

対称こまの運動に現れる幾何学的位相

名大工 福本 康秀 (Yasuhide Fukumoto)

1 序

非粘性・非圧縮性流体中において、外部流と釣り合って静止している渦糸の平衡形を局所誘導近似 (LIA) のもとで解析する。まず、渦糸の平衡形と、磁場中の荷電粒子の軌跡とが等価であることを示す。静止流体中を形を変えないで運動する渦糸 (=木田クラス) がその一例になる。

木田クラスは、重力場中の対称こま (=ラグランジュのこま) の運動と等価である。後半では、対称こまの回転に伴って現れる幾何学的位相について論じる。

2 流れの中での渦糸の平衡形

細長い紐状の領域に渦度が集中したものが渦糸である。渦糸の自己誘導運動は Biot-Savart の積分により求められるが、積分領域を着目している (渦糸上の) 点の両側の長さ L の部分に限るのが局所誘導近似 (LIA) である。渦糸曲線を ξ でパラメトライズしよう。外部流 $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ が存在する場合には、渦糸上の点 $\mathbf{X}(\xi, t)$ の発展方程式は次式で与えられる:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\xi, t) = A \mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss} + \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \quad , \quad (1)$$

$$A = \frac{\Gamma}{4\pi} \log \left(\frac{L}{\sigma} \right) \quad . \quad (2)$$

ここで、 κ は曲率、 $\mathbf{b}$ は陪法線ベクトル、 σ は渦核のサイズと同程度の長さを表す。下付添字 s は長さ s による微分を意味する。

さらに、外部流が定常であるとして、その中で静止している渦糸の形状を求めたい。渦糸上の点はそれ自身に沿ってのみ動きうる。すなわち、(1) は

$$A \mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss} + \mathbf{V}(\mathbf{X}) = V_{\parallel} \mathbf{t} \quad , \quad (3)$$

に置き換わる．ここで， $t = X_s$ は単位接線ベクトルである． $V_{||}$ は一般には ξ と t に依存してよく，それにより，渦線の伸び・縮みを許容する．ベクトル t との外積をとると，(3) は

$$AX_{ss} = X_s \times V(X) \quad , \quad (4)$$

と変形される．長さ s を時間 t ， V を磁場， $A = m/q$ と読み換えると，(4) は質量 m ，電荷 q をもつ荷電粒子の磁場 $V(X)$ 中での運動を記述する式と等価になる¹⁾．すなわち，ローレンツ力を受けて運動する荷電粒子の軌跡と，流れの中での渦糸の静止形が等価である．荷電粒子の運動の扱いにおいて発展したラグランジュあるいはハミルトン形式を用いれば，渦糸の形も容易に求められよう．

3 木田クラス

前節で見出したアナロジーのご利益を示すのに最も適した例は，静止流体中を形を変えないで運動する渦糸である．木田²⁾ は，そのような運動が，ある方向 (z 軸方向としよう) への並進，その方向を軸とする剛体回転，及び渦糸自身に沿うすべりよりなることを洞察し，以下の式に帰着させた：

$$AX_s \times X_{ss} = -c_0 X_s + \Omega e_z \times X + V e_z \quad . \quad (5)$$

ここに， c_0 ， Ω ， V は定数で，それぞれ，すべり速度，回転角速度，並進速度を表す．

式 (5) と $t = X_s$ との外積をとると，われわれの形式にもちこめる：

$$A\ddot{X} = \dot{X} \times V(X) \quad . \quad (6a)$$

ここに，外部磁場は

$$V = -\Omega e_z \times X - V e_z \quad , \quad (6b)$$

で，ドットは長さ s に関する微分を意味する．剛体的に運動する渦糸の形 (= 木田クラス) は，一様磁場と周方向磁場の合成から成る場の中での荷電粒子の軌跡と等価である．

場 (6b) を与えるベクトルポテンシャル A ($V = \nabla \times A$) は，

$$A = \left(\frac{V}{2}y, -\frac{V}{2}x, \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2) \right) \quad , \quad (7)$$

である．荷電粒子の運動に対するラグランジアン $\mathcal{L}$ は一般に

$$\mathcal{L} = \frac{A}{2} \dot{X}^2 + \dot{X} \cdot A \quad , \quad (8)$$

で与えられ，今の場合，極座標 (r, ϕ, z) を使うと，

$$\mathcal{L} = \frac{A}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \left(\frac{V}{2} r^2 \dot{\phi} - \frac{\Omega}{2} r^2 \dot{z} \right) \quad , \quad (9)$$

