

可約な概均質ベクトル空間の一例

筑波大学大学院修士

笠井 伸一

V を $\mathbb{C}$ (=複素数体) 上の有限次元ベクトル空間, G を $\mathbb{C}$ 上の連結線型代数群, $\rho: G \rightarrow GL(V)$ を有限次元複素有理表現とする. (G, ρ, V) が概均質ベクトル空間 (以下 P. V. と記す) であるとは, G が V 上 Zariski-dense orbit をもつことである.

この小論では次の結果を示すことを目的とする.

G を任意の単純群, ρ を G の任意の表現 ($\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k$, $V(m) = V(m_1) \oplus \dots \oplus V(m_k)$, $\rho_i: G \rightarrow GL(V(m_i))$ ($i = 1, \dots, k$) は G の $V(m_i)$ 上の任意の既約表現, $\rho_i \neq 1$, $k \geq 1$) とする.

定理.

$$\star (GL(1)^{1+k} \times SL(2m+1) \times G, \rho \oplus \rho \oplus \rho \oplus 1,$$

$$V(2m+1) \otimes V(m) \oplus V(m(2m+1)) \otimes V(1)) , \quad 2m+1 \geq m$$

が概均質ベクトル空間であるためには, 次の ①, ②, ③のうちのとれかであることが必要十分である.

$$\textcircled{1} (GLU)^2 \times SL(2m+1) \times SL(m), \quad \square \otimes \square \oplus \textcircled{0} \otimes 1,$$

$$V(2m+1) \otimes V(m) \oplus V(m(2m+1)) \otimes V(1) \quad (1 \leq m \leq 2m+1)$$

$$\textcircled{2} (GLU)^2 \times SL(2m+1) \times Sp(m), \quad \square \otimes \square \oplus \textcircled{0} \otimes 1,$$

$$V(2m+1) \otimes V(2m) \oplus V(m(2m+1)) \otimes V(1) \quad (1 \leq 2m \leq 2m+1)$$

$$\textcircled{3} (GLU)^2 \times SL(2m+1) \times SO(4), \quad \square \otimes \square \oplus \textcircled{0} \otimes 1,$$

$$V(2m+1) \otimes V(4) \oplus V(m(2m+1)) \otimes V(1) \quad (4 \leq 2m+1)$$

$\square, \textcircled{0}$ はその Young 図形に対応する既約表現をあらわすものとする。また $(GLU)^{1+k}$ の作用を記さないが、 $(GLU)^{1+k}$ は各既約成分のスカラー倍として作用しているものとする。(以下でも同様。)

$$G_1, G_2 \text{ を単純群, } G = (GLU)^l \times G_1 \times G_2, \quad p_i: G \rightarrow GL(V_i)$$

$$(i=1, \dots, l) \text{ を } G \text{ の既約表現, } p = p_1 \oplus \dots \oplus p_l, \quad V = V_1 \oplus \dots$$

$$\oplus V_l \text{ とするとき, } ((GLU)^l \times G, p, V) \text{ が P. V. ならば各 } ($$

$$(GLU) \times G, p_i, V_i) (i=1, \dots, l) \text{ は既約 P. V. ゆえに } ((GLU) \times G,$$

$$p_i, V_i) \text{ は (Sato-Kimura [1]) で得られた既約 P. V. の表に}$$

$$\text{表われる. しかし } ((GLU) \times G, p_i, V_i) \text{ が trivial P. V., すな}$$

$$\text{わち } ((GLU) \times G_1 \times GL(m), p_i'' \otimes \square, V_i''(m) \otimes V(m)); \quad m \leq m; \text{ で}$$

$$\text{あれば, } G_1 \text{ として任意の単純群, } p_i'' \text{ として任意の既約表現が}$$

可能である。

以下 triplet σ が P. V. となるような (G, ρ, V) を決定する。

triplet σ の P. V. 性に関して保倉理美氏が次の事を示した(くわしい事は本講究録の保倉氏のところを参照のこと)。

命題 (保倉)

