

Poisson に見る流体方程式を構成する分子活動の数学的微視的記述

流体数理古典理論研究所 増田 茂

E-mail: hj9s-msd@asahi-net.or.jp

1 Introduction

¹ One of the Poisson's themes is the reducibility of sum into integral, namely, how to calculate the microscopically descriptive function of attraction and repulsion for formulation of fluid equations. In 1819, Poisson discusses the so-called 'Poisson equations' in *Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques* [14], and saying :

A défaut de méthodes générales, dont nous manquerons peut-être encore long-temps, il m'a semblé que ce qu'il y avait de mieux à faire, c'était de chercher à intégrer isolément les équations aux différences partielles les plus importantes par la nature des questions de mécanique et de physique qui y conduisent. C'est la l'objet que je me suis proposé dans ce nouveau mémoire. [14, p.123]

「普遍的諸方式が恐らくなおしばらく出来ないなら、取るべき最良のものがあつた、即ち、それは個別に積分するのに、偏微分方程式を導出した力学や物理の性質によって最も重要なものを探す事であつたように思える。これがこの新しい論文で私の言う積もりだった目的である。」 [14, p.123]

He considers that it is the best to integrate separately particular solutions of partial differential equations (*PDE*), according to the individual nature of the problems. Poisson [14] explains his principle of transforming separately the sum of particular solutions into integration as the solving method of *PDE* :

$$\varphi = \sum Ae^{(tp+gx+hy+\dots)} + \sum Ae^{(tp'+gx+hy+\dots)} + \dots \quad (1)$$

$$\Rightarrow \varphi = \int e^{(tp+gx+hy+\dots)} f(g, h, \dots) dg dh \dots + \int e^{(tp'+gx+hy+\dots)} f'(g, h, \dots) dg dh \dots + \dots \quad (2)$$

Les limits de ces intégrales resteront indéterminées; en sorte qu'elles ne son pas des intégrales définies. La substitution de la caractéristique $\sum$, n'a pas changé de nature, la valeur de φ : cette dernière expression est toujours une série d'exponentiellés multipliées par des coefficients arbitrairea, dont chaque terme satisfait isolément à l'équation aux différences partielles proposées; et les fonctions $f, f', \dots$, étant arbitraires, et pouvant être discontinues, ces deux expressions (1) et (2) sont équivalentes l'une à l'autre. [14, pp.172]

「記号 $\sum$ の置き換えは本来的に、 φ の値を変えていない：つまり、最後の式 (2) が常に任意の係数の掛かるある指数の級数で、各項は出された偏微分方程式を個別に満たしている；関数 $f, f' \dots$ が任意で、しかも不連続になり得るのに、これらの二つの式 (1) と (2) は互いに等価である。」 [14, p.172]

Since these earlier papers of these sort of issues, he discusses ([15, 16, 17]) with Navier ([11, 12, 13]), and introduces [22], in which he developes his new ideas of these problems between the integral and sum in the additional note, (§7, "Notes et Additions" [22, pp.264-300]) immediately after issuing his main theories of fluid [20, 21].

This note may be one of the last descriptions on these issues. We couldn't follow Navier's comments whether Navier gave his opinion against it or not. We think this is the last counterargument by Poisson to Navier. We introduce these scientific disputes between Poisson and Navier, and other book reviewers. We show below our translation of the French narrations in Japanese, and of our own in English. In the all citations below of original, $fr, \varphi r, Fr, etc.$ mean the function of distance : r , viz. $f(r), \varphi(r), F(r), etc.$, sic respectively, except for rR in $\sum rR$. ²

2 Circular argument asserting consistency between physical theory and mathematical principle

Poisson [15, 18, 20, 21] expresses two elastic constants of molecular forces defined in the sphere of an arbitrary molecular activity of M with sum as follows :

$$\frac{2\pi}{3} \sum \frac{r^3}{\alpha^5} fr \equiv K, \quad \frac{2\pi}{15} \sum \frac{r^5}{\alpha^5} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} fr \equiv k. \quad (3)$$

¹12/21/2011. To establish a time line of these contributor, we list for easy reference the year of their birth and death: Euler(1707-1783), d'Alembert(1717-1783), Lagrange(1736-1813), Laplace(1749-1827), Fourier(1768-1830), Gauss(1777-1855), Navier(1785-1836), Poisson(1781-1840), Cauchy(1789-1857), Stokes(1819-1903).

²If over one parameter, they express it as $f(r, \dots)$.

These endless disputes started with Navier's reply [11] to Poisson's critical descriptions [15, 18] about Navier's calculus by integral, which we can summarize as '*Circular argument asserting consistency between physical theory and mathematical principle*' in (Fig.1). J.M.C.D., a book reviewer,³ speaks for Poisson, summarising the issues of our problem :

Poisson が Navier の理論を拒否するには二つの理由がある。総和法 (sum) は積分による十分な近似式でも置き換える事に同意出来ないこと、 こうした納得の行く数式変換を想定しても物体の自然状態の中で、任意の二つの分子間活動がゼロになるという仮説を受け入れられないこと、である。(J27)⁴

J.M.C.D. points out the theory of continuum from the viewpoint of scientific history :

- ある物体が堅いものであれ固体であれ、それを構成する部分の分離に抗する力はゼロか我々が論じているその状態では存在しない。我々がこの分離を実行する事を求める時にしか、また、分子間距離を少しでも変更しようとする事しか生じ始めない。即ち、もし、この力を積分で表すならば、物体が自然状態の中で値がゼロとなって、分子間距離で何らかの変位が生じた後でもなお、言わば、物体がその部分が分離していても何らの抵抗にも抗しない事が生じるようになる。これはちょっとへんな事になる。(J4-2)

- Navier が 1821 年に分子の活動に論及し連続体として物体を見なす事を報告していたのと同じ方程式を Poisson もつかんでいた事は後程説明しよう。 この分子のアクションを考察する手法は Laplace が元々毛細管現象の理論を導出するのに使っていたものだ。 Navier はその後で弾性体の理論にこの手法を導入するのに都合な考え方を得たのだ。 しかし、全ての学者は連続体の分子を想定していた。そして、Poisson が計算において物体の実際上の構造と一致した最初だ。(J5-1)

- 付言すれば、連続体の仮説は現実的には全く不正確であるが、科学の中では大きな足跡を果たし、Laplace の理論は学者達からその果たした役割から賞賛の目で迎えられた。 分子活動についてのこの考察は、大量の特殊問題において、就中、弾性体理論において果たさねばならなかった全ての特別の仮説を取り除くのに計り知れない利点があった。(J5-2)