となる．式 (9) より， z と ϕ が循環座標であることが読みとれ，第 1 積分が直ちに得られる：

$$P_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = A\dot{z} + \frac{\Omega}{2}r^2 = \text{const.} , \quad (10a)$$

$$P_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = Ar^2\dot{\phi} - \frac{V}{2}r^2 = \text{const.} \quad (10b)$$

また，粒子の運動エネルギーの保存は，渦糸曲線の長さによるパラメータ化によって自動的に実現される：

$$|\dot{\mathbf{X}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 = 1 . \quad (10c)$$

方程式系 (10a - c) は木田が (5) より直接導き出したものと同じである．ラグランジュ形式によって，(10a,b) が容易に得られたことに気づかれない。

第 1 積分 (10a,b) の第 1 項 $A\dot{z}$ ， $Ar^2\dot{\phi}$ は，それぞれ，粒子のもつ運動量の z 成分，角運動量の z 成分である．第 2 項は空間（真空中）に蓄えられた全電磁運動量 $\mathbf{P}_{em}$ ，全電磁角運動量 $\mathbf{M}_{em}$ の z 成分と考えるのが自然であろう．実際，クーロングージ条件 ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) のもとでは ((7) はそうになっている)，真空中に単一の荷電粒子（電荷 q ）が存在する場合の全電磁運動量・角運動量は次式で与えられることが証明できる³⁾：

$$\mathbf{P}_{em} = q\mathbf{A}(\mathbf{X}) , \quad (11a)$$

$$\mathbf{M}_{em} = q\mathbf{X} \times \mathbf{A}(\mathbf{X}) . \quad (11b)$$

ただし， $\mathbf{X}$ は粒子の位置で，無限遠方の境界上の積分からくる寄与は無視できるものとした．表式 (7) を (11) に当てはめれば，上述の解釈が正しいことが納得される。

4 ラグランジュのこま

木田クラスは，重力場中の対称こま（＝ラグランジュのこま）の一点を固定された運動と等価である．このことを簡単にみてみよう．

正確に言うと，「対称」の意味するところは，物体の慣性楕円体が軸対称性をもつということであって，物体自身が軸対称である必要は必ずしもない．物体の重心は対称軸上にある．対称軸に沿う単位ベクトルを $\mathbf{t}(t)$ ，それに垂直で物体に固定された（互いに直交する）単位ベクトルを $\mathbf{e}_1(t)$ ， $\mathbf{e}_2(t)$ としよう．物体の回転角速度を $\boldsymbol{\omega}(t)$ とすると，直交枠 $(\mathbf{t}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ は次式に従って発展する：

$$\dot{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t} , \quad (12a)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 . \quad (12b)$$

残りの $e_2 = t \times e_1$ の時間発展は, t と e_1 のそれより直ちに得られる. 式 (12a) と t , (12b) と e_1 との外積をとると,

$$\omega = t \times \dot{t} + (t \cdot \omega) t, \quad (13a)$$

$$= e_1 \times \dot{e}_1 + (e_1 \cdot \omega) e_1, \quad (13b)$$

を得る. 軸対称性より, 固定点まわりの角運動量 m は

$$m = A(t \times \dot{t}) + C\omega_3 t, \quad (14)$$

で与えられる. ここに, A は対称軸に垂直な面内での, C は対称軸まわりの慣性モーメントである. また, $\omega_3 = t \cdot \omega$ である. この表式は (13a) のみを用いて得られたのであって, (13b) あるいは (12b) は不要である. このことは, こまの (対称軸に) 垂直面の回転の自由度が落とされたことを意味する.

ニュートン力学の教えるところによれば, 固定点まわりの角運動量の変化率と, その点まわりのトルクが等しい. すなわち,

$$\dot{m} = t \times (-mgl e_z), \quad (15)$$

である. ここで, m は物体の質量, g は重力加速度, l は固定点と重心との間の距離である. 新しい変数 $X(t) = \int^t t dt$ を導入すれば, (15) は形式的に積分できる. 積分定数を適切に決め, 定義 (14) を思い出せば, 得られた式が (5) と同じ形をしていることがわかる. すべり速度は $c_0 = C\omega_3$ によって与えられる.

