

Easton 型手術による

ベクトル場の正則化について

京大 数学 早川 英治郎

Eijirou Hayakawa

§.1. 二体問題の特異点と正則化問題

二体問題とは, Hamilton 函数,

$$H(P_1, P_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2} (\|P_1\|^2 + \|P_2\|^2) - \frac{1}{\|q_1 - q_2\|}.$$

によって定義される Hamilton 力学系, つまり常微分方程式系,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2)$$

のことである. (cf. [A-M]) $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$ の部分集合 S を

$$S = \{(P_1, P_2, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6; \quad q_1 = q_2\}$$

と定義する時, この力学系の相空間 (つまり, 方程式系の定義されている空間) は,

$$\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 - S$$

となる。この時、 S を二体問題の特異点集合と呼ぶ。 P_i, q_i ($i = 1, 2$) は i 質点のそれぞれ運動量と位置を表わすが、このことを考慮すると、特異点集合 S は、2 質点の衝突状態を表わすことがわかる。

この特異点集合 S の正則化とは、雑に言って " S へ入り込む解曲線" つまり、衝突状態に到る解曲線を " S を越えて延長" することである。

ところで、この系は、linear momentum, $P_1 + P_2$, (系の x 1 積分の 1 つ、cf. [A-M]) を $= 0$ とした積分曲面上に制限すること、(このことは、質点系の重心を固定することに対応する) Kepler 問題に還元される。Kepler 問題とは、Hamilton 函数、

$$H(P, q) = \frac{1}{2} \|P\|^2 - \frac{1}{\|q\|}.$$

によって定義される Hamilton 力学系のことである。二体問題の特異点集合は、この制限によって、

$$S = \{ (P, q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 ; q = 0 \}$$

となる。

この Kepler 問題に関して、上で述べた正則化の問題は、古くより研究され、質点が平面内を動く場合は、Levi-

Civita によって解かれ, Moser により一般次元 (i.e. $P, \varphi \in \mathbb{R}^n$) に拡張された. (cf. [Mos]) この正則化は, 解のパラメーターの変換によって, 特異点集合を越え解析接続できることを示したものであった.

§.2. Easton の idea

二体問題の正則化問題は, §.1 で述べたように解析的方法によって解かれたが, Easton は, より位相的方法でこの問題を解いた. ここでは, その方法について述べよう.

まず, 次のような状況を考える. M を向きづけ可能な n 次元 C^∞ 多様体 ($n \geq 2$), S を M の閉部分集合とする. X を $M - S$ 上の C^∞ ベクトル場で, 次の条件をみたすものとする.

x を通る最大解曲線が, (a, b) 上で存在する時,

$$a > -\infty \quad \text{ならば} \quad \lim_{t \rightarrow a+0} d(S, \varphi^t(x)) = 0,$$

$$b < +\infty \quad \text{ならば} \quad \lim_{t \rightarrow b-0} d(S, \varphi^t(x)) = 0.$$

ここで, φ は X の積分を表わす.

この状況のもとで, S に対する "Isolating Block" という概念を導入する.

定 義 1. M の n 次元連結部分多様体 B が, 次

の条件 i) ~ iii) を満す時, S に対する Isolating Block である
 と言ふ.

$$i). \quad S \subseteq \text{Int } B \subseteq M$$

ii). B の境界 ∂B ($\neq \emptyset$) の部分集合 ℓ^+ , ℓ^- , τ を

$$\ell^+ = \{ x \in \partial B; \exists \varepsilon > 0, x \cdot [-\varepsilon, 0) \subseteq B^c \}$$

$$\ell^- = \{ x \in \partial B; \exists \varepsilon > 0, x \cdot (0, \varepsilon] \subseteq B^c \}$$

$$\tau = \{ x \in \partial B; \chi_x \in T_x \ell \}$$

と, 定義する時, (χ_x はベクトル場 X の x での値を示す.) ℓ^+ , ℓ^- は ℓ の $n-1$ 次元境界つき部分多様体であり, τ は $n-2$ 次元部分多様体となる. しかも, 次の関係をみたす:

$$\partial B = \ell = \ell^+ \cup \ell^-, \quad \partial \ell^+ = \partial \ell^- = \ell^+ \cap \ell^- = \tau.$$

iii). B の部分集合 A^+ , A^- を

$$A^+ = \{ x \in B; x \cdot [0, t_x) \subseteq B \}$$

$$A^- = \{ x \in B; x \cdot (t_{x'}, 0] \subseteq B \}$$

と定義する. ただし, $x \cdot [0, t_x)$ は x を通る正方向への最大解曲線, $x \cdot (t_{x'}, 0]$ は負方向への最大解曲線とする. この時, $x \in A^+$ または A^- ならば,

$$\lim_{t \rightarrow t_x - 0} d(\varphi^t(x), S) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{x'} - 0} d(\varphi^t(x), S) = 0,$$

をみたす.