Another book reviewer, Cournot [4] introduces Navier [9]'s physical theory and mathematical principle as the 'consumption'⁵ in his conclusion : 「(Navier の) この応用は間違いなく、分析するだけの彼の相当な素質を示しているが、ある物理的理論の価値や、ある原理の真理に関しては沢山の蓄積された近似の後で分かるのではないか? 結局、Navier の新理論はほんの少しだけ、(これまでの) 経験主義から流体の振舞いと (時間と頭の) 浪費についての科学にしてくれたのか? 我々はある似たような問題を解決するために過大評価してはならない。せめて興味のある応用分野の全ての方々にこの論文の一読をお薦めするしかない。」

Ces applications montrent sans doute un grand talent pour manier l'analyse; mais peut-on prononcer avec certitude sur la valeur d'une théorie physique et la vérité d'un principe après tant d'approximations accumulées? En un mot, la nouvelle théorie de M. Navier rendra-t-elle moins empirique la science de la conduite et de la dépense des fluides? Nous ne présumerons pas assez de nous pour résoudre une semblable question, et nous ne pouvons que recommander la lecture de mémoire à tous ceux que ce genre d'applications intéresse. A.C. [4, pp.13-14]

We start with citing Poisson's explanation of result using sum instead of integral from (3) as follows :

● § 14. Cette équation donne lieu de faire une remarque importante ; c'est que les sommes Σ du no.6, que représentent les lettres K et k , ne peuvent être changées en des intégrales, quoique la variable r croisse dans chacune d'elles par de très-petites différences égales à α ; car si cette transformation était possible, k serait zéro en même temps que K ; d'où il résulterait qu'après le changement de forme du corps, les forces P , Q , R , seraient nulles comme auparavant, et que des forces données qui agiraient sur le corps ne pourraient se faire équilibre, ce qui est inadmissible. Pour faire voir que k s'évanouirait au même temps que K , observons qu'on aurait

$$K = \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6} f r dr, \quad k = \frac{2\pi}{15} \int_0^\infty \frac{r^5}{\alpha^6} d. \frac{1}{r} f r, \quad (4)$$

en multipliant sous les signes Σ par $\frac{dr}{\alpha}$, et remplaçant ces signes par ceux de l'intégration. Or, si l'on intègre par partie, et si l'on fait attention que $f r$ est nulle aux deux limites, il en résultera

$$k = -\frac{2\pi}{3} \int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6} f r dr = -K \quad (5)$$

ce qui montre que la quantité K étant nulle, on aurait aussi $k = 0$. [15, pp.398-399, §14]

³We haven't identified this person in BSM(11) until now. The authors use usually the anonym in BSM. As the same example. Cournot [4] issues the book review on Navier [9] over the signature of A.C. in the same BSM(10).

⁴We put the paragraph number of each disputers. This "J27" is the 27-th paragraph by J.M.C.D.[6]. By the same way, we mean A.:Arago [1], N.:Navier [13], Note: Poisson[22]. In bellow, we call this note *The Note*.

⁵We mean the 'consumption' of time or all sort of resouces including intellectual activities, etc.

• § 16. Je substitute, en outre, dans les équations (3)_P à la place de P, Q , etc., leurs valeurs, et je suppose le corps homogène; en observant que $K = 0$, il vient

$$(6)_{P^*} \quad \begin{cases} X - \frac{d^2 u}{dt^2} + a^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 v}{dy dx} + \frac{2}{3} \frac{d^2 w}{dz dx} + \frac{1}{3} \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2 u}{dz^2} \right) = 0, \\ Y - \frac{d^2 v}{dt^2} + a^2 \left(\frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 u}{dx dy} + \frac{2}{3} \frac{d^2 w}{dz dy} + \frac{1}{3} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2 v}{dz^2} \right) = 0, \\ Z - \frac{d^2 w}{dt^2} + a^2 \left(\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 u}{dx dz} + \frac{2}{3} \frac{d^2 v}{dy dz} + \frac{1}{3} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2 w}{dy^2} \right) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

a^2 étant un coefficient, égal à $\frac{3k}{\rho}$. Ces équations ont la même forme que celles qui ont été données par M. Navier⁶, et qu'il a obtenues en partant de l'hypothèse que les molécules du corps, après son changement de forme, s'attirent proportionnellement aux accroissements de leurs distances mutuelles; et en admettant, de plus, que les résultantes de ces forces peuvent s'exprimer *par des intégrales, ce qui rendrait nul le coefficient a^2* , ainsi qu'on l'a vu plus haut. Les équations relatives à la surface, formées de la même manière, se trouvent aussi dans le Mémoire de M. Navier. [15, pp.403-4, §16]

Fig.1. Circular argument asserting consistency between physical theory and mathematical principle

Poisson (including by J.M.C.D.)		Navier
この力を積分で表すならば係数 a^2 がゼロになる。cf.(6) この力を積分で表せない事は証明している。	⇔	物体の自然状態に常に相殺されている。即ち、力： P が通常ゼロであるか、または、力はゼロでないが、それらの差し引きではゼロである。(N9)
⇕		⇕
アクションを分離した分子についてのある級数の総和で表す $\sum$ は定積分で表すことは出来ない。それは全ての分子のアクションを表す距離の関数の性質を保持するものであり、ゼロでは矛盾する。		これらの力 (attraction と repulsion) の合力を積分で表す事が出来る。
⇕		⇕
Poisson は反対に2つの分子が積み重ねて自然状態の中でも何らかのアクションを呈すると想定する。 そして、この状態を可能とするために、彼は条件： $\sum r^3 f(r) = 0$ を導いた。 しかし、この条件は積分記号を使わないので $\sum r^5 d[\frac{1}{r} f(r)] = 0$ とはならず済み、 各項は Poisson の式からは消滅しない。(J26) 条件： $\int r^3 f(r) dr = 0$ と、方程式の各項から必然的に出て来る消滅の必要性を結論づけている。(J27)		Poisson が分子のアクションの成分を表す総和 (sum) が積分で取り替えられないという事を言い張ることの根拠は「もし、部分積分によると、 $f(r)$ は両極値でゼロである事に注意すれば、 $k = -K$ となる」事だ。 まず、「もし $r^4 f(r)$ が両極値でゼロとすれば」とある点。次に $r^4 f(r) = 0$ に対応する極値としてゼロになる事を受け入れなければならない義務はない点である。 関数 $f(r)$ として採用出来る無数の形式が存在する事、このため、この状況が成立しなくなる事である。(N23)
⇕		⇕
Navier も私と同じ方程式を出した。これを積分でやったのが Navier の係数 ϵ だ。Navier は否定しているが、私の係数 a^2 と Navier の ϵ は同じだ。(cf. Table 1, no.1,4)	⇔	私の係数 ϵ と Poisson の係数 a^2 とは同じものではない。
.....	↓	
● こうなれば、Navier にしたら自然界で物質の全ての個所で積み重ねたアクション無しで、物体の構成を理解させる事が出来るか考えるしかないのだ。(A3)		● 私の式はその特別な場合 (Navier の式で弾性が色々な方向で同じ時) 当て嵌る。(Cauchy[3])
● 結局、Navier の新理論はほんの少しだけ、経験主義から流体の振舞いと浪費についての科学にしたのか? (Cournot[4])		● 同じ方程式は非圧縮流体の場合で Navier が得ているが私のものは Poisson がやったものに近い。(Stokes[23])