この段階で, ラグランジュのこまの運動に対する解法を呈示することができる; 式 (14) を考慮に入れ, (15) を積分して (5) に帰着させる. そこから, (10a-c) を導き, それらを積分することによって, $X(t)$ を得る. 時間 t について微分すれば, こまの軸 t の運動が得られる. 本解法の特徴は, 通常の場合と違って, Euler 角が登場しないことである.

上で, 垂直面の回転の自由度が低減されたことを指摘したが, このことは次の手続きにより明確になる. 式 (14) を (15) に代入し, さらに, t との外積をとると,

$$A\ddot{t} = -mgl[e_z - (t \cdot e_z)t] - A(\dot{t} \cdot \dot{t})t - C\omega_3 \dot{t} \times t, \quad (16)$$

を得る. これは, 重力場と磁場中で, 単位球面 S^2 上に拘束された (質量 A , 電荷 q をもつ) 質点 (= 球面振子) の運動を支配する方程式とみなせる. 質点の位置は t で指定される. 右辺第 1 項と第 2 項を併せたものは, 重力の球面への接成分と考えられる. ただし, 重力加速度は mgl/A である. 第 3 項は向心力を表し, 質点が単位球面上に拘束されることを保証する. 第 4 項はローレンツ力で, 磁場 B は原点 $t = o$ におかれた磁気単極子によって生成される:

$$(q/A)B = -\frac{C\omega_3}{A} \frac{t}{|t|^3}. \quad (17)$$

単極子の強さは、こまの軸まわりの回転角速度 ω_3 で決まる。

この最後の項がなければ、(16) は通常の球面振子の運動方程式と全く等価である。球面振子とラグランジュのこまの軸の運動は一見して似ているようであるが、実は大きな違いが存在する。球面振子の場合、質点はその運動の少なくとも一部において支点 ($t = o$) より下側を通過しなければならない。しかるに、まわっているこまの場合 ($C\omega_3 \neq 0$)、絶えず重心を上を持ち上げ続けることが可能である。こまらしさは最後の項によって付与されるのである。式 (16) はすでに Berry & Robbins⁴⁾ によって導かれている。また、類似のアナロジーが Novikov⁵⁾ や Veselov⁶⁾ によって得られている。

ラグランジュのこまの運動を記述する配位空間は回転群 $SO(3)$ である。 $SO(3)$ の元を指定するには3つのパラメータが必要である。Euler 角 (θ, φ, ψ) を用いることが多い。一方、球面振子の運動は単位球面 S^2 上の1点 (θ, φ) を指定するだけでよい。後者においては、自由度が3から2に低減 (reduction) したことになる。この低減の起源はこまの軸対称性に求めることができる。低減された系の運動においてローレンツ力が現れるのは偶然ではない。それについては次節で論じることにする。

低減の逆のプロセスとして、再構成 (reconstruction) の問題が考えられる。 S^2 上の解曲線から $SO(3)$ の解曲線を求めるのである。具体的には、こまの垂直面 (e_1, e_2) の回転角を求めることに相当する。回転角の決め方は角度の基準のとり方に依存する。そこで、話を明確にするために、以下のような問題を設定しよう：

こまの軸 t が、周期 T の周期運動を行うものとする (一般的には、準周期運動である)。さらに、軸の先端 t が描く球面 S^2 上の閉曲線 C が滑らかであると仮定する。「軸が C を1周する間に、こまの垂直面は何度回転するだろうか？」

Euler 角を用いると、軸のまわりの角速度 ω_3 は

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta, \quad (18)$$

と書ける。1周期後、 t はもとにもどり、その間の垂直面の回転角は明確に定まる。具体的には、球面上の Stokes の定理を用いて、

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \int_0^T \dot{\psi} dt \\ &= \omega_3 T - \int_0^T \cos \theta d\varphi \\ &= \omega_3 T + \Omega - 2\pi k, \end{aligned} \quad (19)$$

と計算される。ここで、

$$\Omega = \iint \sin \theta d\theta \wedge d\varphi, \quad (20)$$

は閉軌道 C によって囲まれる単位球面上の面積、すなわち立体角である。最後の k はある整数で、球面座標の特異点 $\theta = 0, \pi$ に由来し、 C がそれを何回まわるかで決まる。