以下, B , A^+ , ℓ , ℓ^+ , τ 等は, ことわりなしに上で定義した意味で用いる. 更に, 次の記法を用いる:

$$\alpha^+ = A^+ \cap \ell = A^+ \cap \ell^+, \quad \alpha^- = A^- \cap \ell = A^- \cap \ell^-.$$

また, すでに定義1の中で用いているが, x を通る軌道の部分集合 $\{\varphi^t(x); t \in J\}$ (J は, 実数 $\mathbb{R}$ の部分集合)を $x \cdot J$ と記す.

この *Isolating Block* は, 次の基本的な補題を満たす.

補題 1. A^+ , A^- は $B - S$ で閉集合である. α^+ , α^- は ℓ (したがって M で) で閉集合であり, しかも $\text{Int } \ell^+$, $\text{Int } \ell^-$ にそれぞれ含まれる.

補題 2. (cf. [E1]) $\ell^+ - \alpha^+$, $\ell^- - \alpha^-$ 上の函数 σ^+ , σ^- を

$$\sigma^+(x) = \sup \{ t \in \mathbb{R}_+; x \cdot [0, t) \subset B \},$$

$$\sigma^-(x) = \sup \{ t \in \mathbb{R}_+; x \cdot (-t, 0] \subset B \}$$

と定義すると, σ^+ , σ^- は連続函数となる.

更に, 補題2よりも強く, 次の命題が成り立つ.

補題 3. $\sigma^+|_{\text{Int } \ell^+ - \alpha^+}$ は可微分である.

補題 2, 3 を用いると,

補題 4. $\mathcal{C}^+ - \alpha^+$ は $\mathcal{C}^- - \alpha^-$ と位相同型である.

$\text{Int } \mathcal{C}^+ - \alpha^+$ は $\text{Int } \mathcal{C}^- - \alpha^-$ と微分同型である.

証 明. 写像

$$\pi : \mathcal{C}^+ - \alpha^+ \longrightarrow \mathcal{C}^- - \alpha^-$$

を, $\pi(x) = \varphi^{\sigma^+(x)}(x)$ で定義すればよい.

特異点集合 S に対して, Isolating Block B が存在する状況を考えよう. S がこの B に関して, 正則化可能である, ということ, 次のように定義する.

定 義 2. 特異点集合 S が, Isolating Block B に関して正則化可能であるとは, B によって決まる微分同型写像 (cf. 補題 4),

$$\pi : \text{Int } \mathcal{C}^+ - \alpha^+ \longrightarrow \text{Int } \mathcal{C}^- - \alpha^-$$

($\pi|_{\text{Int } \mathcal{C}^+ - \alpha^+}$ を単に, " π " と記すことにする.)

が, $\text{Int } \mathcal{C}^+$ より $\text{Int } \mathcal{C}^-$ への同型写像に拡張可能なことを言う. つまり, 微分同型写像,

$$\tilde{\pi} : \text{Int } \mathcal{C}^+ \longrightarrow \text{Int } \mathcal{C}^-$$

で, $\pi \mid \text{Int } \mathcal{C}^+ - \alpha^+ = \pi$ となるものが存在することを言う.

Easton は § 1 で述べた Kepler 問題に関して, 次の結果を得ている.

定 理 (Easton [E 1]) Kepler 問題の特異点集合に対しては, それを正則化可能とする Isolating Block が存在する.

§. 3. Easton 型手術による

ベクトル場の正則化

§ 2 で述べたように Kepler 問題の特異点集合に対しては, "特定の" Isolating Block でそれに関して特異点集合が正則化可能となるものが存在する. ([E 1]では, 具体的に構成している) ところで, 他の Isolating Block が存在する時, その Isolating Block に関して正則化可能でない, ということが起こるなら, "正則化可能" という概念は無意味なものとなってしまう.

そこで, 正則化可能性の Isolating Block に対する独立性が問題となる. この節では, この問題について述べよう. 以下, 簡単のため次の記号を用いる.

$\mathcal{B} = \mathcal{S}$ に関する Isolating Block の全体

$\mathcal{B}_\phi = \{ B \in \mathcal{B} ; \forall x \in \tau \text{ に対し } ,$

$$\langle X_x \rangle + T_x \tau = T_x \ell \}$$

ここで, $\langle X_x \rangle$ は X_x が $T_x \ell$ 上で生成する一次元部分ベクトル空間を表わす. 以後, $\mathcal{B} \neq \phi$ を仮定して話を進める.

以下の議論の基礎となる定義を与える.

