

空間 1 次元系における漸近減衰

京都大学・大学院情報学研究科 山口義幸

Yoshiyuki Y. Yamaguchi
Graduate School of Informatics, Kyoto University

1 はじめに

多数の粒子が長距離力によって 2 体間相互作用をする古典ハミルトン系は、初期状態からただちに熱平衡状態には緩和せず、準定常状態と呼ばれる状態に長時間留まり得ることが知られている [1, 2, 3]。準定常状態における滞在時間は粒子数の増大とともに長くなるため、楕円銀河など多数の粒子からなる系では、現実的には準定常状態しか観測できない場合もある。さらには、熱平衡状態とは異なり、準定常状態は初期状態の非保存量にも依存するため、与えられた初期状態に対して準定常状態を予測したり、準定常状態まわりのダイナミクスを知ることが重要となる。

準定常状態を研究する手法の一つは、1 体分布関数に対する Vlasov 方程式を用いることである。Vlasov 方程式は無衝突 Boltzmann 方程式とも呼ばれる。Vlasov 方程式による N 体系の解析は、粒子数 N が大きい極限で正当化される [4]。Vlasov 方程式に基づいた、初期状態から熱平衡状態への緩和のシナリオは次のようなものと考えられている [5]: まず、初期状態は Vlasov 方程式に従って準定常状態に到達する。つまり、準定常状態は Vlasov 方程式の安定定常解に対応すると考えられる。しかしながら、有限サイズ効果によって、無視していた衝突項が粒子数に依存する大きさで現れるため、系は粒子数に依存する時間スケールで熱平衡状態へと緩和していく。

上のシナリオに従うと、初期状態から準定常状態までの時間発展は Vlasov 方程式を用いれば良いことがわかる。実際、Vlasov 方程式が持つ保存則を考慮に入れた統計法則を用いて、与えられた初期状態が行き着く準定常状態を予言する非平衡統計力学が提唱されている [6]。また Hamiltonian mean-field (HMF) 系と呼ばれる系においては、熱平衡状態では起こらない 1 次相転移や三重臨界点の存在などが、この統計理論によって予言され数値的に検証されている [7]。

一方、準定常状態まわりのダイナミクスについては、与えた摂動が指数関数的に減衰する Landau 減衰がよく知られている [8]。Landau 減衰は定常状態が空間的

に一樣な場合を考察しており、自然な拡張として定常状態が空間的に非一樣な場合にどのような減衰が得られるかが問題となる。本報告では、空間1次元の系を考え、空間的に非一樣な安定定常状態に与えた摂動が、代数的に減衰することを示す [9]。

本報告の構成は次の通りである。まず考える N 体ハミルトン系と、それに対応する Vlasov 方程式を第2節で述べる。一樣な場合の Landau 減衰について第3節で復習した後に、非一樣の場合には代数的減衰が起こることを第4節で示す。最後に第5節でまとめを行う。

2 N 体ハミルトン系と Vlasov 方程式

本報告で考えるハミルトン系は、

$$H_N(x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \phi(x_i - x_j) \right] \quad (1)$$

なるハミルトニアンで記述される系とする。 $\phi(x)$ は2体相互作用を表す C^2 級偶関数とし、その前の $1/2N$ はエネルギーを示量的に、つまり $O(N)$ となるようにするための因子である。各粒子は1次元空間内を動くとし、 i 番目の粒子の位置を x_i 、その正準共役な運動量を p_i と書く。簡単のため、系は周期的境界条件を持ち、位置変数 x_i は $[0, 2\pi)$ で定義されているものとする。ただし以下の議論は、非周期的境界条件の場合にも拡張可能である [9]。

上記の N 体ハミルトニアン (1) に対応して、1体分布関数 $f(x, p, t)$ に依存した1体ハミルトニアンが

$$H[f](x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \Phi[f](x, t) \quad (2)$$

$$\Phi[f](x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_0^{2\pi} dy \phi(x - y) f(y, p, t) \quad (3)$$