回転角 $\Delta\psi$ には2種類の寄与があることがわかる．第1項 $\omega_3 T$ は dynamic angle と呼ばれ，残りの $\Omega - 2\pi k$ は geometric angle と呼ばれる．後者は， S^2 上の閉軌道の幾何学的形状によってのみ決まり，その上を運動するスピードには依らないのでそのように呼ばれる．量子力学の波動関数の位相因子に現れる Berry 位相の古典力学版である．立体角が geometric angle を与えることは多くの文脈で明らかにされてきたが，対称物体の回転に対しては，Hannay⁷⁾ や Anandan⁸⁾ によってすでに指摘されている．

reduction に伴って現れる磁気単極子と，reconstruction の結果現れる geometric angle との関係について次節で考えよう．

5 Lagrange reduction

$SO(3)$ 上から S^2 上の運動への自由度の低減 (reduction)，あるいは，その逆である再構成 (reconstruction) の手続きは，Marsden⁹⁾ らによって開発された cotangent bundle reduction や Lagrange reduction の枠組みを用いて系統的に記述することができる．以下では，ラグランジュ形式によく馴染む Lagrange reduction を採用して，reduction & reconstruction について概説する．

$SO(3)$ を S^2 上の S^1 -束とみなす．群 $S^1 (\cong SO(2))$ が，対称軸 t まわりの回転として， $SO(3)$ に右から free に作用する．作用が右であるのは，動いている軸のまわりの回転であることによる．ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{A}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta, \quad (21)$$

は S^1 の右作用のもとで不変である． S^1 の Lie 環 $\mathcal{G}$ は角速度の軸方向成分 $\omega_3 = t \cdot \omega$ と同一視できる．すなわち， $\mathcal{G} \cong \mathbf{R}$ である． $\mathcal{G}$ の双対 $\mathcal{G}^*$ は角運動量の軸方向成分 $M_3 (\cong \mathbf{R})$ である．一般的な処方箋に従えば， $SO(3)$ 上の接続1形式は $M_3/C : TSO(3) \rightarrow \mathcal{G}$ で与えられ，よって， ω_3 がその役割を果たす：

$$\omega_3(\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) = \cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi}. \quad (22)$$

さて， $M_3 = \mu$ を一つ固定し， $SO(3)$ 上の1形式 $\alpha^\mu = \alpha_\theta d\theta + \alpha_\varphi d\varphi + \alpha_\psi d\psi$ を次式で定義しよう^{9,10)}：

$$\alpha_\theta \dot{\theta} + \alpha_\varphi \dot{\varphi} + \alpha_\psi \dot{\psi} = \mu \omega_3. \quad (23)$$

左辺は $TSO(3)$ と $T^*SO(3)$ の間の自然な対で，右辺は $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}^*$ の間の対である．式 (22) を代入すれば，

$$(\alpha_\theta, \alpha_\varphi, \alpha_\psi) = (0, \mu \cos \theta, \mu), \quad (24)$$

を得る．

ラウシアン $\mathcal{R}^\mu$ は $\mathcal{L}$ のルジャンドル変換で, ω_3 を μ に換える. Marsden による定義は

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^\mu(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) &\equiv \mathcal{L} - \mu\omega_3 \\ &= \frac{A}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - \left(\frac{\mu^2}{2C} + mgl \cos \theta \right),\end{aligned}\quad (25)$$

で, よく知られたものとは若干異なる. $SO(3)$ から $S^2 \cong SO(3)/S^1$ への reduction は次の reduced Lagrangian principle によって実現される⁹⁾:

μ を固定したとき, S^2 上の解は, 以下の形をしたジャイロ項 (ローレンツ力) をもつ Euler-Lagrange 方程式を満たす:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}^\mu}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathcal{R}^\mu}{\partial q^i} = \dot{q}^j \beta_{ij} \quad (26)$$

ここで, q^i ($i=1,2$) は S^2 上の座標, β_{ij} は 2 形式 $\beta = d\alpha^\mu$ の成分で, $\beta_{ij} = \partial\alpha_j/\partial q^i - \partial\alpha_i/\partial q^j$ と書ける. 右辺は j について和をとる.

ジャイロ項が現れるのは, 運動量が $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$ から $\partial\mathcal{R}^\mu/\partial\dot{q}_i = p_i - \alpha_i$ にシフトすることから理解されよう. 実際, (24) と (25) を (26) に代入すると, 再び (16) を得る.