$$(SL(2m+1) \times G \times GL(U)^{1+k}, \square \otimes \rho \oplus \text{Id} \otimes 1,$$

$$V(2m+1) \otimes V(m) \oplus V(m(2m+1)) \otimes V(U)) : \text{P. V.}$$

$$\Leftrightarrow (SL(m-1) \times (G \times Sp(m)) \times GL(U)^{1+k}, \square \otimes (\rho^* \oplus \square),$$

$$V(m-1) \otimes (V(m)^* \oplus V(2m))) : \text{P. V.}$$

この命題により σ が P. V. となるためには, $(SL(m-1) \times G \times GL(U)^k, \square \otimes \rho^*, V(m-1) \otimes V(m)^*)$ が P. V. とななければならない。したがって裏返し変換により $(G \times GL(U)^k, \rho, V(m))$ が P. V. となるか simple P. V. とななければならない。

Simple P. V. の表

I. Simple Irred. P. V. (スカラー倍を除いて書いてある)

(Sato-Kimura [1])

$$(1) \begin{smallmatrix} SL(m) \\ \square \end{smallmatrix} (m \geq 2), (2) \begin{smallmatrix} SL(m) \\ \square \square \end{smallmatrix} (m \geq 2), (3) \begin{smallmatrix} SL(m) \\ \square \square \square \end{smallmatrix} (m \geq 4),$$

$$(4) \begin{smallmatrix} SL(2) \\ \square \square \square \end{smallmatrix}, (5) \begin{smallmatrix} SL(m) \\ \square \square \square \end{smallmatrix} (m=6, 7, 8), (6) \begin{smallmatrix} Sp(m) \\ \square \end{smallmatrix} (m \geq 2),$$

- (7) $Sp(3)$ $\square$, (8) $SO(m)$ $\square$ ($m \geq 4$), (9) $Spin(m)$ $(\frac{1}{2})$ スピン表現 ($m=7, 9, 10, 11, 12, 14$)
- (10) (G_2) $V(7)$, (11) E_6 $V(27)$, (12) E_7 $V(56)$.

II. Simple P. V. (既約なものを除く) (Kimura [2])

- (1) $SL(m)$ $\square + \dots + \square$ ($2 \leq k \leq m+1$), (2) $SL(m)$ $\square + \dots + \square + \square^*$ ($1 \leq k \leq m$),

- (3) $SL(2m)$ $\square + \square^{(*)} + \dots + \square^{(*)}$ ($1 \leq k \leq 3$), (4) $SL(2m+1)$ $\square + \square^{(*)} + \dots + \square^{(*)}$ ($1 \leq k \leq 3$)
 9 通り 8 通り
 ($\square + \square + \square + \square^*$ を除く)

- (5) $SL(2m+1)$ $\square + \square$ ($m \geq 2$), (6) $SL(m)$ $\square + \square^{(*)}$

- (7) $SL(6)$ $\square + \square$, $\square + \square + \square$, (8) $SL(7)$ $\square + \square^{(*)}$

- (9) $Sp(m)$ $\square + \square$, $\square + \square + \square$, (10) $Sp(3)$ $\square + \square$

- (11) $Spin(m)$ ($m=7, 8, 10, 12$) $\square$ バクテル表現 $\oplus$ $(\frac{1}{2})$ スピン表現, (12) $Spin(10)$ $\square$ 偶半スピン表現 $\oplus$ 偶半スピン表現

($GL(U)^k \times G$, P , $V(m)$) を Simple P. V., G' を G の generic isotropy subgroup とする. このとき ($SL(m-1) \times (G \times Sp(m)) \times GL(U)^{1+k}$, $\square \otimes (P^* \oplus \square)$, $V(m-1) \otimes (V(m)^* \oplus V(2n))$) が P.