と定義される。Vlasov 方程式は、この1体ハミルトニアンを用いて

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H[f], f\} = 0 \quad (4)$$

と書ける。ただし Poisson 括弧 $\{f, g\}$ は

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial p} \quad (5)$$

と定義されているものとする。

以降では、1体分布関数を安定定常状態 $f_0(x, p)$ とそのまわりの摂動 $f_1(x, p, t)$ によって

$$f(x, p, t) = f_0(x, p) + f_1(x, p, t) \quad (6)$$

と分け、 f_1 の時間発展を考える。ただし、 $f_0(x, p)$ も f_1 の初期値 $f_1(x, p, t=0)$ も解析的な関数で特異性はないとする。分布関数 (6) を Vlasov 方程式 (4) に代入し、1 次微小項を拾うと、線形化 Vlasov 方程式

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \{H[f_0], f_1\} + \{\Phi[f_1], f_0\} = 0 \quad (7)$$

を得る。この線形化 Vlasov 方程式によって、 f_1 の時間発展を考えることとする。

3 定常状態が空間的に一様の場合：Landau 減衰

定常状態が空間的に一様な場合には $\Phi[f_0]$ は定数であり、また $f_0(p)$ は x に依存しないから、線形化 Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + p \frac{\partial f_1}{\partial x} - f'_0(p) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

となる。ただし、 $\Phi_1 = \Phi[f_1]$ であり、 $f'_0(p)$ は $f_0(p)$ の導関数である。

線形化 Vlasov 方程式 (8) から f_1 の時間発展を求めるための基本戦略は次のとおりである。未知関数 f_1 の微分は t と x についてのみであるから、 f_1 を空間的に Fourier 級数展開、時間的に Laplace 変換すると線形化 Vlasov 方程式を代数的に解くことができる。簡単のため、これらの変換をまとめて Fourier-Laplace 変換と呼ぶ。 $f_1(x, p, t)$ を Fourier-Laplace 変換した結果を $\hat{f}_1(k, p, \omega)$ と書こう。興味があるのは f_1 の時間発展であるから、 ω の関数としての $\hat{f}_1$ の特異点と逆 Laplace 変換におけるその特異点からの貢献を考察する。ただし実際には、 $\hat{f}_1$ ではなく、 f_1 を p で積分した密度 $\rho_1(x, t)$ を Fourier-Laplace 変換した $\hat{\rho}_1(k, \omega)$ の特異点を考察することになる。

3.1 Fourier-Laplace 変換

基本戦略に則り、 f_1 を

$$\hat{f}_1(k, p, \omega) = \int_0^{2\pi} dx e^{-ikx} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} f_1(x, p, t) \quad (9)$$

と Fourier-Laplace 変換すると、線形化 Vlasov 方程式 (8) より $\hat{f}_1$ が従う方程式

$$\hat{f}_1(k, p, \omega) = \frac{k f'_0(p)}{kp - \omega} \hat{\Phi}_1(k, \omega) + \frac{-i \hat{f}_{1,\text{ini}}(k, p)}{kp - \omega} \quad (10)$$

を得る。ただし、Laplace 変換の収束を保証するため、関数 $\hat{f}_1(k, p, \omega)$ は $\text{Im } \omega > 0$ で定義されているとする。また $\hat{\Phi}_1(k, \omega)$ は $\Phi_1(x, t)$ を Fourier-Laplace 変換 (9) した結果であり、 $\hat{f}_{1,\text{ini}}(k, p)$ は初期状態の Fourier 係数

$$\hat{f}_{1,\text{ini}}(k, p) = \int_0^{2\pi} dx e^{-ikx} f_1(x, p, t=0) \quad (11)$$

である。

ここで、摂動 f_1 の初期状態に仮定を与えておく。初期状態 $f(x, p, t = 0)$ は $\hat{f}_{1,\text{ini}}(k, p)$ によって

$$f(x, p, t = 0) = f_0(p) + \frac{1}{2\pi} \hat{f}_{1,\text{ini}}(0, p) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \hat{f}_{1,\text{ini}}(k, p) e^{ikx} \quad (12)$$

