

Motion of forced curvature flow on the strip domain

龍谷大学 理工学部

二宮 広和 (Hirokazu Ninomiya)[†]

Ryukoku University,

Department of Applied Mathematics and Informatics

東京工業大学大学院 情報理工学研究科

谷口 雅治 (Masaharu Taniguchi)

Tokyo Institute of Technology,

Department of Mathematical and Computing Sciences

自然界の多くの現象では、界面が観察されることが多い。いくつかの物理的・化学的な相が共存する際には、その境界として界面が現れる。物理的・化学的な相自信は観察しにくい状態でも、界面がその境界として観察されることもある。界面の動きは、相の動きを特徴的に表しており、界面の運動は、応用数学の重要な問題の一つである。

本講演では、平面 $\mathbf{R}^2$ 上の界面について考察する。まず、界面を定義しよう。 $(\Gamma(t), \nu)$ が界面 (interface) であるとは、以下を満たす $\mathbf{R}^2$ における集合の族 $\{D(t)\}$ が存在するときをさすことにする。

- $D(t)$ は連結な開集合で、 $\Gamma(t) = \partial D(t)$ を満たす。
- ν は、 $\Gamma(t)$ における $D(t)$ の外向き単位法線ベクトルである。

この定義は、自己交差しないような界面に注目していることに注意する。

以下を満たすような界面 $(\Gamma(t), \nu)$ を考えよう。

$$V = H + k. \quad (1)$$

ここで、 V は界面の法線速度、 H は $\Gamma(t)$ の曲率、 k は定数である。この方程式は、応用数学の様々な問題に現れる。例えば、Allen–Cahn 方程式の遷移相問題 [7]、Ginzburg–Landau 方程式の平面に制限された渦の方程式 [5]、BZ 反応 [13] などが挙げられる。 $k = 0$ の場合は、曲線短縮方程式と呼ばれ、初期状態で自己交差しなければ、時間が経っても自己交差することなく“丸く”なりながら 1 点に収縮することが知られている ([8, 9] 参照)。 $k \neq 0$ の場合は、初期状態で自己交差しなくても、時間が経つと自己交差することが分かる。

[†]この研究は、部分的に龍谷大学理工基金の補助を受けている。

界面が $y = u(x, t)$ というグラフで表現される場合には, 方程式 (1) は,

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1 + u_x^2} + k\sqrt{1 + u_x^2} \quad x \in \mathbf{R}, t > 0, \quad (2)$$

に帰着される. この方程式の解の存在と一意性は, 知られている ([4, 5, 12, 14] 参照). また, この方程式は最大値の原理が成り立つことに注意する ([16] 参照).

次に, (1) の進行波を定義しよう. 例として, $\nu = {}^t(-\sin \theta, \cos \theta)$ を法線とする直線 $y = x \tan \theta$ つまり, $D(t) = \{y < x \tan \theta\}$ を考えよう ($0 < \theta < \pi/2$). この直線は, ν 方向には, 速度 k で進んでいるが, ${}^t(0, 1)$ 方向 (y 軸方向) には速度 $k/\cos \theta$ で進んでいる. 従って, 進行波を定義する際には, 速度も明記するのが望ましい. 界面 $(\Gamma(t), \nu)$ が速度 ν の進行波 (traveling front) とは $\Gamma(t) = \Gamma(0) + \nu t$ を満たすときである. 上の例は, 速度 $k\nu$ の進行波あるいは速度 ${}^t(0, k/\cos \theta_*)$ の進行波と区別することができる. 特に混同のないときは, ν を省略する.

Deckelnick 等は [5] で進行波の存在と初期値 u_0 の強い制限の下で安定性を示している. 著者等は, [14, 15] において, Deckelnick 等の結果を拡張した以下のような結果を得た ([14, Proposition 1.1 および Theorem 1.2] 参照).

定理 1 界面方程式 (1) の速度 ${}^t(0, c)$ の進行波は平行移動を除いて以下のいずれかである.

- (i) 直線 $y = x \tan \theta_*$ あるいは直線 $y = -x \tan \theta_*$
- (ii) 2 直線 $y = \pm x \tan \theta_*$ に漸近する進行波 $\Gamma_c(t)$
- (iii) 速度 c が 0 の場合には半径 $1/|k|$ の円

ここで, $\theta_* = \arctan(\sqrt{c^2 - k^2}/k)$ とする. その上, $\Gamma_c(t) = \{y = \varphi(x) + ct\}$ は

$$\begin{aligned} x(\theta; c) &:= \frac{\theta}{c} + \frac{k}{c\sqrt{c^2 - k^2}} \log \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{c+k}{c-k}} \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \sqrt{\frac{c+k}{c-k}} \tan \frac{\theta}{2}} \right|, \\ y(\theta; c) &:= -\frac{1}{c} \log \left(\frac{c \cos \theta - k}{c - k} \right) \end{aligned}$$

と $\theta \in (-\theta_*, \theta_*)$ を用いて具体的に媒介変数表示できる.