V であることは, $\square \otimes f^*$ における generic isotropy subgroup の作用を考えることにより, $(G' \times Sp(m) \times GL(1), \square \otimes \square, V(m-1) \otimes V(2m))$ が P. V. であることと同値であり, $m-1 \leq 2m$ に注意すれば (Sato-Kimura [1], p. 40, Prop. 13 より) これは $(G' \times GL(1), \wedge^2 \square, V(\frac{(m-1)(m-2)}{2}))$ が P. V. であることと同値である. この群の次元を $f' = \dim G' + 1$, 表現空間の次元を $\ell' = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ とおくとき, (G, ρ, V) が P. V. ならば $\dim G \geq \dim V$ が成り立つことより, $f' \geq \ell'$ となるような Simple P. V. $(GL(1)^2 \times G, \rho, V(m))$ を求めると次の3つに限ることがわかる.

$$\textcircled{1} (GL(1) \times SL(m), \square, V(m)) \quad (m \geq 1)$$

$$\textcircled{2} (GL(1) \times Sp(m), \square, V(2m)) \quad (m \geq 1)$$

$$\textcircled{3} (GL(1) \times SO(m), \square, V(m)) \quad (m \geq 4).$$

結局次の3つが P. V. であるかどうかを調べればよい.

$$\textcircled{1} (SL(2m+1) \times SL(m) \times GL(1)^2, \square \otimes \square \oplus \square \otimes 1,$$

$$V(2m+1) \otimes V(m) \oplus V(m(2m+1)) \otimes V(1)) \quad (1 \leq m \leq 2m+1)$$

$$\textcircled{2} (Sp(m) \times SL(2m+1) \times GL(1)^2, \square \otimes \square \oplus 1 \otimes \square,$$

$$V(2m) \otimes V(2m+1) \oplus V(1) \otimes V(m(2m+1))) \quad (1 \leq 2m \leq 2m+1)$$

$$\textcircled{3} (SL(2m+1) \times SO(m) \times GL(1)^2, \square \otimes \square \oplus \square \otimes 1,$$

$$V(2m+1) \otimes V(m) \oplus V(m(2m+1)) \otimes V(1)) \quad (4 \leq m \leq 2m+1)$$

以下では f は群の次元をあらわし, ℓ は表現空間の次元をあら

3) のものをとする.

$$\textcircled{1} (SL(2m+1) \times SL(m) \times GL(U)^2, \square \otimes \square \oplus \square \otimes 1,$$

$$V(2m+1) \otimes V(m) \oplus V(m(2m+1)) \otimes V(U) \quad (1 \leq m \leq 2m+1)$$

これの P. V. 性は $\square \otimes 1$ における generic isotropy subgroup を考えることにより次の P. V. 性を調べることに帰着される.

$$\left(\begin{bmatrix} Sp(m) & * \\ \square & x \\ 0 & * \end{bmatrix} \times GL(m), \square \otimes \square, V(2m+1) \otimes V(m) \right)$$

(i) $m = 2l$ のとき.

$$X_0 = {}^t \begin{bmatrix} \overbrace{I_l}^n & \overbrace{\quad}^m & \overbrace{1}^1 \\ \quad & I_l & \quad \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} l \in V(2m+1) \otimes V(2l) \text{ における} \\ \} l-1 \\ \} 1 \end{array} \right\}$$

isotropy subalgebra を計算して得ると,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \overbrace{A_1}^{l-1} & \overbrace{A_2}^1 & \overbrace{A_3}^{m-l} & \overbrace{A_4}^{l-1} & \overbrace{A_5}^1 & \overbrace{A_6}^{m-l} \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 \end{array} \\ \oplus \\ \begin{array}{cccc} \overbrace{-A_1}^{l-1} & \overbrace{-A_2}^1 & \overbrace{-A_3}^{l-1} & \overbrace{-A_4}^1 \\ -A_1 & -A_2 & -A_3 & -A_4 \\ -B_1 & -B_2 & -B_3 & -B_4 \\ -C_1 & -C_2 & -C_3 & -C_4 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 & -D_4 \end{array} \end{array}$$

$$\cong (sp(l-1) \oplus sp(m-l)) \cdot \mathcal{U}(2(m+l)).$$

$2 - n^2 = \dim((sp(l-1) \oplus sp(m-l)) \cdot \mathcal{U}(2(m+l)))$ が成り立つから, (i) の場合上の triplet は P. V. である.