と書ける。任意の空間一様状態は Vlasov 方程式 (4) の定常解であるから、初期状態 (12) の右辺第2項は興味がある定常状態 $f_0(p)$ を別の定常状態 $f_0(p) + \hat{f}_{1,\text{ini}}(0, p)/(2\pi)$ に変更してしまう。そこで、

$$\hat{f}_{1,\text{ini}}(0, p) = 0 \quad (13)$$

と仮定する。

$\hat{f}_1$ の式 (10) と Φ の定義 (3) を連立させて解こう。まず、 Φ_1 を Fourier-Laplace 変換すると

$$\hat{\Phi}_1(k, \omega) = \phi_k \hat{\rho}_1(k, \omega) \quad (14)$$

を得る。ただし、 ϕ_k は二体相互作用の Fourier 係数

$$\phi_k = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} \phi(x) dx \quad (15)$$

で、 $\hat{\rho}_1$ は密度

$$\rho_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, p, t) dp \quad (16)$$

を Fourier-Laplace 変換した結果である。そこで (10) の両辺を p で積分することにより左辺から $\hat{\rho}_1$ を導き、得られた方程式を $\hat{\rho}_1$ について解くと

$$\hat{\rho}_1(k, \omega) = \frac{G(k, \omega)}{1 - F(k, \omega)}, \quad (17)$$

と求まる。関数 F, G は

$$F(k, \omega) = \phi_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k f'_0(p)}{kp - \omega} dp \quad (18)$$

$$G(k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i \hat{f}_{1,\text{ini}}(k, p)}{kp - \omega} dp \quad (19)$$

である。式 (17) の分母 $1 - F(k, \omega)$ は分散関数とも呼ばれる。式 (17) を見ると、 $\hat{\rho}_1(k, \omega)$ はモード k ごとに独立に計算できることがわかる。関数 F や G における ω の定義域は、Laplace 変換を用いたことによって $\text{Im } \omega > 0$ である。したがって、 $\text{Im } \omega \leq 0$ で F や G を得るためには、 $\text{Im } \omega > 0$ から解析接続しなければならない。ただし、 $\text{Im } \omega > 0$ より $|kp - \omega| > 0$ に注意しながら、初期状態に対する仮定 (13) も考え合わせると、 $k = 0$ のとき $F = G = \hat{\rho}_1 = 0$ となるので、今後の考察では $k \neq 0$ とする。

3.2 解析接続

関数 F と G をまとめて議論するため、

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(p)}{kp - \omega} dp, \quad \text{Im } \omega > 0, \quad k \neq 0 \quad (20)$$

なる積分を考える。関数 (20) は $\text{Im } \omega > 0$ で定義されており、 $\text{Im } \omega \leq 0$ には図 1 のように解析接続する。まず複素 p 平面内で被積分関数の特異点は $p^* = \omega/k$ に現われることに注意する。次に、 ω を $\text{Im } \omega > 0$ から $\text{Im } \omega \leq 0$ に動かす。このとき、特異点は実軸に横たわる積分路を横切ろうとするため、特異点 $p^* = \omega/k$ を避けるように積分路を連続的に変形する。すると避けた部分が留数を拾うから、関数 $\varphi(\omega)$ は

$$\varphi(\omega) = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(p)}{kp - \omega} dp + (\text{留数による寄与}) \quad (21)$$