Our issue is about (4) of the elastic body, which paper is previous to the fluid. (cf. In Table 1, the entry no. 1,3 and 4 discuss elastic body.) Poisson says his consistency between physics and mathematics on the expression (4) and (6) :

こうして、それらの attraction と熱による分子の相互のアクションしか作用されない自然状態と見られる物体の状態の中で、分子を分離している区間ではこの方程式が物体の全ての個所で成り立っている事等が存在せねばならない。もし、熱の新たな量をそこに取り入れれば、同じ距離を保って repulsive force が attractive force で出来る量を変えずに増大する。分子の区間がこの方程式が存在し続けるように増大する必要がある。そして、関数 $f(r)$ がそこでは同じでない事から、それからの

⁶By Poisson's footnote : Tome VII de ces Mémoires, which is Navier[8].

熱の膨張、物質的な違いの中で差異が生じる。この式は重要な事を喚起する原因となる。それは No.6 での総和 Σ は K と k がそれぞれ表わされているが、これを積分へ変更出来ない事だ。ここに、変数 r は α と同様に極めて微小な差異で表す個々のそれの中で増大する。しかるにもしこの変換が可能ならば、 k は K と同時にゼロとなる。ここから物体の変形による力の要素 P, Q, R は変形しても以前と同じゼロとなり、物体に作用する加えられた力は平衡状態とは成り得ないという結果が生じる。これは受け入れられない事だ。

According to J.M.C.D., Poisson's physical conception are as follows :

●Poisson は反対に 2 つの分子が積み重ねて自然状態の中で何らかのアクションを呈すると想定する。そして、この状態を可能とするために、彼は条件 : $\Sigma r^3 f(r) = 0$ を導いた。しかし、この条件は積分記号を使わないので $\sum r^5 d[\frac{1}{r} f(r)] = 0$ とはならず、各項は Poisson の式からは消滅しない。(J26)

●条件 : $\int r^3 f(r) dr = 0$ と、方程式の各項から必然的に出て来る消滅の必要性を結論づけている。(J27)

Navier explains null of molecular activity in his last paper [13] as follows :

●弾性固体は極めて微小な距離に置かれた分子の集合体として認識されている。これらの分子は積み重ねて、2 つの相反するアクション、即ち attraction からなる固有力と熱の原理で齎される repulsion に影響を及ぼす。ある分子 M と近くにある任意の分子 M' の間には、この 2 つの力 (attraction と repulsion) の差である P が存在し、物体の自然状態ではトータルなアクションである P は分子 M が平衡状態であるからゼロ即ち相互に相殺される。物体の形状が変更されればアクション P は異なる差の値 Π となり、全ての力 : Π と物体に働く力の間で平衡状態となり、それによって形状の変位が生じる。(N7-1)

●どれも 2 つの部分 π と π' に分かれる Π があると常に理解してよい。最初の π はもし、単独で存在すると想定すれば、全ての力 : π の中で平衡状態となり、同様の方法から、物体の自然状態では全ての力 : P の中で平衡状態になる。力 : π はこうして相互に相殺されるので、平衡状態は残った π' と物体に作用する力との間で存在することが必要となろう。(N7-2)

●こう仮定すれば、ここで原理として、もう一つの力 π' が任意の MM' にある 2 つの物質の分子の間で物体の形状の変化によって生成されるという事を得る。そしてこれがこの 1 つだけを物体に作用する力と平衡状態にするものであり、それぞれに (微小と想定する) 形状の変化が 2 つの分子間の距離 MM' を変えた量に比例している。(N7-3)

●この力 Π' は距離 MM' が増大すれば attraction になり、減少すれば repulsion になる。それに、分子の力を非常に接近した分子間にしか存在しないもの、そして急減少する値を持ち、両者がますます遠ざかる分子に対して未知の法則に従うものと看做す。(N7-4)

Arago が強調し、コメントしている語句を見てみよう。物体の自然状態ではトータルなアクション P はゼロが相互に相殺される。この語句は排他的ではない。トータルなアクション P は物体の各点で消滅するか、あるいは差し引きの結果がゼロ。この言い回しでは明らかに読者に次の二者択一を任せられている。即ち、全ての力 : P がゼロ。あるいは力はゼロでないがそれらの差し引きではゼロ。私はこの問題を曖昧のままにしていた。計算の設定には全く依存しないこの点について説明するのは必要でなかったからである。(N9)

●この点について説明することは決して不必要ではないと思う。事実、アクション : P が混同される事を避けた事に注意願いたい。アクション : P は ●物体の自然界で存在し、●個々の分子に対して物体の変位状態の中で成立する新たなアクション Π の部分である π と平衡状態になる。●個々の分子に対してこの状態と同様に平衡状態となろうとする。(N10-1)

このように区別をすることによって読者は力 : P を随意に、有限の値やゼロに想定する事ができる。(読者には) 力 : π を想定する自由があるので、力 : π は私の説明によって、個々の分子が相殺するので都合の良い値を持った、力 : P とは別のものであり、私が提唱する原理は常に存続する。(N10-2)

私の Arago への手紙 (ACP, 1829 年 1 月号 103 頁) で ●数学的問題をまだ設定しないのに、物質の構成に関して抱いている考えを説明する事、●Poisson のそれとの違いを明確にする事、●私は二者択一をして、物体の自然状態では任意の 2 つの分子間の attraction と repulsion が相互に消滅する事、即ち、これらの分子間で存在するアクション (これを P とする) がゼロである事を受け入れたと述べた。Arago は「2 つの同じ分子が違った方法で積み重ねて作用していて、物体が外力からのアクションを受ける受けないに拘らず、この作用を受けるという事からこういう結果になった」と判断している。以上が実際に私の考えている所だ。(N11)

Arago は「物理学者は恐らく (Navier の) この仮説に難を呈するだろう。それがため大きな困難がもたらされ、どうしたら私が物質の全ての点が、積み重ねてアクションがない自然界の中で、物体の構成を理解出来るか示すしかない」と付け加えている。私はこの話には私の意見に対抗できるどんな根拠も見つけられない。もし何方かがこの問題に関してもっと説明して欲しいと望むならば私はこう言うであろう : 「自然界で 2 つの分子 M, M' の attraction は距離の MM' がどうであれ熱の存在による repulsion によって正確に相殺されることが認識できる」と。(N12)

At last, Navier may mend and correct his ideas of null which is attacked from all the physical disputer.