定 義 3. $B, B' (\in \mathcal{B})$ が以下の条件を満足する時, B と B' の間に "関係" $B > B'$ が成立するという:

i). $\mathcal{S} \subseteq B \subseteq B'$

ii). 函数

$$t^\pm : \text{Int } \ell^\pm \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\partial t^\pm : \partial \ell^\pm \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

を

$$t^+(x) = \sup \{ t \in \mathbb{R}_+ ; x \cdot (-t, 0] \cap \ell'^+ = \phi \}$$

$$t^-(x) = \sup \{ t \in \mathbb{R}_+ ; x \cdot [0, t) \cap \ell'^- = \phi \}$$

$$\partial t^+(x) = \sup \{ t \in \mathbb{R}_+ ; x \cdot (-t, 0] \cap \ell'^+ = \phi \}$$

$$\partial t^-(x) = \sup \{ t \in \mathbb{R}_+ ; x \cdot [0, t) \cap \ell'^- = \phi \}$$

と定義する. この時これらの函数はすべて微分可能となり, 更に写像,

$$\eta^\pm : \text{Int } \ell^\pm \longrightarrow \ell'^\pm$$

$$\partial\eta^\pm : \partial\mathcal{B}^\pm \longrightarrow \mathcal{B}'^\pm$$

を,

$$\eta^\pm(x) = \varphi^{-t^\pm(x)}(x), \quad \varphi^{t^\pm(x)}(x)$$

$$\partial\eta^\pm(x) = \varphi^{-\partial t^\pm(x)}(x), \quad \varphi^{\partial t^\pm(x)}(x)$$

で定義する時, それぞれ埋め込みとなる.

定義 3 より, 次の補題が容易に得られる.

補題 5. $B, B' \in \mathcal{B}$ が $B < B'$ であるとする.

この時, S が B に関して正則化可能であることと, B' に関して正則化可能であることは同値である.

証明. 定義 1. iii) より, $a^\pm$ の $\eta^\pm$ による像は, $a'^\pm$ となるとわかる. このことと定義 3 より,

$$(*) \quad \pi' | \text{Im } \eta^+ - a'^+ = \eta^- \circ \pi \cdot (\eta^+ | \text{Int } \mathcal{B}^+ - a^+)^{-1}$$

を得る. この関係 (*) より, 補題の主張は容易に示される.

特異点集合 S が Isolating Block $B \in \mathcal{B}_h$ に関して正則化可能であるとする. この時, 写像 π の拡張の 1 つ π' によって, $M - \text{Int } B$ 上に次のように同値関係が定義される:

$$x \sim y \iff \text{i) } x = y, \quad \text{または}$$

ii) $x \in \mathcal{C}^+$, $y \in \mathcal{C}^-$ かつ

$$\pi(x) = \pi(y).$$

この同値関係による商空間 $\bar{M} = M - \text{Int } B / \sim$ に関して,

命題 1. $\bar{M}$ 上には可微分構造で,

$$p|_{M-B} : M-B \longrightarrow \bar{M}-p(\mathcal{C})$$

を微分同型とするものが定義できる. ここで, p は $\bar{M}$ 上への射影である. この多様体 $\bar{M}$ を S の Isolating Block B と拡張 π に関する正則化多様体と呼ぶ.

ところで, $B \neq \phi$ より $B \cap \mathcal{C} \neq \phi$ が成り立つが, ということ
が問題となるが, より強く次の補題が成り立つ.

補題 6. $B \in \mathcal{B}$ に対して, $B_0 \in \mathcal{B}$ かつ,

$$B_0 > B$$

をみたすものが存在する.

証明の概略. τ の $\mathcal{C}^+$ におけるカウ-近傍

$$\mathcal{C}^+ : \tau \times [0, 1] \hookrightarrow \mathcal{C}^+$$

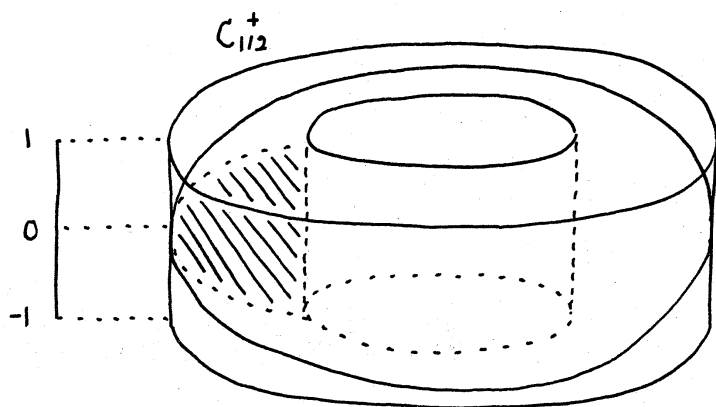
を, $\text{Im } \mathcal{C}^+ \cap a^+ = \phi$ となるようにとる. $C_{1/2}^+ = \mathcal{C}^+(\tau \times [1/2, 1])$ を通る軌道と B との共通部分の全体は, 函数 σ^+