と書ける。ただし、PV は主値積分を表す。

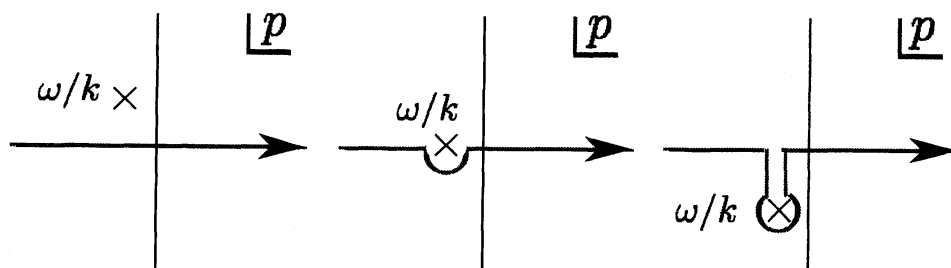


図 1: 積分路の変形による解析接続。図は $k > 0$ の場合。左から、 $\text{Im } \omega$ が正、0、負のときを表す。

3.3 特異性の発生源

関数 F と G を解析接続したのち、 $\hat{\rho}_1$ の特異点がどこから発生するかを以下の二つの可能性に分けて考えよう：

- F や G そのものから
- $1 - F = 0$ から

3.3.1 F や G による特異性

関数 F や G から特異性が現れるか否かを、それらを抽象化した関数 $\varphi(\omega)$ に対する表式 (21) の右辺第 1 項と第 2 項に対してそれぞれ考える。

まず第2項では、留数には $\nu(p)$ に対応する $k f_0'(\omega/k)$ や $-i \hat{f}_{1,\text{ini}}(k, \omega/k)$ が現われる。しかし、 f_0 にも f_1 の初期値にも特異性はないと仮定したので、第2項からは特異性は現われない。

次に第1項について考える。 ω が実数でなければ主値積分に特異性は現われないので、 $\omega \in \mathbb{R}$ としてよい。主値積分への特異点 $p^* = \omega/k$ 近傍からの寄与を考えるため、十分小さな正数 c に対して

$$\text{PV} \int_{\omega/k-c}^{\omega/k+c} \frac{\nu(p)}{kp - \omega} dp \quad (22)$$

を考える。被積分関数の分子 $\nu(p)$ に特異性はないとしたので、これを $p = \omega/k$ のまわりで Taylor 展開すると、定数項以外の項は分母を打ち消すので特異性を与えない。そして定数項 $\nu(\omega/k)$ は、

$$\text{PV} \int_{\omega/k-c}^{\omega/k+c} \frac{\nu(\omega/k)}{kp - \omega} dp = \frac{\nu(\omega/k)}{k} \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} [\ln |c| - \ln |\epsilon| + \ln |-\epsilon| - \ln |-c|] = 0 \quad (23)$$

からやはり特異性を与えない。一見 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \ln |\epsilon|$ という特異性が現われるように見えるが、特異点 $p^* = \omega/k$ の両側で符号が異なるため主値積分を取ることににより相殺するというのが重要な観察である。

結局、 F や G そのものには特異性は現われない。

3.3.2 $1 - F = 0$ による特異性

点 $\omega_L \in \mathbb{C}$ は $1 - F(k, \omega_L) = 0$ を満たすとする。このとき一般的には、 $h(k, \omega_L) \neq 0$ として $1 - F(k, \omega_L) = (\omega - \omega_L)h(k, \omega)$ と書けるだろう。つまり $\hat{\rho}_1$ は ω_L で一位の極を持つ。

3.4 逆 Laplace 変換と特異点

第3.3節の考察により、 $\hat{\rho}_1$ はいくつかの極を持つことが分かった。逆 Laplace 変換に対する極からの寄与を考えよう。 $\hat{\rho}_1$ の逆 Laplace 変換は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-i\omega t} \hat{\rho}_1(k, \omega) d\omega \quad (24)$$

である。 Γ は Bromwich 積分路で、 ω 平面上の $-\infty + i\sigma$ から $+\infty + i\sigma$ を走る。積分路の高さ σ は、積分路が被積分関数のどの特異点よりも上方となるように取る。 $\text{Im } \omega_L > 0$ なる極は摂動に指数関数的な成長を与えるが、定常状態 f_0 は安定としているので、 $\text{Im } \omega_L > 0$ なる $1 - F$ の根はないと仮定する。よって、Bromwich 積分路は実軸のすぐ上にとってよい。

因子 $e^{-i\omega t}$ を利用して下半平面での半円積分路を付け足すと、極からの寄与は留数として現われる。つまり極 ω_L からの寄与は、そのまわりでの小さい逆向き閉曲線 γ に沿った積分によって

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{G(k, \omega)}{(\omega - \omega_L)h(k, \omega)} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{-iG(k, \omega_L)}{h(k, \omega_L)} e^{-i\omega_L t} \quad (25)$$