3 "Notes and Additions" to [22]

3.1 Purposes of his new theory

Poisson criticises both Laplace and Gauss on the paper of capillary action.

- On a vu que je m'écarte aussi de la *Mécanique céleste*, en ce qui concerne l'explication des phénomènes qui ont lieu quand le liquide atteint l'extrémité supérieure du tube. La démonstration que Laplace avait donnée de l'invariabilité de l'angles compris entre les normales à la surface du liquide et à celle du tube, menées par chaque point situé à une distance insensible de leur commune intersection, n'a pas paru satisfaisante ;
- et M. Gauss en a donné une autre très élégante, et qui ne laisse rien à désirer, lorsqu'on fait abstraction de la variation de densité du liquide près de sa surface et près de celle du tube.

Poisson tells his selling point :

En ayant égard à cette variation, dont la loi est inconnue, j'ai démontré la même proposition, dans le chapitre III,⁷ d'une manière qui, je crois, ne peut laisser aucun doute.

Poisson insists his new theory :

- La considération de cet angle i est également indispensable, lorsqu'on veut déterminer le poids nécessaire pour détacher un disque solide de la surface d'un liquide, l'une des questions *les plus intéressantes des cette théorie*, que l'on n'avait pas, ce me semble, considérée sous son véritable point de vue.
- En effet, le disque et le liquide étant soulevés graduellement par un poids qui croît par petites parties, ce poids et la hauteur correspondantes du liquides sont, à chaque instant, des fonctions de l'angle i qui représente l'inclinaison de la normale à la surface de l'arête du disque sur un plan horizontal ;
- c'est lorsque ces fonctions atteignent leur *maximum* par rapport à i , que le disque se détache du liquide ;
- et il en résulte la condition d'après laquelle on détermine la grandeur du poids propre à opérer la séparation du disque et du liquide.

3.2 Essential constitution of corps, and particularly of fluid ; nature of the molecular forces

Poisson explains two sorts of mutual action consisted of attraction and molecular force, and moreover the latter includes attraction and repulsion :

Toutes les parties de la matière sont soumises à deux sortes d'actions mutuelles.

- L'une de ces forces est attractive, indépendante de la nature des corps ou de leurs molécules, proportionnelle au produit des masses, et en raison inverse du carré des distances ; elle s'étend indéfiniment dans l'espace, et produit la pesanteur universelle et tous les phénomènes qui sont du ressort de la mécanique céleste.
- L'autre est en partie attractive et en partie répulsive ; elle dépend de la nature des molécules et de leur quantité de calorique. On attribue la partie attractive à la matière pondérable, et la partie répulsive au calorique ; et, en effet, celle-ci change d'intensité, quoique le poids des molécules n'ait pas changé.
- L'excès de l'une sur l'autre est ce qu'on appelle proprement la *force moléculaire*.
- Elle tend à rapprocher ou à écarter les molécules, selon que l'action de la matière pondérable est plus grande ou moindre que l'action calorifique.
- Son intensité décroît très rapidement quand la distance des molécules augmente, et devient tout-à-fait insensible, dès que cette distance a acquis une grandeur sensible.

Poisson explains attraction and repulsion :

Ainsi, tous les mouvements que nous observons, nous devons les attribuer à des forces d'attraction ou de répulsion, pour lesquelles l'action est égale à la réaction, et qui varient avec les distances, suivant une des deux lois précédentes. Les vibrations des corps élastiques et la communication du mouvement, soit par le choc, soit par la pression, résultent de la force qui n'est sensible qu'à des distances insensibles, c'est-à-dire de la moléculaire.

⁷Équation relative au contour de la surface capillaire. [22, pp.77-97]

- Soient m et m' les masses de deux molécules voisines, c et c' leurs quantités de calorique, M et M' leurs centres de gravité, et r la distance MM' ;
- et considérons l'action mutuelle de ces deux molécules.
- Supposons d'abord leurs dimensions très petites par rapport à l'intervalle qui les sépare.
- L'action dont il s'agit se réduira alors à une force unique, dirigée suivant la droite MM' , et dont l'intensité sera une fonction de r , que nous représenterons par R ;
- en même temps, leur répulsion mutuelle sera proportionnelle au produit de c et c' , et leur attraction au produit de m et m' .
- En considérant la force R comme positive ou comme négative, selon qu'elle tendra à augmenter ou à diminuer la distance r , sa valeur sera l'excès de la répulsion sur l'attraction ;
- et si l'on suppose que l'attraction réciproque de la matière pondérable et du calorique, qui retient celui-ci dans chaque molécule, s'étend au-dehors, il faudra retrancher de cet excès l'attraction du calorique attaché à m' sur la matière de m , et celle de la matière de m' sur le calorique attaché à m , lesquelles forces seront proportionnelles, la première au produit mc' .
- De cette manière, la valeur complète de R sera

$$R = cc'\gamma - mm'\alpha - mc'\beta - m'c\beta' \quad (7)$$

les coefficients γ , α , β , β' , étant des quantités positives.

- Le premier sera indépendant de la nature de m et de celle de m' , le second dépendra de l'une et de l'autre, le troisième ne dépendra que de la nature de m , et le quatrième de celle de m' .

Poisson reduces the last three terms of (7) to one term :

- En réunissant ces trois derniers termes en un seul, on pourra écrire la valeur de R sous la forme :

$$R = Fr - fr$$

- Chacune des deux fonctions Fr et fr n'aura que des positives ;
 - et si l'on fait abstraction de l'attraction en raison inverse du carré des distances, qui n'aucune influence sensible sur les phénomènes dépendans de la force moléculaire proprement dite, ces valeurs décroîtront très rapidement et sans alternative, à mesure que la variable r augmentera, et elles deviendront insensibles pour toute valeur sensible de r .
 - Pour une certaine valeur de cette distance, on pourra avoir $Fr = fr$ et $R = 0$;
 - le signe de R sera différent en-deçà et au-delà, soit que la répulsion Fr l'emporte d'abord sur l'attraction fr , soit que le contraire ait lieu à l'égard de ces deux forces.
- [22, pp.269-271]

4 Reducibility from sum into integral on a function made with attraction and/or repulsion

We discuss whether the sum is reducible into integral or not. Poisson points out this problem. We use the expressions : $\varphi_0 \equiv \varphi(0)$, $\varphi_\varepsilon \equiv \varphi(\varepsilon)$, $\varphi_{2\varepsilon} \equiv \varphi(2\varepsilon)$, $\dots$ below according to the then generally descriptive style. Poisson expresses the sum of the function φx as follows :