進行波 $\Gamma_c(t)$ は “V-字型” であることに注意する. この V 字型進行波の存在は [3, 5, 7] でも調べられているが, 具体的な表現は得られていなかった.

上の定理の証明は,

- 進行波は必ず進行速度に垂直な直線からのグラフになること
- (2) のすべての進行波は上記の 3 つに限ること

を示すことによって得られる (詳しくは, [14, Lemma 2.3] 参照). 実際, (2) の進行波は,

$$u_{xx} = f(u_x)$$

を満たすことを用いる. ここで,

$$f(v) := c(1 + v^2) - k(1 + v^2)^{3/2}$$

である.

定理 1 (ii) の場合, 2 つの漸近線の傾きは $\pm \tan \theta_*$ であり, 2 直線のなす角は $\theta^* := \pi - 2\theta_*$ となる. V 字型進行波 $\Gamma_c(t)$ の速度 c は, 2 つの漸近線のなす角 θ^* (あるいは θ_*) を用いて $c = k / \cos \theta_*$ と一意的に決まる. これは, 漸近線 $y = \pm x \tan \theta_*$ が $(0, 1)$ 方向に動く速度と一致している. この形の進行波は, BZ 反応でも観察される ([13]) ことから, 安定であることが予想される. 実際, V 字型進行波は安定であることが, [5, 15] で示されている. 先に述べたように [5] に課されている条件が強いので, [15] においてその条件をはずしている. その際, 定理 1 の具体的表現を有効に用いる必要がある.

定理 2 初期値 u_0 の摂動が

$$BC_0^1 := \{v \in C^1(\mathbf{R}) \mid \sup_{-\infty < x < \infty} (|v(x)| + |v_x(x)|) < \infty, \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) = 0\}.$$

の内のとき, (2) の解から決まる V 字型進行解は漸近安定である. 更に, 大域的に漸近安定である.

[15] で示されている V 字型進行波の大域的漸近安定性とは, θ^* ($\theta^* < \pi$) で交わる 2 直線に漸近する界面を初期値とすると, 時間が無限大では V 字型進行波に収束する. この際, 平行移動の自由度なしで V 字型進行波に収束するので, Allen-Cahn 方程式などの進行波解の場合の漸近安定性 (軌道安定性) とは異なっていることに注意する.

しかし, 摂動の空間を BC_0^1 以外にすると安定でなくなることもある. 例えば, 空間

$$BC^1 := \{v \in C^1(\mathbf{R}) \mid \sup_{-\infty < x < \infty} (|v(x)| + |v_x(x)|) < \infty\},$$

を摂動の空間として選ぶと、時間が経っても V 字型進行波に収束しない。つまり、任意の $\epsilon > 0$ に対して、(1) を満たす界面 $\Gamma(t)$ で、

$$\text{dist}(\Gamma(0), \Gamma_c(0)) \leq 4\epsilon, \quad \Gamma(t) \cap \left(\Gamma_c(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \end{pmatrix} \right) \neq \emptyset, \quad \Gamma(t) \cap \left(\Gamma_c(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \end{pmatrix} \right) \neq \emptyset$$

($t \geq 0$) を満たすようなものが存在する。このような例は、遠方で漸近線の周りを振動することによって構成している (詳細は [15, Theorem 4.1] 参照)。また、

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x) = p_{\pm}$$

のときには、V 字型進行波を平行移動したものに収束する。

また、[14, Lemma 3.2] で報告されているように、(1) は $x = 0$ で y 軸と平行になる速度 c の (半平面 $\{x > 0\}$ 上) 進行波 $\Gamma_c^*(t) = \{y = \varphi^*(x) + ct\}$ ももつ。具体的な媒介変数表示は以下の通りである。

$$x^*(\theta) := \frac{2\theta - \pi}{2c} + \frac{k}{c\sqrt{c^2 - k^2}} \log \frac{\left(\sqrt{\frac{c+k}{c-k}} \tan \frac{\theta}{2} + 1 \right) \left(\sqrt{\frac{c+k}{c-k}} - 1 \right)}{\left(\sqrt{\frac{c+k}{c-k}} \tan \frac{\theta}{2} - 1 \right) \left(\sqrt{\frac{c+k}{c-k}} + 1 \right)}, \quad (3)$$

$$y^*(\theta) := -\frac{1}{c} \log \frac{k - c \cos \theta}{k} \quad (4)$$

この解が定理 2 の大域的漸近安定性を示すために用いられている。

上の例が示しているように、全領域と半平面では、進行波の種類に若干の違いがある。次に帯領域での運動を考える。つまり、界面がグラフで描ける場合には以下の方程式を満たす。