となり、 $\text{Im } \omega_L < 0$ であれば摂動は指数的に減衰する。これが Landau 減衰である。

4 定常状態が空間的に非一様の場合

定常状態が空間的に非一様な場合も、摂動 f_1 の時間発展の求め方は、一様な場合と同様に考える。ただし、Fourier-Laplace 変換を導入する際に座標 (x, p) では不都合が生じるので、角・作用変数 (θ, J) を導入する。代数的減衰の導出には、作用変数の定義域が重要な役割を果たす。

4.1 Fourier-Laplace 変換

定常状態が空間的に非一様の場合には $\Phi_0 = \Phi[f_0]$ はもはや定数ではないので、線形化 Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + p \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial p} - \frac{\partial f_0}{\partial p} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 0 \quad (26)$$

となる。左辺第3項に、未知関数 f_1 の p についての偏微分が残ってしまうため、空間一様のときのように Fourier-Laplace 変換 (9) しても、代数的に解くことができない。

この問題に対する解決法は、 $H[f_0](x, p)$ で表される1自由度可積分系に対して、 (x, p) からの正準変換によって角・作用変数 (θ, J) を導入することである。このとき、 $H[f_0]$ は作用 J のみの関数としてよいだろう。また f_0 も J のみの関数であると仮定する。記号の簡単化のため、これらを単に $H[f_0](J)$ や $f_0(J)$ と書く。摂動も $f_1(\theta, J, t)$ と書く。このとき、線形化 Vlasov 方程式は

$$\Omega(J) = \frac{dH[f_0]}{dJ}(J) \quad (27)$$

を用いて

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \Omega(J) \frac{\partial f_1}{\partial \theta} - f_0'(J) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = 0 \quad (28)$$

と書ける。 $f_0'(J)$ は J の関数 $f_0(J)$ の導関数である。この方程式を観察すると、Fourier 級数展開を位置変数 x ではなく角変数 θ に対して行えば、代数的に解けることがわかる。実際、 f_1 を

$$\tilde{f}_1(k, J, \omega) = \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ik\theta} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} f_1(\theta, J, t) \quad (29)$$

と Fourier-Laplace 変換すれば、線形化 Vlasov 方程式 (28) より $\check{f}_1$ が従う方程式

$$\check{f}_1(k, J, \omega) = \frac{k f'_0(J)}{k \Omega(J) - \omega} \check{\Phi}_1(k, J, \omega) + \frac{-i \check{f}_{1,\text{ini}}(k, J)}{k \Omega(J) - \omega} \quad (30)$$

を得る。ただし、 $\check{f}_1(k, J, \omega)$ は $\text{Im } \omega > 0$ で定義されており、 $\check{f}_{1,\text{ini}}(k, J)$ は初期状態の θ についての Fourier 係数

$$\check{f}_{1,\text{ini}}(k, J) = \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} f_1(\theta, J, t=0) d\theta \quad (31)$$

である。 $\check{\Phi}_1(k, J, \omega)$ は $\Phi_1(x, t)$ を (29) の意味で Fourier-Laplace 変換したものであり、 f_0 の非一様性から x が θ と J に依存するので、 $\check{\Phi}_1$ は k のみならず J にも依存する。

摂動 f_1 の初期状態に対しては、空間一様の場合と同様の仮定を導入する。すなわち、角変数 θ について Fourier 級数展開を行うと、初期状態 $f(\theta, J, t=0)$ は

$$f(\theta, J, t=0) = f_0(J) + \frac{1}{2\pi} \check{f}_{1,\text{ini}}(0, J) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \check{f}_{1,\text{ini}}(k, J) e^{ik\theta} \quad (32)$$

と書ける。そこで、 $\check{f}_{1,\text{ini}}(0, J) = 0$ と仮定する。

また、正準変換 $(x, p) \mapsto (\theta, J)$ をよく定義するためには、 (x, p) 平面をいくつかの領域に分けなければならない可能性がある。例えば HMF 系の 1 体ハミルトニアン $H[f_0]$ は振り子系と等価であり、 (x, p) 平面はセパトリクスによって 3 つの領域に分けられ、それぞれの領域で (θ, J) を定義しなければならない [10]。以降の議論では、簡単のためこの領域分割は考えないこととする。さらに、例えば調和振動子や振り子の場合には作用 J は正の値をとるため、 J の定義域は $[0, \infty)$ として議論を進める。