Soit φx une fonction donnée de la variable x . Faisons croître x par des différences constantes dont la graine sera représentée par ε ; supposons que p les valeurs de x s'étendent depuis $x = \varepsilon$ jusqu'à $x = \infty$; et par p la somme des valeurs correspondantes de φx .

$$p = \sum_{x=\varepsilon, i \in \mathbb{N}}^{\infty} \varphi x = \varphi \varepsilon + \varphi 2\varepsilon + \varphi 3\varepsilon + \varphi 4\varepsilon + \dots$$

Here, using the integral of the function φx , Poisson says. $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2} \varphi_0$ will become an approximate value of sum of the function φx : $\frac{2}{\varepsilon} \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{2i\pi x}{\varepsilon} \right] \varphi x dx$, which is expressed in (10). We think here is the point of Poisson's Note, then we cite from his original :

L'intégrale $\int_0^\infty \varphi x dx$, divisée par ε et diminuée de $\frac{1}{2}\varphi 0$, sera une valeur approchée de la somme p ; et l'on a vu, dans mon Mémoire sur *Calcul numérique des Intégrales définies*⁸, que la différence de ces deux quantités peut s'exprimer par une autre intégrale définie, de sorte que l'on aura exactement (8). [22, p.278]

We show the difference of integral from sum as following :

$$p = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2}\varphi 0 + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^\infty \cos \frac{2i\pi x}{\varepsilon} \right] \varphi x dx. \quad (8)$$

Here, $\frac{2}{\varepsilon}$ is necessary for adjustment of the series (10). We use a known result : $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$, then

$$a \equiv \frac{1}{2\pi^2} \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} = \frac{1}{12}, \quad a' \equiv \frac{1}{8\pi^4} \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^4} = \frac{1}{720}, \quad a'' \equiv \frac{1}{32\pi^6} \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^6} = \frac{1}{30240}, \quad \dots \quad i \in \mathbb{N}$$

Here, we consider the following description :

$$p = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx - \frac{1}{2}\varphi - a\varepsilon\varphi' + a'\varepsilon^3\varphi''' - a''\varepsilon^5\varphi'''' + \dots \quad (9)$$

where by applying integration by parts to the second integral in (8), we get the series of terms having both even power of ε and odd differential of φx . This means that according to Poisson :

Par le procédé de l'intégration par partie, on réduira la second intégrale contenue cette formule, en une série ordonnée suivant les puissances paires de ε , dont les coefficients renfermeront les différentielles impaires de φx , relatives aux deux valeurs extrêmes de x .

Namely, if $\bmod(i, 2) = 1$, ($i \in \mathbb{N}$), for $\cos \frac{1}{2}i\pi = 0$, then the second integral in (8) is developed as follows :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\varepsilon} \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^\infty \cos \frac{2i\pi x}{\varepsilon} \right] \varphi x dx &= \frac{2}{\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon}{2i\pi x} \sum \sin \frac{2i\pi x}{\varepsilon} \varphi x \right]_0^\infty - \frac{2}{\varepsilon} \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{2i\pi x} \sum \sin \frac{2i\pi x}{\varepsilon} \varphi' x dx \\ &= \frac{2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\varepsilon}{2i\pi x} \right)^2 \sum \cos \frac{2i\pi x}{\varepsilon} \varphi' x \right]_0^\infty - \frac{2}{\varepsilon} \int_0^\infty \left(\frac{\varepsilon}{2i\pi x} \right)^2 \sum \cos \frac{2i\pi x}{\varepsilon} \varphi'' x dx \\ &= \dots \\ &= \frac{2}{\varepsilon} \left(-\frac{\varepsilon^2 \varphi'}{(2\pi)^2} \sum \frac{1}{i^2} + \frac{\varepsilon^4 \varphi''}{(2\pi)^4} \sum \frac{1}{i^4} - \frac{\varepsilon^6 \varphi''''}{(2\pi)^6} \sum \frac{1}{i^6} + \dots \right) \\ &= -a\varepsilon\varphi' + a'\varepsilon^3\varphi''' - a''\varepsilon^5\varphi'''' + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

where a , a' , a'' are the same coefficients as (9). In the two limit value $x = \infty$ and $x = 0$, it reserves only the term at lower limit $x = 0$ of the third terms in (9). Because

- this function φx and all the differential coefficients evaporate at $x = \infty$
- φ , φ' , φ'' , $\dots$ are the values of φx , $\frac{d\varphi x}{dx}$, $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$, $\dots$ which correspond to that at $x = 0$.

In this paper, Poisson asserted that in a singular case using integral, all the terms in (9) evaporate except for top two terms. then we must use sum (8) as follows :

De plus, à quelque terme que l'on arrête la série (9), le reste qu'il y faudra ajouter pour avoir la valeur exacte de p , sera exprimé par une intégrale définie, dont la valeur changera généralement d'un terme à l'autre, et dont on pourra assigner des limites qui feront connaître si la série est convergente. Dans le Mémoire cité, j'ai examiné en détail le cas singulier où le rest est constant, et où les termes de la série (9) s'évanouissent tous, excepté les deux premiers; ce qui oblige de recourir à l'équation (8) pour calculer la valeur de p .

Poisson asserted also that :

- En général, si l'on prend pour φx une fonction du genre de celles qui varient très rapidement et sont insensibles dès que la variable a acquis une grandeur sensible. les quantités : φx , $x \frac{d\varphi x}{dx}$, $x^2 \frac{d^2\varphi x}{dx^2}$, $x^3 \frac{d^3\varphi x}{dx^3}$, $\dots$ seront toutes du même ordre de grandeur;
- pour que la série des produits : φ , $\varepsilon\varphi'$, $\varepsilon^2\varphi''$, $\varepsilon^3\varphi'''$, $\dots$, et, à plus forte raison, la série (9), soient très rapidement décroissantes, il suffira donc que ε soit très petite, eu égard à l'étendue des valeurs sensibles de φx ;

⁸Tome VI des *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*. sic.

- et, dans cette hypothèse, la seconde integrale que contient la formule (8) sera toujours une quantité extrêmement petite,
 - soit qu'elle se développe en série suivant les puissances de ε ,
 - soit que ce développement n'ait pas lieu, à cause que toutes les quantité φ' , φ'' , φ''' , ..., sont égales à zero.

