

C^* -algebra の Center について

沢城大 理 高 橋 真 映

§ 1. 序

A を C^* -algebra, $\text{Prim } A$ をその structure space とする。
 $\text{Prim } A$ は Jacobson topology で quasi-locally compact space になる。 $C^b(\text{Prim } A)$ を $\text{Prim } A$ 上のすべての有界な複素数値連続函数のつくる可換 C^* -algebra, $C_0(\text{Prim } A)$ を無限遠点でゼロになる $C^b(\text{Prim } A)$ の元全体の集合とする。本講では A にある条件を与えて $C_0(\text{Prim } A)$ が A の center に isomorphic になることを示す。

§ 2. Center の同型定理について

B を A の enveloping von Neumann algebra, Z_B をその center とする。 $P(A)$ を A のすべての pure state の集合, $\hat{A}$ を A の spectrum とする。すべての $f \in P(A)$ と $z \in Z_B$ に対して, operator $\pi_f(z)$ は scalar である。従って $P(A)$ 上で定義された

複素数値函数 φ_z^0 が存在して,

$$\pi_f(z) = \varphi_z^0(f) 1_{H_{\pi_f}}$$

を満す。ただし π_f は f によって定義された表現である。 λ^1, λ^2 をそれぞれ canonical mapping;

$$P(A) \longrightarrow \hat{A}, \quad \hat{A} \longrightarrow \text{Prim}(A)$$

としよう。従って $\hat{A}$ 上の複素数値函数 φ_z^1 と $\text{Prim}(A)$ 上の複素数値函数 φ_z^2 が存在して,

$$\varphi_z^0 = \varphi_z^1 \cdot \lambda^1, \quad \varphi_z^1 = \varphi_z^2 \cdot \lambda^2$$

を満す。 Z' を A の ideal center つまり $zA \subset A$ となるすべての $z \in A$ の元 z の集合とする。[1] において Dixmier は mapping $z \rightarrow \varphi_z (\equiv \varphi_z^2)$ は C^* -algebra Z' と C^* -algebra $C^b(\text{Prim} A)$ の間の isomorphism を与えることを証明した。さて我々は A の center の φ による image について考察する。次の定理は可換な場合の Gelfand representation theorem の一つの一般化である。

定理. A を次の条件を満す C^* -algebra, $Z \in A$ の center とする。

(*) すべての $\pi \in \hat{A}$ に対して $\pi|_Z \neq 0$ である。

このとき $\varphi(Z) = C_0(\text{Prim} A)$ である。

証明. $z \in Z$ とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\{\pi \in \hat{A} \mid \|\pi(z)\| \geq \varepsilon\}$ は compact である (Prop. 3.1.7 [2])。と 2.3 で

$\hat{A}$ の topology は λ^2 による $\text{Prim } A$ の topology の inverse image であるから, $\{J \in \text{Prim } A \mid |\varphi_z(J)| \geq \varepsilon\}$ も compact である. z のようにして我々は $\varphi(z) \in C_0(\text{Prim } A)$ を得る.

逆に, $\varphi_z \in C_0(\text{Prim } A)$ を満す $z \in \mathbb{Z}'$ を考えよう. $z \geq 0$ としても一般性を失わない. 今 $z \in A$ と仮定する. $z \geq 0$ で $A' = A + \mathbb{Z}'$ とおくと A' は C^* -algebra で A は A' の closed two-sided ideal である (Th. 8 [1]). 従って A' は pure state f_0 が存在して

$$f_0|_A = 0, \quad f_0(z) = \varepsilon_0 > 0$$

を満す. 我々は $\text{Prim } A$ を $\text{Prim } A'$ の中の open set とみると [1] の Theorem 10 によって φ_z の一意的拡張 $\varphi'_z \in C^b(\text{Prim } A')$ が存在する. $J_0 = \text{Ker } \pi_{f_0}$ とおく, 従って $J_0 \in \text{Prim } A'$ である.

$\text{Prim } A$ は $\text{Prim } A'$ の中で dense (Th. 10 [1]) であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $J_\varepsilon \in \text{Prim } A$ が存在して,

$$|\varphi_z(J_\varepsilon) - \varphi'_z(J_0)| \leq \varepsilon$$

である. 我々は $\varphi'_z(J_0) = \varepsilon_0$ であることに注意する (実際, φ'_z のつくり方は $z \in \mathbb{Z}'$ と $J \in \text{Prim } A'$ に対して $z \bmod J = \varphi'_z(J)$ を満す複素数 $\varphi'_z(J)$ が存在する, 従って $f_0(z) = \varphi'_z(J_0)$ を得る (Th. 10 [2] の証明参照)). $z \geq 0$ で φ_z は無限遠点でゼロになる函数であるから, z の family $\{J_\varepsilon \mid 0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2\}$ が infinite elements を持てば, $\{J_\varepsilon \mid 0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2\}$ は $\text{Prim } A$ の中に limit point を持つ (実際, 任意の位相空間で compact set は

countably compact ($\equiv$ Π -compact) である [4]). 今

$$K = \{ J \in \text{Prim } A \mid \varphi_\varepsilon(J) = \varepsilon_0 \}$$

とおく. 従って我々は

(1) 任意の J_0 の近傍 $U_\lambda(J_0)$ に對して $K \cap \overline{U_\lambda(J_0)} \neq \emptyset$

ただし $\{\lambda\}$ は direct set である.