4.2 連立方程式の解

次にやるべきことは、 $\check{f}_1$ に対する式 (30) と Φ の定義 (3) を連立させて解くことである。まず、 $\check{\Phi}$ と $\hat{\Phi}$ および $\hat{\rho}_1$ の間には

$$c_{kl}(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} e^{ilx} d\theta \quad (33)$$

なる定義のもとで

$$\check{\Phi}_1(k, J, \omega) = \sum_m c_{km}(J) \hat{\Phi}_1(m, \omega) = \sum_m c_{km}(J) \phi_m \hat{\rho}_1(m, \omega) \quad (34)$$

という関係が成り立つ。ここで、関係式 (14) を使った。一様の場合と同様に方程式 (30) の左辺から $\hat{\rho}_1$ を導出するために、(30) の両辺に $e^{ik\theta}e^{-ilx}/(2\pi)$ をかけて k についての和を取り、さらに θ, J で積分をすると、(30) は

$$\hat{\rho}_1(l, \omega) = \sum_m F_{lm}(\omega) \hat{\rho}_1(m, \omega) + G_l(\omega) \quad (35)$$

と変形される。ただし、左辺の計算の途中で、 θ についての Fourier 級数展開を用い、 θ と J の積分を $d\theta dJ = dx dp$ を用いて x と p の積分に書き直した。また

$$F_{lm}(\omega) = \phi_m \sum_{k \neq 0} \int_0^\infty \frac{k f'_0(J)}{k\Omega(J) - \omega} c_{km}(J) \bar{c}_{kl}(J) dJ \quad (36)$$

$$G_l(\omega) = \sum_{k \neq 0} \int_0^\infty \frac{-i \check{f}_{1, \text{ini}}(k, J)}{k\Omega(J) - \omega} \bar{c}_{kl}(J) dJ \quad (37)$$

で、 $\bar{c}_{kl}(J)$ は $c_{kl}(J)$ の複素共役である。空間一様の場合と同様に、 $k = 0$ からの寄与はないので和から除外してある。 $\hat{\rho}_1(\omega) = (\rho_1(l, \omega))$ なるベクトルと、 $F(\omega) = (F_{lm}(\omega))$ なる行列と、 $G(\omega) = (G_l(\omega))$ なるベクトルを用いると、 $\hat{\rho}_1(\omega)$ は形式的に

$$\hat{\rho}_1(\omega) = [1 - F(\omega)]^{-1} G(\omega) \quad (38)$$

という行列形式に書ける。

空間一様の場合には Fourier モード毎に独立した表式 (17) が得られたが、式 (38) の見方では F が対角行列となっていることに相当する。一方、空間非一様の場合には一般には F は非対角行列である。これは、二つの Fourier 基底 $\{e^{ikx}\}$ と $\{e^{il\theta}\}$ が直交しない、つまり $c_{kl}(J) \neq \delta_{kl}$ であることから来る。

空間一様の場合と同様に $F(\omega)$ や $G(\omega)$ の定義域は $\text{Im } \omega > 0$ である。よって、 $\text{Im } \omega \leq 0$ には解析接続しなければならない。解析接続は、空間一様の場合と同様にして行えばよい。

4.3 特異性の発生源

形式的に得られた $\hat{\rho}_1(\omega)$ の特異点がどこから発生するかを、空間一様の場合に習って次の二つの可能性

1. F や G そのものから
2. $\det(1 - F(\omega)) = 0$ から

について考察しよう。まず簡単な後者から考察を始める。

4.4 $\det(1 - F) = 0$ による特異性

この場合は、空間一様の場合と同様の議論により、一般には $\hat{\rho}_1$ に一位の極を与え、この極は ρ_1 に指数的な時間発展を与える。特に HMF 系の場合には行列 F が 2×2 行列で書いて実際に $\det(1 - F)$ の根を求めることができ、数値的に求めた N 体系の時間発展との比較も行われている [10]。