(cf. 補題 2) の可微分性と $\langle X_x \rangle + T_x \mathcal{C}^+ = T_x M$ が $\text{Int } \mathcal{C}^+ (\cap C_{1/2}^+)$ 上の任意の点で成り立つことに注意すると,

$$C_{1/2}^+ \times [-1, 1]$$

と微分同型であることがわかる. しかも, この微分同型は各 $x \in C_{1/2}^+$ を通る軌道を $\{x\} \times [-1, 1]$ に対応するようにつくれる.

下図に示すように, $C_{1/2}^+ \times [-1, 1]$ から角 $\mathcal{C}^+(\tau \times \{1/2\}) \times \{1\}$, $\mathcal{C}^+(\tau \times \{1/2\}) \times \{-1\}$ を除く.



この角を除いて得られる多様体と $\mathcal{C}^+ - \text{Im } \mathcal{C}^+$ と $\mathcal{C}^- - \pi(\text{Im } \mathcal{C}^+)$ にはさまれた B の中にある軌道の部分の全体が, 求める Isolating Block B_0 となる. (上図参照) この時, $\mathcal{C}^+(\tau \times \{1/2\}) \times \{0\}$ が τ_0 に対応する.

以上の準備のもとに, この節のはじめに述べた問題の解が次のように与えられる. $B, B' \in \mathcal{B}_h$ が $B > B'$ を満すとする

る。 B に関して S は正則化可能とする。すると、補題 5 によって B' に関して S も正則化可能となるが、この時、それぞれ π , π' の拡張 $\tilde{\pi}$, $\tilde{\pi}'$ が

$$(**) \quad \tilde{\pi}'|_{\text{Im } \eta^+} = \eta^- \circ \tilde{\pi} \circ (\eta^+)^{-1}$$

を満すようにとる。(cf. 補題 5・証明中の(*)) すると、

定 理 1. B , $\tilde{\pi}$ 及び B' , $\tilde{\pi}'$ に関する正則化多様体 $M = M - \text{Int } B / \sim$, $M' = M - \text{Int } B' / \sim$ は位相同型である。

更に、次の定理が成り立つ。

定 理 2. B に属する任意の Isolating Block B , B' に対して、 $\alpha^\pm$ が $\beta^\pm$ の部分多様体であるとする、

$$B_0 > B \quad \text{かつ} \quad B_0 > B'$$

をみたす、 $B_0 \in \mathcal{B}_\alpha$ が存在する、この時 $\alpha^\pm$ も多様体となる。

補題 5 と定理 2 を合わせると、

系 1. 正則化可能性は、Isolating Block のとり方に独立に、その力学系固有の性質として定義できる。

S は正則化可能とする. $B, B' \in \mathcal{B}$ を定理 2 の仮定を満たす Isolating Block の組とする. 定理 2 の $B_0 \in \mathcal{B}_0$ をとる. この時, π, π' の拡張 $\hat{\pi}, \hat{\pi}'$ がそれぞれ π_0 の 1 つの拡張 $\hat{\pi}_0$ と, 関係 (**) をみたす時, 同一なもののみなす. すると,

系 2. 正則化多様体は拡張のとり方と位相同型を除いて一意に決まる.

§. 4. 応 用

Kepler 問題は, §. 2 で設定した枠組みと定理 2 の仮定を満たす. よって, 系 1 と Easton の定理を合わせると,

定 理 3. Kepler 問題の特異点は, 正則化可能である.

文 献

- [A-M] R. Abraham & J. E. Marsden : *Foundation of mechanics*, Benjamin (1978) 2nd. ed..
- [D] R. Devaney : *Collision orbits in the anisotropic Kepler problem*, *Invent. Math.*, 45 (1978), 221-251.

- [E 1] R. Easton : Regularization of vector fields by surgery, *J. Diff. Eq.*, 10 (1971), 92 - 99.
- [E 2] : Some topology of 3- body problem, *J. Diff. Eq.*, 10 (1971), 371 - 377.
- [E 3] : The topology of the regularized integral surfaces of 3- body problem, *J. Diff. Eq.*, 12 (1972), 361 - 384.
- [H] E. Hayakawa : Regularization of vector fields by Easton type surgery, preprint.
- [McG] R. McGhee : Triple collision in the collinear three - body problem, *Invent. Math.*, 27 (1974), 191 - 227.
- [Mos] J. Moser : Regularization of Kepler's problem and averaging method on a manifold, *Comm. Pure & Appl. Math.*, 23 (1970), 609 - 636.