(ii) $m = 2l+1$ のとき.

$$X_0 = \begin{array}{c|c|c} \overbrace{\quad}^m & \overbrace{\quad}^n & \overbrace{\quad}^1 \\ \hline I_l & & \\ \hline & I_{l+1} & \\ \hline & & 1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} l \in V(2m+1) \otimes V(2l+1) \text{ におけ} \\ l \\ 1 \end{array}$$

3 isotropy subalgebra を計算して見ると,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \overbrace{\quad}^l & \overbrace{\quad}^1 & \overbrace{\quad}^{m-l} & \overbrace{\quad}^l & \overbrace{\quad}^1 & \overbrace{\quad}^{m-l} & \overbrace{\quad}^1 \\ \hline A_1 & & & B_1 & & & D_1 \\ \hline & A_2 & A_{23} & & B_2 & B_{12} & -B_2 \\ \hline & & A_{32} & A_3 & & {}^t B_{12} & B_2 & {}^t B_{12} \\ \hline C_1 & & & & -{}^t A_1 & & & D_4 \\ \hline & C_2 & C_3 & & -{}^t A_2 & -{}^t A_{32} & & D_5 \\ \hline & & {}^t C_{23} & C_3 & & -{}^t A_{23} & -{}^t A_3 & {}^t A_{23} \\ \hline & & & & & & & D_5 - A_2 \end{array} \oplus \begin{array}{c|c|c} \overbrace{\quad}^l & \overbrace{\quad}^1 & \overbrace{\quad}^1 \\ \hline -{}^t A_1 & -{}^t C_1 & \\ \hline -{}^t B_1 & A_1 & \\ \hline -{}^t D_1 & -{}^t D_4 & {}^t A_{23} - {}^t D_5 \end{array}$$

$$\cong (sp(l) \oplus sp(m-l)) \cdot u(2l+1).$$

よって $\dim(sp(l) \oplus sp(m-l)) \cdot u(2l+1)$ が成り立つから,
この場合も P. V. である.

$$\textcircled{2} (Sp(m) \times SL(2m+1) \times GLU)^2, \quad \square \otimes \square \oplus 1 \otimes \text{日},$$

$$V(2m) \otimes V(2m+1) \oplus VU \otimes V(m(2m+1)) \quad (1 \leq 2m \leq 2n+1)$$

この P. V. 性は $1 \otimes \text{日}$ における generic isotropy subgroup を考
えることにより次の P. V. 性を調べることになる.

$$\left(Sp(m) \times \begin{bmatrix} Sp(m) & * \\ & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \times GLU \right), \quad \square \otimes \square, \quad V(2m) \otimes V(2m+1)$$

まずスカラー倍 GLU を除いて考える.

$$X_0 = \begin{array}{c|c|c} \overbrace{\quad}^n & \overbrace{\quad}^n & \overbrace{\quad}^1 \\ \hline I_m & & \\ \hline & I_{m-1} & \\ \hline & & 1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \in V(2m) \otimes V(2n+1) \text{ におけ} \\ m-1 \\ 1 \end{array}$$

P. V. である.

$$\textcircled{3} (SL(2m+1) \times SO(m) \times GLU)^2, \square \otimes \square \oplus \textcircled{0} \otimes 1,$$

$$V(2m+1) \otimes V(m) \oplus V(m(2m+1)) \otimes V(1)) \quad (4 \leq m \leq 2m+1)$$

これは命題より次の P. V. 性を調べればよい.

$$(SL(m-1) \times (SO(m) \times Sp(m)) \times GLU)^2, \square \otimes (\square + \square)$$

$$V(m-1) \otimes (V(m) \oplus V(2m))$$

これは P. V. 性は $(SL(m-1) \times SO(m) \times GLU), \square \otimes \square, V(m-1) \otimes V(m)$ における generic isotropy subgroup を考えることにより次と同値である.

$$(SO(m-1) \times Sp(m) \times GLU), \square \otimes \square, V(m-1) \otimes V(2m))$$

これは既約 P. V. の分類 (Sato-Kimura [1]) より, $m=4$ のとき P. V. である, $m \geq 5$ のときは P. V. ではない.