4.5 F や G による特異性

F や G の関数をまとめて議論するため、

$$\varphi(\omega) = \int_0^\infty \frac{\nu(J)}{k\Omega(J) - \omega} dJ, \quad \text{Im } \omega > 0, \quad k \neq 0 \quad (39)$$

なる積分を考えることとする。空間一様の場合と同様に $\text{Im } \omega > 0$ から $\text{Im } \omega \leq 0$ に解析接続すると、関数 $\varphi(\omega)$ は

$$\varphi(\omega) = \text{PV} \int_0^\infty \frac{\nu(J)}{k\Omega(J) - \omega} dJ + (\text{留数による寄与}) \quad (40)$$

と書ける。 J の積分区間に注意しつつ、右辺の第 1 項、第 2 項が $\varphi(\omega)$ に特異性を与えるかを吟味しよう。

まず、第 1 項の主値積分について考える。 ω が実でなければ特異性は現われないので、 $\omega \in \mathbb{R}$ としてよい。よって、 $\text{Im } \omega > 0$ から $\text{Im } \omega = 0$ へと解析接続することを考える。空間一様の場合には、積分区間が $-\infty < p < \infty$ であったため、解析接続によって特異点 $p^* = \omega/k$ が実軸上のどこに着地しても、対数特異性はその両側で反符号で現れるため相殺されるのであった。しかし今や積分区間は $0 < J < \infty$ であるから、 $k\Omega(J^*) - \omega = 0$ を満たす特異点 J^* が複素 J 平面の原点に着地すると、 J^* の右側から与えられる対数特異性を相殺すべき左側の対数特異性がない。従って、 $J = 0$ 近傍の積分から、 $\varphi(\omega)$ の対数的な特異性が発生する。

次に、第 2 項の留数による寄与について考える。このときも同様に、積分区間が J の負方向に伸びていないことが重要である。つまり、特異点 J^* が複素 J 平面の実軸上に下りてきたとき、 $\text{Re } J^* > 0$ のときには積分路を変形させなければならぬので留数からの寄与があるが、 $\text{Re } J^* < 0$ のときには積分路を変形させなくてもよいので留数からの寄与がない。つまり、 $\omega = k\Omega(0)$ を挟んで、 $\varphi(\omega)$ には階段関数的な特異性が発生する。

以上の議論により、 $J = 0$ 近傍からの寄与が重要であるとわかる。そこで、 $J = 0$ 近傍からの積分への寄与を考えるため、非負整数 a を用いて

$$\nu(J) \simeq c_1 J^a, \quad k\Omega(J) \simeq k\Omega(0) + c_2 J \quad (41)$$

と近似できるとしよう。すると $J = 0$ 近傍からの寄与は、十分小さな正数 c を使って

$$\int_0^c \frac{\nu(J)}{k\Omega(J) - \omega} dJ \simeq \int_0^c \frac{c_1 J^a}{c_2 J - (\omega - k\Omega(0))} dJ \quad (42)$$

と書ける。変形

$$\frac{J}{J-\omega} = 1 + \omega \frac{1}{J-\omega} \quad (43)$$

などを用いて積分を実行し、 $\text{Im } \omega \rightarrow 0+$ の極限を取ると、 $J = 0$ から現われる特異性は

- 実部に $(\omega - k\Omega(0))^a \ln |\omega - k\Omega(0)|$
- 虚部に $(\omega - k\Omega(0))^a H(\omega - k\Omega(0))$

であるとわかる。ただし H は Heaviside の階段関数である。それぞれ、第1項、第2項の特異性に対応する。

最後に、逆 Laplace 変換によってこれらの特異性が与える時間発展を求める。参照している定常分布 f_0 は安定としているので、 $\text{Im } \omega > 0$ には $\varphi(\omega)$ の特異点は存在しないと仮定する。すると逆 Laplace 変換の Bromwich 積分路は実軸のすぐ上に取ってよく、Fourier 変換とみなせる。上記2種類の特異性の Fourier 変換 [11] は、主要な項のみを拾って