ω_3 が接続 1 形式であることより, $SO(3)$ 上の 2 形式 β が S^2 上に自動的に落ちることに注意しておく. $SO(3)$ 上の切り口 (section) として, $\psi = \pm\varphi$ をとると, (22), (23) は

$$\alpha^\mu = \mu(\cos \theta \pm 1)d\varphi, \quad (27)$$

となる. ベクトル解析の表記法を用いると, (27) はベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}^N = -\frac{\mu(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{A}^S = \frac{\mu(1 + \cos \theta)}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi, \quad (28)$$

を与える. 今は単位球面 S^2 上で考えているので, $r=1$ である. 式 (27), (28) は強さ $-\mu$ の磁気単極子の作る磁場を与えるポテンシャルである³⁾. ω_3 の表式 (22) にそれを生み出す秘密が隠されている.

S^2 上から $SO(3)$ 上の軌道への再構成 (reconstruction) も系統的に行える. 式 (12b) の解, あるいは, 軸 t に垂直な面の回転を考えるのであるが, 手続きは 2 つのステップに分けられる. まず, S^2 上の解の $SO(3)$ への水平持ち上げ (horizontal lift) を考える. 次に, ファイバー S^1 上の角速度 ω_3 の運動 (基本ベクトル場による) を足し合わせればよい. 後者からの寄与が dynamic angle $\omega_3 T$ である. geometric angle は前者によって与えられる. 水平持ち上げされた $SO(3)$ 上の曲線に対する接ベクトルは, 定義により,

$$\omega_3 = \cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi} = 0, \quad (29)$$

を満足する. 要は, こまの軸がまわっていない ($\omega_3 = 0$) にもかかわらず, まわってしまう垂直面の回転を問題にするのである. これは, 垂直面 ($= S^2$ の接平面) が互いに平行で

はないことに起因する。\$S^2\$ 上の解軌道が閉曲線を描くとする、その \$SO(3)\$ への水平持ち上げにおいては、1 周期後の垂直面の回転角、すなわち、holonomy (の対数) は、\$2\pi\$ の整数倍は別として、

$$\Delta\psi = -\oint \cos\theta d\varphi = \iint \sin\theta d\theta \wedge d\varphi = -\frac{1}{\mu} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad , \quad (30)$$

で与えられる。ただし、\$\mathbf{B}\$ は (17) によって定義される。holonomy (の対数) は \$S^2\$ 上の閉曲線がとり囲む領域の面積 (立体角) であり、磁気単極子の作る磁場 (17) がそこを貫く磁束と自然に関係づけられた。

以上得られた知見を要約すると次のようになる；

ラグランジュのこまの運動と電荷をもつ球面振子の運動はほとんど等価である。前者から後者への移行において、対称性に基づく自由度の低減 (reduction) が行われた。reduction の影響として、磁気単極子が生ずる。逆に、\$S^2\$ 上の解曲線から \$SO(3)\$ 上の解曲線の再構成 (reconstruction) を行うと、ホロノミーの効果として、こまの軸の回転角に geometric angle が加わる。geometric angle は単極子磁場が \$S^2\$ 上の (解軌道が囲む) 領域を貫く磁束と関係づけることができる。こまの軸のまわりの回転角速度 ((18) で与えられる) こそが接続 1 形式であり、単極子磁場を与えるゲージ場 (ベクトルポテンシャル) である。

参考文献

- [1] Y. Fukumoto, In *Unstable and Turbulent Motion of Fluid*, (ed. S. Kida, World Scientific, 1993), pp. 50-58.
- [2] S. Kida, J. Fluid Mech. **112** (1981) 397.
- [3] 今井功, 電磁気学を考える (サイエンス社, 1990), 第 14 章.
- [4] M. V. Berry and J. M. Robbins, Proc. Roy. Soc. Lond. A **442** (1993) 641.
- [5] S. P. Novikov, Russian Math. Surveys **37** (1982) 1.
- [6] A. P. Veselov, Sov. Phys. Dokl. **28** (1983) 458.
- [7] J. H. Hannay, J. Phys. A: Math. Gen. **18** (1985) 221.
- [8] J. Anandan, Phys. Lett. A **129** (1981) 201.
- [9] J. E. Marsden, *Lectures on Mechanics*, London Mathematical Society Lecture note series **174**, (Cambridge University Press, 1992).
- [10] M. Kummer, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981) 281.