$m=4$ のときに実際に generic isotropy subalgebra を求めてみる. $(SL(2m+1) \times SO(4) \times GLU)^2, \square \otimes \square \oplus \textcircled{0} \otimes 1, V(2m+1) \otimes V(4) \oplus V(4) \otimes V(m(2m+1)) \otimes V(1))$ の $\textcircled{0} \otimes 1$ における generic isotropy subgroup を考えることにより, 次の P. V. の generic isotropy subalgebra を求めればよい.

$$\left(\begin{bmatrix} Sp(m) & \begin{smallmatrix} * \\ * \\ * \end{smallmatrix} \\ 0 & \begin{smallmatrix} * \\ * \\ * \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \times SO(4) \times GLU, \square \otimes \square, V(2m+1) \otimes V(4) \right)$$

$$X_0 = {}^t \left[\begin{array}{c|c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^m & \overbrace{\begin{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^m & \overbrace{\begin{matrix} 1 \\ \\ 1 \end{matrix}}^1 \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \end{array} \right] \in V(2m+1) \otimes V(4) \text{ における}$$

isotropy subalgebra を求めて升ると,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 \overbrace{1} & \overbrace{n-2} & \overbrace{1} & \overbrace{1} & \overbrace{m-2} & \overbrace{1} & \overbrace{1} \\
 \hline
 & {}^t D_5 & & \begin{smallmatrix} -d_1 \\ -z \end{smallmatrix} & {}^t D_2 & \begin{smallmatrix} -d_1 \\ -z \end{smallmatrix} & d_1 \\
 \hline
 & A_2 & & -D_2 & B_2 & -D_2 & D_2 \\
 \hline
 & {}^t D_5 & & \begin{smallmatrix} -d_1 \\ -z \end{smallmatrix} & -{}^t D_2 & \begin{smallmatrix} -d_1 \\ -z \end{smallmatrix} & d_1 \\
 \hline
 z & & -z & & & & \\
 \hline
 & C_2 & & -D_5 & -{}^t A_2 & -D_5 & D_5 \\
 \hline
 -z & & z & & & & \\
 \hline
 & & & & & & \\
 \hline
 \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 & -z & & z \\
 \hline
 z & & z & \\
 \hline
 & z & & -z \\
 \hline
 z & & z & \\
 \hline
 \end{array} \oplus ()$$

$$\cong \mathcal{A}\mathcal{P}(m-2) \cdot \mathcal{U}(2(m-1)).$$

$2 - n = \dim(\mathcal{A}\mathcal{P}(m-2) \cdot \mathcal{U}(2(m-1)))$ が成り立つから X_0 は generic な点となっている. したがって $\mathcal{A}\mathcal{P}(m-2) \cdot \mathcal{U}(2(m-1))$ が求める generic isotropy subalgebra である.

以上の結果から $\star$ が P.V. であるためには, (G, ρ, V) が次の ①, ②, ③ のうちのどれかであることが必要十分である.

$$\textcircled{1} \quad (SL(m), \square, V(m))$$

$$\textcircled{2} \quad (Sp(m), \square, V(2m))$$

$$\textcircled{3} \quad (SO(4), \square, V(4)).$$

最後に, 木村達雄先生には大変多くの事を教えていただき
ました. ここに心から感謝の意を表します.

参考文献

- [1] M. Sato and T. Kimura, A Classification of Irreducible Prehomogeneous Vector Spaces and Their Relative Invariants, Nagoya Math. J. Vol. 65 (1977), 1-155.
- [2] T. Kimura, A Classification of Prehomogeneous Vector Spaces of Simple Algebraic Groups with Scalar Multiples.