- $(\omega - k\Omega(0))^a \ln |\omega - k\Omega(0)| \rightarrow e^{-ik\Omega(0)t} t^{-(1+a)}$
- $(\omega - k\Omega(0))^a H(\omega - k\Omega(0)) \rightarrow e^{-ik\Omega(0)t} t^{-(1+a)}$

と振動を伴った代数的な減衰を与える。

関数 $\nu(J)$ に対応するのが $k f'_0(J) c_{km}(J) \bar{c}_{kl}(J)$ や $-i \dot{f}_{1,\text{ini}}(k, J) \bar{c}_{kl}(J)$ であることを考えると、指数 a は Fourier モードの番号に依存しうる。HMF 系では一般には $a = 1$ となるのが最も遅い減衰であることが理論的に予測され、 N 体数値計算による検証も行われている [9]。

5 まとめ

長距離力によって相互作用する空間1次元のハミルトン系において、Vlasov 方程式の安定定常状態に与えた摂動が漸近的にどのように減衰するかを調べた。定常状態が空間的に一様な場合には、指数関数的な Landau 減衰が知られている。ここでは定常状態が空間的に非一様な場合を考え、Landau 減衰のような指数的時間発展も存在するが、代数的な減衰が自然に現われることを示した。つまり摂動の減衰は、初期には Landau 減衰的な速い指数関数的減衰を示し、これが減衰しきったのちに遅い代数的減衰が現われると考えられる。

ただし、ここで展開した考察では、Fourier モード毎の減衰に着目しており、これらの和がどのような減衰を示すかは考えていない。また安定定常解、つまり準定常状態は不変であると仮定しているが、粒子数が有限の系では有限サイズ効果によりゆっくりと変化すると考えられる。これらを考え合わせたとき、どのような減衰が得られるかはこれからの課題である。

謝辞

本報告は、Julien Barré, Alain Olivetti 両氏との共同研究にもとづいている。本研究は JSPS 科研費 19760052, 23560069 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] D.H.Zanette and M.A.Montemurro, Dynamics and nonequilibrium states in the Hamiltonian mean-field model: A closer look, *Phys.Rev.E* **67**, 031105 (2003).
- [2] Y.Y.Yamaguchi, J.Barré, F.Bouchet, T.Dauxois, S.Ruffo, Stability criteria of the Vlasov equation and quasi-stationary states of the HMF model, *Physica A* **337**,36 (2004).
- [3] L.G.Moyano and C.Anteneodo, Diffusive anomalies in a long-range Hamiltonian system, *Phys.Rev.E* **74**, 021118 (2006).
- [4] W.Braun and K.Hepp, The Vlasov dynamics and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles, *Comm.Math.Phys.* **56**, 101 (1977).
- [5] J.Barré, F.Bouchet, T.Dauxois, S.Ruffo and Y.Y.Yamaguchi, The Vlasov equation and the Hamiltonian mean-field model, *Physica A* **365**, 177 (2006).
- [6] D.Lynden-Bell, Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems, *Mon.Not.R.astr.Soc.* **136**, 101 (1967).
- [7] A.Antoniazzi, D.Fanelli, S.Ruffo and Y.Y.Yamaguchi, Nonequilibrium tricritical point in a system with long-range interactions, *Phys.Rev.Lett.* **99**, 040601 (2007).
- [8] L.Landau, On the vibrations of the electronic plasma, *J.Phys.USSR* **10**, 25 (1946).
- [9] J.Barré, A.Olivetti and Y.Y.Yamaguchi, Algebraic damping in the one-dimensional Vlasov equation, *J.Phys.A* **44**, 405502 (2011).
- [10] J.Barré, A.Olivetti and Y.Y.Yamaguchi, Dynamics of perturbations around inhomogeneous backgrounds in the HMF model, *J.Stat.Mech.* P08002 (2010).
- [11] M.J.Lighthill, *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions* (Cambridge: Cambridge University Press, 1958).