積分路を右半平面から左半平面に移し, (7) を用

い) と同時に接続公式を導くことも出来る。

今 $H(w)$ の決定に任意の周期 1 の周期函数 $\pi(w)$ を加えることが

は $\pi(w)$ の Fourier 展開は

$$\pi(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{2\pi i k w} \quad (\pi(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k = 1)$$

とすると, その効果は (7) における分子の零点から生ずる留数, ($w = -\alpha - s$ 又は $w = -\beta - s$ において) 接続公式に

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \exp(-2\pi i k \alpha), \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \exp\{-2\pi i k \beta\}$$

として生ずる。

これは原点で定義された解 $\pi(\alpha)$ と A_k 倍して, 0 から 1 に至る cut とは同じく解を ∞ に接続した結果とみなせる。

つまり, 任意の周期函数倍の任意性は積分路の任意性に帰着された訳である。

参考文献

- [1.] Collected Mathematical Works G.D. Birkhoff
- [2.] K. OKUBO Stokes 現象 I, II F.E. 社内版
- [3.] H. Wittich Eindeutige Analytische Funktionen Springer
- [4.] Biebertach Gewöhnlichen Differentialgleichungen Springer
- [5.] Wilcox Asymptotic Solutions of Differential Equations Addison-Wiley
- [6.] Bachelier An Introduction to Linear Difference Equations Dover