4.1 Reducible examples of sum transformable into integral

We suppose $c, c', \alpha, \alpha', \dots$ are positive constants.

$$\bullet \quad \varphi x = ce^{-\frac{x}{\alpha}} \Rightarrow$$

by putting $\varepsilon \equiv \beta\alpha$, then (9) becomes

$$p = c \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2} + a\beta - a'\beta^3 + a''\beta^5 - \dots \right) \quad (11)$$

and supposing that β were an infinitesimal fraction, then

$$p = \frac{c}{\beta} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx \quad (12)$$

$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx$ is the first term of (11), then sum equals to integral.

$$\bullet \quad \varphi x = ce^{-\frac{x}{\alpha}} \Rightarrow (\varphi x)' = c \left(-\frac{2x}{\alpha^2} \right) e^{-\frac{x}{\alpha}} \Rightarrow \varphi' = 0,$$

$$(\varphi x)'' = c \left[-\frac{2}{\alpha^2} + \left(-\frac{2x}{\alpha^2} \right)^2 \right] e^{-\frac{x}{\alpha}} \Rightarrow \varphi'' = -c \left(\frac{2}{\alpha^2} \right),$$

$$(\varphi x)''' = c \left[\left(-\frac{2}{\alpha^2} \right) \left(-\frac{2x}{\alpha^2} \right) + \left(-\frac{2x}{\alpha^2} \right)^3 \right] e^{-\frac{x}{\alpha}} \Rightarrow \varphi''' = 0.$$

Then, in general :

$$\begin{cases} \text{mod}(n, 2) = 0, (n \in \mathbb{N}) & \varphi^{(n)} = c \left(-\frac{2}{\alpha^2} \right)^{(n-2)} \\ \text{mod}(n, 2) = 1, (n \in \mathbb{N}) & \varphi^{(n)} = 0 \end{cases}$$

Thus, all the derivatives of odd times become $(\varphi x)' = (\varphi x)''' = (\varphi x)^{(5)} = 0$, we can't get the developing series of sum by second integral in (8), into the series of the power of ε , however, (Poisson described simply) if we put

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\alpha}} \cos \frac{2i\pi x}{\varepsilon} dx \equiv \frac{1}{2} \alpha \sqrt{\pi} e^{-\left(\frac{2i\pi\alpha}{\varepsilon}\right)^2}$$

Correctly, according to (8),

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\alpha}} \left[\sum_{i=1}^\infty \cos \frac{2i\pi x}{\varepsilon} \right] dx \equiv \frac{1}{2} \alpha \sqrt{\pi} e^{-\left(\frac{2i\pi\alpha}{\varepsilon}\right)^2}$$

then, by putting $\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon} \equiv \gamma$, (8) becomes as following :

$$\begin{aligned} p &= c \left(\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon} \right) e^{-\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon} \right) e^{-4\left(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon}\right)^2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon} \right) e^{-9\left(\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon}\right)^3} - \dots \right) \\ &= \frac{c}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\pi} + \gamma e^{-\gamma} - \gamma^{-4\gamma^2} + \gamma e^{-9\gamma^3} - \dots \right) \end{aligned} \quad (13)$$

As γ is a big number in the hypothesis of ε very small in comparison with α , this series will converge extremely, all after the third terms are completely insensible. By the comparison of the first term with the second : $\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\sqrt{\pi}\alpha}{\varepsilon} - 1 \right) \gg 0$, we can neglect the second term, then

$$p = \frac{c}{2\sqrt{\pi}} \frac{2\pi\alpha}{2\varepsilon} = \frac{c\alpha\sqrt{\pi}}{2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx$$

$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx$ is the first term of (13), then sum equals to integral.

Here, Poisson summerizes these two examples :

Ces deux exemples suffisent pour montre que quand on suppose l'intervalle ε des valeurs successives de x extrêmement petit par rapport à l'étendue des valeurs sensibles des φx , la somme p se transformera en une intégrale divisée par ε , tous les fois que φx ne sera composé que une d'un seul terme, ou de plusieurs terms de même sign; mais cela n'aura par toujours lieu, lorsque cette fonction sera composée de deux parties, des contraires.

4.2 Irreducible examples of sum intransformable into integral

Poisson puts the cases of the irreducible functions as followings :

- the φx is not composed of only one term
- the φx is composed of the plural terms having inverse signes

At first, we consider the first pair of φx with term having inverse signes.

$$\bullet \quad \varphi x = ce^{-\frac{x}{\alpha}} - c'e^{-\frac{x}{\alpha'}} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx = \frac{c\alpha}{\varepsilon} - \frac{c'\alpha'}{\varepsilon}, \quad \varphi = c - c'$$

Because the value of φx were comparable and more than $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx$, (9) does not reduce into the first term.

Next, if φx evaporates with x , then

$$\bullet \quad \varphi x = \left(ce^{-\frac{x}{\alpha}} - c'e^{-\frac{x}{\alpha'}} \right) x \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx = \frac{c\alpha^2}{\varepsilon} - \frac{c'\alpha'^2}{\varepsilon}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = c - c'$$

Poisson says : this sample function may be the third term of (9), viz., $-ae\varphi'$, which will become comparable or superior to the first term, while the coefficients c and c' are almost in the ratio of the inverse squared of $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ and $\frac{\alpha'}{\varepsilon}$.

At last, we consider more complicated pair of φx with term having inverse signes. We suppose b is a coefficient capable of becoming greater than we expect.

$$\bullet \quad \varphi x = b \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} - \frac{\varepsilon}{\alpha'} e^{-\frac{x}{\alpha'}} \right) \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx = b(1 - 1) = 0$$

The series (9) reduces to the second term, $\frac{1}{2}\varphi$.

$$\bullet \quad \varphi x = bx \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} - \frac{\varepsilon}{\alpha'} e^{-\frac{x}{\alpha'}} \right) \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \varphi x dx = b(1 - 1) = 0$$

The series (9) does not reduce, because all the terms are not comparable with the first term, then sum does not equal to integral. These examples are also irreducible types from sum into integral.

4.3 Conclusions by Poisson

Poisson concludes the difference of reducibility to integral between φx and $x\varphi x$ as follows :

Je conclus de là, conformément à ce qui a été dit dans le no.13,⁹ que

- quand la somme des valeurs d'une fonction de la nature de φx n'est pas réductible à une intégrale définie,
- il n'est point à craindre que la somme des valeurs de $x\varphi x$ tombe en même temps dans ce cas d'exception. [22, p.282]

Poisson described previously this theme in the article no.31 of text. We cite this paragraphs itemizing and comparing two items as follows :

Mais cette nouvelle difficulté n'a plus lieu, si, comme on l'a dit tout à l'heure, l'action moléculaire provient de deux forces contraires. dont chacune est extrêmement grand, eu égard à leur différence; circonstance qui peut rendre la quantité $\frac{1}{h} \sum rR$ comparable et même supérieure à $\sum R$.

Toutefois,

- la somme $\sum R$ étant irréductible, d'après cette circonstance même, à une intégrale,
- il n'en faut pas conclure que la même chose aura également lieu pour la somme $\sum rR$.

On se convaincra sans peine du contraire par des exemples auxquels on appliquera la formule d'Euler, relative à ce genre de réductions, et qui montreront que

- si la première somme est irréductible par nature de la fonction R ,
- et malgré la petitesse des différences de r , la seconde ne le sera pas en général.