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1 + u_x^2} + k\sqrt{1 + u_x^2} \quad x \in (0, 1), t > 0, \quad (5)$$

初期条件

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in (0, 1) \quad (6)$$

境界条件

$$u_x(0, t) = \tan \alpha_0, \quad u_x(1, t) = \tan \alpha_1, \quad t > 0. \quad (7)$$

Altschuler–Wu [1, 2] は初期条件 (6)、境界条件 (7) をもつ次の方程式

$$u_t = a(u_x)_x \quad (8)$$

の解の挙動を考察した。ここで $a(\cdot)$ は滑らかで $a' > 0$ とする。彼らは、すべての解は、全領域における進行波のある部分に収束することを示した。

方程式 (5) は (8) の範疇でないが、同様の結果が成り立つことが分かる。

方程式 (5)–(7) の帯領域上での進行波 $y = u(x) + ct$ は、 α_i ($i = 0, 1$) により一意的に決まる。実際、関数

$$F(c) := \int_{\tan \alpha_0}^{\tan \alpha_1} \frac{dv}{f(v)}$$

を用いて速度 c は

$$F(c) = 1$$

と表される。簡単な解析から $\alpha_1 > \alpha_0$ のとき、 $F(c)$ が単調減少、 $\alpha_1 < \alpha_0$ のとき、単調増加であることが分かる。こうして、 c の一意的存在が分かり、収束先の進行波の一意的存在が従う。

参考文献

- [1] S. J. ALTSCHULER AND L.-F. WU, Convergence to translating solutions for a class of quasilinear parabolic boundary problems, *Math. Ann.*, **295**, (1993) 761–765.
- [2] S. J. ALTSCHULER AND L.-F. WU, Translating surfaces of the non-parametric mean curvature flow with prescribed contact angle, *Calc. Var.*, **2**, (1994) 101–111.
- [3] P. K. BRAZHNİK, Exact solutions for the kinematic model of autowaves in two-dimensional excitable media, *Physica D*, **94**, (1996) 205–220.
- [4] K.-S. Chou and Y.-C. Kwong, On quasilinear parabolic equations which admit global solutions for initial data with unrestricted growth, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **12-3**, (2001), 281–315.
- [5] K. Deckelnick, C. M. Elliott, and G. Richardson, Long time asymptotics for forced curvature flow with applications to the motion of a superconducting vortex, *Nonlinearity* **10** (1997), 655–678.
- [6] K. Ecker, and G. Huisken, Mean curvature evolution of entire graphs, *Ann. of Math.* **130-3** (1989), 453–471.
- [7] P. C. Fife, *Dynamics of Internal Layers and Diffusive Interfaces* (CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. 53), SIAM (1988).

- [8] M. Gage, and R. S. Hamilton, The heat equation shrinking convex plane curves, *J. Diff. Geom.* **23** (1986), 69–96.
- [9] M. A. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, *J. Diff. Geom.* **26** (1987), 285–314.
- [10] M. A. Grayson, A short note on the evolution of a surface by its mean curvature, *Duke Math. J.* **58** (1989), 555–558.
- [11] HUISKEN, Nonparametric mean curvature evolution with boundary conditions, *J. Differential Equations*, **77**, (1989) 369–378.
- [12] O.A., Ladyženskaja, V.A. Solonnikov, and N.N. Ural'ceva, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs 24, Providence RI, (1968), American Mathematical Society.
- [13] V. Pérez-Muñuzuri, M. Gómez-Gesteira, A. P. Muñuzuri, V. A. Davydov, and V. Pérez-Villar, V-shaped stable nonspiral patterns, *Physical Review E* **51-2** (1995), 845–847.
- [14] H. Ninomiya and M. Taniguchi, Traveling curved fronts of a mean curvature flow with constant driving force, in "Free boundary problems: theory and applications, I" *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.* **13** (2000), 206–221.
- [15] H. Ninomiya and M. Taniguchi, Stability of traveling curved fronts in a curvature flow with driving force, to appear in *Methods and Application of Analysis*.
- [16] M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, (1984) Springer-Verlag.