を示めることが出来る. もし $\{J_\varepsilon \mid 0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2\}$ が finite set であつてのやほり (1) が成立することに注意する. すべての λ に對して $J_\lambda \in K \cap \overline{U_\lambda(J_0)}$ としよう. φ_ε は無限遠点でゼロになるから K は quasi-compact である. 従つて上と同様に $\{\lambda\}$ は K の中で limit point J_∞ を持つように出来る. $f_\infty \in P(A)$ を $\text{Ker } \pi_{f_\infty} = J_\infty$ を満すものとしよう. z_0 を z の任意の元とし, φ_{z_0}' を φ_{z_0} の 1 意的拡張な $C^b(\text{Prim } A')$ の元としよう. 従つて $f_0 \in P_A(A')$ より $\varphi_{z_0}'(J_0) = 0$ である. 1 つ任意の $\varepsilon > 0$ に對して λ_0 が存在して

$$|\varphi_{z_0}'(J_\lambda)| < \varepsilon, \quad \lambda_0 \leq \lambda$$

であるから我々は $\varphi_{z_0}'(J_\infty) = 0$, 従つて $f_\infty(z_0) = 0$ を得る.

いかに z には $\pi_{f_\infty}|_z \neq 0$ になる. 従つて $z \in A \cap z' = z$ である.

証明終り.

次に (*) を満す C^* -algebra A をつくってみよう. A が unit element を持つば trivial であることに注意する.

例. $(A_i)_{i \in I}$ を unit element $1^{(i)}$ を持つ C^* -algebra の family とする. A を family $(A_i)_{i \in I}$ の restricted C^* -algebra (i.e. A は任意の $\varepsilon > 0$ に対して finite indices i を除いては $\|x_i\| < \varepsilon$ を満たす element $x = (x_i) \in \prod_{i \in I} A_i$ の集合で sup-norm を持つ) とする. 従って A は discrete space I 上の C^* -algebra A_i によって定義された C^* -algebra である (10.10.1 [2]). $\rho \in \hat{A}$ としよう. Theorem 10.4.3 [2] によって $i_0 \in I$ と $\pi \in \hat{A}_{i_0}$ が存在して,

$$\text{任意の } x \in A \text{ に対して, } \rho(x) = \pi(x_{i_0})$$

を満たす. 今

$$x_i = \begin{cases} 1^{(i_0)} & \text{if } i = i_0 \\ 0 & \text{if } i \neq i_0 \end{cases}$$

と定義すると $x = (x_i)$ は A の元である. ここで $\mathbb{Z}$ を A の center とすると, 明らかに $x \in \mathbb{Z}$ で $\rho(x) \neq 0$ である. このようにして A は (*) を満たす. もし $\text{Card } I \geq \aleph_0$ なら A は unit element を持たないことに注意する.

今 A, A' を unit element を持つ C^* -algebra, $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}'$ をその center とする. φ を A から A' への surjective $*$ -homomorphism とする. [5] において Vesterstrom は次の定理を証明した.

定理. 次の (i) ~ (iii) は同値である.

(i) $\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}'$,

(ii) canonical map $(\varphi|_{\mathbb{Z}})^{\vee} : \text{Prim } \mathbb{Z}' \rightarrow \text{Prim } \mathbb{Z}$ は injective,

(iii) $J_1', J_2' \in \text{Prim } A'$ が $\mathcal{C}(\text{Prim } A')$ の元で分離できれば $\check{\varphi}(J_1')$, $\check{\varphi}(J_2')$ も $\mathcal{C}(\text{Prim } A)$ の元で分離される。

したがって canonical map $\check{\varphi}: \text{Prim } A' \rightarrow \text{Prim } A$, $\mathcal{C}(\text{Prim } A)$ は $\text{Prim } A$ 上の複素数値連続函数の全体。

我々は unit element を持たない C^* -algebra に対する上の議論に我々の定理がつかえるのではないかと思う。

§3. 他の structure の場合

A を C^* -algebra, A^{**} を A の second Banach space dual とする。 A^{**} は von Neumann algebra となり A^{**} のすべての minimal projection の supremum である central projection $z \in A^{**}$ が存在する。 $M = zA^{**}$ とおく。 $A \subset M$ とみることが出来る。

また A が可換の場合には M は maximal ideal space 上のすべての有界複素数値函数のつくる algebra とみることが出来る。

projection $p \in M$ が f -open とは, A の closed left ideal I が存在して $M_p = \text{weak}^* \text{-closure of } I \text{ in } M$ となることである。

M の self-adjoint operator b が f -continuous とあるとは, b の spectral projection が f -open となることである。 [3] に

おいて Akemann は f -open projection 全体のつくる structure に対する上の Dixmier の結果に相当する定理として次の定理を証明した。

定理. A の ideal center ($\equiv Z'$) は $\mathbb{R}$ -continuous であるような M の central element の集合に等しい。

また 2 の定理と Akemann の Gelfand representation theorem (Th. II. 3 [3]) を用いると, 上の structure に対する我々の結果に相当する事柄が容易に示めされる。つまり

定理. Z も A の center とすると, Z は無限遠点でゼロ (Th. II. 3 [3] の中の定義参照) になる Z' の元の集合に等しい。

参考文献

- [1] J. Dixmier, Ideal Center of a C^* -algebra, Duke Math. J. 35 (1968) 375-382
- [2] ———, Les C^* -algèbres et leurs représentations, Paris, (1964)
- [3] C. Akemann, A Gelfand Representation theory for C^* -algebras, Pacific. J. Math. 39,1 (1971) 1-11
- [4] G. Bachman, L. Narici, Functional Analysis, New York and London (1966)
- [5] J. Vesterström, On the homomorphic image of the center of a C^* -algebra, Math. Scand. 29 (1971) 134-136