Quant à la somme d'où dépend la pression sur la plan, et qui fait exception à la règle générale, c'est-à-dire qui n'est pas réductible à une intégrale, il nous suffira d'avoir expliqué comment elle peut varier, suivant un rapport quelconque, pour des variations très petite dans les intervalles moléculaires, provenant du degré de condensation du liquide. [22, pp.30-31]

Here, Poisson's conclusions are two points as followings : $\sum R$ is irreducible into integral, however, $\sum rR$ is reducible into integral, although the differential of r is small, because the nature of function R . which express the microscopically descriptive actions of molecules. such as attraction and/or repulsion.

⁹[22, pp.30-31]

5 Conclusions

Navier describes about what he really means of null of molecular action in nature in N9–12. Poisson summarizes his idea from the mathematical viewpoint as follows :

- 級数 (9) を打ち切るいずれかの項で p の正確な値を得るために加える剰余項は定積分で表せる。この定積分の値は一般的に項によって変化するし、その級数が収束しているかどうかを知る極限を割り当てることが出来るものである。この論文では、 p の計算で ● 剰余が定数になる場合や、● 級数 (9) が最初の 2 項を除いてゼロになる場合等の特異な場合を詳細に調べた。これには、 p の値を得るために式 (9) に訴えねばならない。(The Note)

- これらの 2 つの例は $\varphi(x)$ の大きな値の範囲に比べて極めて微小な x の連続した値の区間 ε を想定する時、● $\varphi(x)$ が単項だけで出来ている、● $\varphi(x)$ が同じ符号を持つ多項からなっている等の時はいつでも総和 p が ε で割ったある積分に変換される事を示すのに十分である。しかし、これはこの関数が逆の符号を持つ 2 つの部分で出来ている場合は常には成り立たない。(The Note)

Poisson doesn't use at all of sum except for $\sum R, \frac{1}{h} \sum rR$ [22, pp.30-31] and $\sum R'$ [22, p.68], in which he explains the mathematical exceptions, as well as in The Note, however, in the parent part to The Note [22], he isn't necessary for using of sum instead of integral, and uses the ordinary deduction of the hydrostatic equations as follows : In a word, we can conclude that Poisson chooses sum or integral as the case may be of the material, after enough alternative. Navier passed away in 1836, and we don't know whether he had checked Poisson's Note, which was issued in 1831. Poisson passed away in 1840. The Navier-Stokes equations was fixed until 1934, which is cited by a textbook by Prandtl. (cf. Table 1, entry no. 7. For further particulars, cf. [7].) There are other disputes of sorts such as with Fresnel. With Fourier [5], Poisson [19],[15, 18, pp.367-8] disputes about the application of root from algebraic into transcendental equations. At any rate, we should evaluate his uniqueness and rigorousness from the insight of mathematics.

Table 1: The kinetic equations of the hydrodynamics until the "Navier-Stokes equations" were fixed. (Rem. HD : hydrodynamics, N under entry-no : non-linear, gr.div : grad.div, E : $\frac{\Delta}{gr.div}$ in elastic, F : $\frac{\Delta}{gr.div}$ in fluid. The group of entry 5,6 and 7 show F = 3 in fluid. Δ : tensor function with the main axis (the normal stress) of the Laplacian.)

no	name/prob	the kinetic equations	Δ	gr.div	E	F
1	Navier (1827)[8] elastic solid	$(6-1)N_e \begin{cases} \Pi \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon \left(3 \frac{d^2 x}{da^2} + \frac{d^2 x}{db^2} + \frac{d^2 x}{dc^2} + 2 \frac{d^2 y}{ab da} + 2 \frac{d^2 z}{ac da} \right), \\ \Pi \frac{d^2 y}{dt^2} = \varepsilon \left(\frac{d^2 y}{da^2} + 3 \frac{d^2 y}{db^2} + \frac{d^2 y}{dc^2} + 2 \frac{d^2 x}{da db} + 2 \frac{d^2 z}{ac db} \right), \\ \Pi \frac{d^2 z}{dt^2} = \varepsilon \left(\frac{d^2 z}{da^2} + \frac{d^2 z}{db^2} + 3 \frac{d^2 z}{dc^2} + 2 \frac{d^2 x}{da dc} + 2 \frac{d^2 y}{ab dc} \right) \end{cases}$ where Π is density of the solid, g is acceleration of gravity.	ε	2ε	$\frac{1}{2}$	
2	Navier (1827)[9] fluid	$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X + \varepsilon \left(3 \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} + 2 \frac{d^2 v}{dx dy} + 2 \frac{d^2 w}{dx dz} \right) - \frac{du}{dt} - \frac{du}{dx} \cdot u - \frac{dv}{dy} \cdot v - \frac{dw}{dz} \cdot w ; \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y + \varepsilon \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + 3 \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} + 2 \frac{d^2 u}{dx dy} + 2 \frac{d^2 w}{dy dz} \right) - \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dx} \cdot u - \frac{dv}{dy} \cdot v - \frac{dw}{dz} \cdot w ; \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z + \varepsilon \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + 3 \frac{d^2 w}{dz^2} + 2 \frac{d^2 u}{dx dz} + 2 \frac{d^2 v}{dy dz} \right) - \frac{dw}{dt} - \frac{dw}{dx} \cdot u - \frac{dw}{dy} \cdot v - \frac{dw}{dz} \cdot w ; \end{cases}$	ε	2ε		$\frac{1}{2}$
3	Cauchy (1828)[3] system of particles in elastic solid and fluid	$\begin{cases} (L+G) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (R+H) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + (Q+I) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + 2R \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + 2Q \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} + X = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \\ (R+G) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + (M+H) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + (P+I) \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + 2P \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + 2R \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + Y = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \\ (Q+G) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + (P+H) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + (N+I) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + 2Q \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + 2P \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z} + Z = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \\ G=H=I, \quad L=M=N, \quad P=Q=R, \quad L=3R \end{cases}$	$R+G$	$2R$	if $G=0$ $\frac{1}{2}$	if $G=0$ $\frac{1}{2}$
4	Poisson (1831)[21] elastic solid defined in general equations	$\begin{cases} X - \frac{d^2 u}{dt^2} + a^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2 v}{dx dy} + \frac{1}{3} \frac{d^2 w}{dx dz} \right) = \frac{\Pi}{\rho} \frac{d^2 u}{dx^2}, \\ Y - \frac{d^2 v}{dt^2} + a^2 \left(\frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2 u}{dx dy} + \frac{1}{3} \frac{d^2 w}{dx dz} \right) = \frac{\Pi}{\rho} \frac{d^2 v}{dy^2}, \\ Z - \frac{d^2 w}{dt^2} + a^2 \left(\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2 u}{dx dy} + \frac{1}{3} \frac{d^2 w}{dx dz} \right) = \frac{\Pi}{\rho} \frac{d^2 w}{dz^2}, \end{cases}$	$\frac{a^2}{3}$	$\frac{2a^2}{3}$	$\frac{1}{2}$	
5	Poisson (1831)[21] fluid defined in general equations	$\begin{cases} \rho \left(\frac{Du}{Dt} - X \right) + \frac{dp}{dx} + \alpha(K+k) \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) + \frac{\alpha}{3}(K+k) \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0, \\ \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - Y \right) + \frac{dp}{dy} + \alpha(K+k) \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) + \frac{\alpha}{3}(K+k) \frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0, \\ \rho \left(\frac{Dw}{Dt} - Z \right) + \frac{dp}{dz} + \alpha(K+k) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) + \frac{\alpha}{3}(K+k) \frac{d}{dz} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0, \\ \rho \left(X - \frac{d^2 u}{dt^2} \right) = \frac{d\varpi}{dx} + \beta \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right), \\ \rho \left(Y - \frac{d^2 v}{dt^2} \right) = \frac{d\varpi}{dy} + \beta \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right), \\ \rho \left(Z - \frac{d^2 w}{dt^2} \right) = \frac{d\varpi}{dz} + \beta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) \end{cases}$ where $\varpi \equiv p - \alpha \frac{du}{dt} - \frac{\beta + \beta'}{\chi t} \frac{dx}{dt}$, $\beta \equiv \alpha(K+k)$	β	$\frac{\beta}{3}$		3
6	Stokes (1849)[23] fluid	$(12)_S \begin{cases} \rho \left(\frac{Du}{Dt} - X \right) + \frac{dp}{dx} - \mu \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) - \frac{\mu}{3} \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0, \\ \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - Y \right) + \frac{dp}{dy} - \mu \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) - \frac{\mu}{3} \frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0, \\ \rho \left(\frac{Dw}{Dt} - Z \right) + \frac{dp}{dz} - \mu \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) - \frac{\mu}{3} \frac{d}{dz} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0. \end{cases}$	μ	$\frac{\mu}{3}$		3
7	Prandtl (1934) HD	$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$ for incompressible, it is simplified as follows : $\text{div } \mathbf{w} = 0$, $\frac{D\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{w}$	ν	$\frac{\nu}{3}$		3

References

- [1] D.F.J.Arago, *Note du Rédacteur*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 107-110. (This is following with Navier[10], 99-107).
- [2] D.H.Arnold, *The mécanique physique of Siméon Denis Poisson : The evolution and isolation in France of his approach to physical theory (1800-1840)* I,II,III,IV,V,VI,VII,VIII,IX,X, Arch. Hist. Exact Sci. **28-3**(1983) I:II:267-287, III:289-297, IV:299-320, V:321-342, VI:343-367, **29-1**(1983VII:37-51, VIII:53-72, IX: 73-94, **29-4**(1984) X:287-307.
- [3] A.L.Cauchy, *Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle*, Exercices de Mathématique, **3**(1828); Œuvres complètes D'Augustin Cauchy (Ser. 2) **8**(1890), 227-252.
- [4] A.Cournot, (Book review) *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides ; par M.Navier*. (*Mém. de l'Acad. des Science ; Tom. VI, p. 389*), Bulletin des sciences mathématiques, astromatiques, physiques et chimiques, **10**(1828), 11-14. (The title number : No.10.)
- [5] J.-B.-J. Fourier, *Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, **8**(1829), 581-622. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j>
- [6] J.M.C.D., (Book review) *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques ; par M.Poisson*, Bulletin des sciences mathématiques, astromatiques, physiques et chimiques, **11**(1829), 98-111. (The title number : No.35.)
- [7] S.Masuda, *Historical development of classical fluid dynamics*, Dissertation for a degree of Doctor of Science, Tokyo Metropolitan Univ., 2011. → <http://hdl.handle.net/10748/4129>
- [8] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Academie des Sience de l'Institute de France, **7**(1827), 375-393. (Lu: 14/mai/1821.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227>, 375-393.
- [9] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Academie des Sience de l'Institute de France, **6**(1827), 389-440. (Lu: 18/mar/1822.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x>, 389-440.
- [10] C.L.M.H.Navier, *Note relative à l'article intitulé : Mémoire sur les équilibre et le mouvement des Corps élastiques, page 337 du tome précédent*, Annales de chimie et de physique, **38**(1828), 304-314.
- [11] C.L.M.H.Navier, *Remarques sur l'Article de M.Poisson, inséré dans le Cahier d'août, page 435*, Annales de chimie et de physique, **39**(1829), 145-151.
- [12] C.L.M.H.Navier, *Lettre de M.Navier à M.Arago*, Annales de chimie et de physique. **39**(1829), 99-107. (This is followed by) *Note du Rédacteur*, 107-110.
- [13] C.L.M.H.Navier, *Note relative à la question de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Bulletin des sciences mathématiques, astromatiques, physiques et chimiques, **11**(1829), 249-253. (The title number : No.142.)
- [14] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, (1819?), 121-176. (Lu : 19/juillet/1819.) (cf. According to Arnold [2], issued in 1818, however, his title is not identified with this, because of 'Lu' date.)
- [15] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Annales de chimie et de physique, **37**(1828), 337-355.
- [16] S.D.Poisson, *Réponse à une Note de M.Navier insérée dans le dernier Cahier de ce Journal*, Annales de chimie et de physique, **38**(1828), 435-440.
- [17] S.D.Poisson, *Lettre de M.Poisson à M.Arago*, Annales de chimie et de physique, **39**(1828), 204-211.
- [18] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, **8**(1829), 357-570, 623-27. (Lu : 14/apr/1828. The same with [15]) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j>
- [19] S.D.Poisson, *Note sur les racines des équations transcendentes*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, **9**(1830), 89-95. (Lu : 2/mars/1829.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3224v>
- [20] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre fluides*, Mémoires de l'Academie royale des Siences, **9**(1830), 1-88. (Lu : 24/nov/1828.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3224v>
- [21] S.D.Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, (1829), J. École Polytech., **13**(1831), 1-174. (Lu : 12/oct/1829.)
- [22] S.D.Poisson, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, Bachelier Père et Fils, Paris, 1831. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1103201>
- [23] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids*, 1849, (read 1845), (From the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* Vol. VIII. p.287), Johnson Reprint Corporation, New York and London, 1966, *Mathematical and physical papers* 1, 1966, 75-129, Cambridge.

Remark: we use *Lu* (: in French) in the bibliography meaning "read" date by the referees of the journals, for example MAS.