

Thirring model - A constructive field theory

神戸大理

麦 林 布 道

,

長 町 章 昭

Thirring モデルに associated boson の考えを導入すること
は、既に Klaiber¹⁾によってなされている。研究会におい
て、この考えをとりこめて構成的場の量子論の観点から
Thirring モデルを眺める可能性を指摘したが、そのすぐ後で
Dolovich - Sushko²⁾の全く同じ構想の論文が出たので、彼等
の結果をとり入れて報告をまとめた。

Thirring モデルは 1958 年に Thirring³⁾によって提出され
て以来、2次元ではあるが、解ける相対論的に不変なモデル
としてきわだたぬ位置を占めて来た。Thirring モデルに關す
る論文は数えきれないくらい多くあり、大きく分けると、
operator solution に關するものと、Green 関数ないし Wightman
関数に關するものがある。また、そのいわゆる“解”なるも
の論文の数同様きわめて多様である。Wightman の公理系
をみたす non-trivial な場の量子論の存在の問題になったとき、

Thirring モデルはそのオーバー補にあげられたのであるが、決定的な結論がえられないまま、 $\lambda(\phi^2)_2$ 理論や Y_2 理論と先を越されてしまった。公理論的場の量子論の立場からのこのモデルの分析については、Wightman ⁴⁾ および Klaiber ¹⁾ の講義録を見れば十分であろう。Thirring モデルにおける散乱演算子の存在証明に関する Buegin ⁵⁾ の論文もあげておこう。

Thirring モデルの研究でこれまで最も欠如していたのは、Hamiltonian field theory としての数学的な分析である。最近の言葉でいえば、Thirring モデルは構成的場の量子論にまだ十分組み込まれていない。その理由として考えられるのは、一つには $\lambda(\phi^2)_2$ や Y_2 と違って、Thirring モデルはくりこみ可能ではあるが“超くりこみ可能”ではないこと、また、解けるモデルとしての特性を失わないように切断 (cut off) を入れることの難しさである。Thirring モデルを ^{構成的} 場の量子論の一つとしてとらえたとき、operator solution を直接吟味することは、上記のオーバー理由からしてまず駄目であろう。これに対して、2次元の質量0のフェルミ粒子の特性を利用した associated boson の方法は考えてみる価値がありそうである。かつて Uhlenbrock ⁶⁾ が Luttinger モデルについて行ったように、Thirring モデルの Hamiltonian を associated boson の演算子に関する2次形式の形に書くことが出来れば、Bogo-

Bogoliubov 変換による Hamiltonian の対角化が可能になり、この変換を中性スカラーモデルにおけるユニタリ変換と対比してあげれば、くりこみ之道もひらけてくるであろう。これが我々のねらいであったが、このねらいの当たっていかんことを Volovich-Sushko によって示されたようである。

ここからは、Bogoliubov 変換あたり迄を述べ、そのあとは、今後の発展が当然予想されるので、それを待つて次回にゆずることにする。

§ 1. Cutoff Hamiltonian

Thirring モデルの formal Hamiltonian は

$$(1) \quad H = -i \int_{-\infty}^{\infty} : \psi^*(x) \gamma^5 \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) : dx + \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} : j^{\mu}(x) j_{\mu}(x) : dx$$

で与えられる。ここで

$$j^{\mu}(x) = : \psi^*(x) \gamma^0 \gamma^{\mu} \psi(x) : \quad \mu = 0, 1.$$

$$\gamma^0 = \sigma_2, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 = \sigma_3.$$

$\psi(x)$ は 2次元時空の質量 0 のスピノール粒子の波動関数である。

発散をおさえるために、系を長さ L の箱の中に閉じこめて周期的境界条件を課す。また、紫外発散をおさえるために、相互作用に形状因子 $f_0(x-y)$ を入れる。最終的には、 L

$\rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow \infty$ の極限を考える. $f_\sigma(x-y) \rightarrow \delta(x-y)$.

いま,

$$\Gamma = \{p = \frac{2\pi}{L} n; n \in \mathbb{Z}\},$$

$$\Gamma' = \{p \in \Gamma; p \neq 0\}, \quad \Gamma^+ = \{p \in \Gamma; p > 0\}$$

と置き, $\Gamma, \Gamma', \Gamma^+$ における和を簡単に表わす.

$$\sum_p = \sum_{p \in \Gamma}, \quad \sum_p' = \sum_{p \in \Gamma'}, \quad \sum_p^+ = \sum_{p \in \Gamma^+}$$

で表わす. 波動関数は,

$$\psi_p(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \sum_p e^{ipx} \hat{\psi}_p(p)$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \sum_p e^{ipx} [u_p(p) a_p + v_p(p) b_{-p}^*]$$

と展開される. $==$ による

$$\{a_p^*, a_p\} = \{b_p^*, b_p\} = \frac{L}{2\pi} \delta_{p,0}$$

$$\begin{cases} u_1(p) = u_2(-p) = v_1(-p) = v_2(p) = \theta(p), & p \neq 0 \\ u_1(0) = v_2(0) = 1, & v_1(0) = u_2(0) = 0 \end{cases}$$

また, 以下

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

と約束する.

この結果, Hamiltonian (1) は,

$$(2) \quad H(L, \sigma) = H_0(L, \sigma) + H_I(L, \sigma)$$

$$= \frac{2\pi}{L} \sum_p |p| [a_p^* a_p + b_p^* b_p]$$

$$+ 2g \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} : \psi_1^*(x) \psi_1(x) f_\sigma(x-y) \psi_2^*(y) \psi_2(y) : dx dy$$

と表す。

演算子 $\{a_p^\#, b_p^\#\}$ ($\#$ は消滅・生成演算子を総称する記号) の作用する Fock 空間 $\mathcal{H}_F(L)$ は

$$\mathcal{H}_F(L) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \text{Asy}(D^+ \oplus D^-)^{\otimes n}$$

と書ける。 $n=1$, $D^+ = D^- = l^2(\Gamma)$ であって

$$z = \{z_p\} \in l^2(\Gamma) \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \sum_p |z_p|^2 < \infty.$$

また, $\text{Asy}(D^+ \oplus D^-)^{\otimes n}$ は n 階の反対称テンソル積を意味する。

§ 2. Associated boson.

2次元時空において質量0のフェルミ演算子2個から, 質量0のボース演算子 (いわゆる associated boson) をつくる表式は, 既に Uhlenbrock⁶⁾ と Klaiber⁷⁾ によって与えられている。(両者の表式は一見異なるが, 互いに同値である

を示せる.) $\equiv$ では Klauder 流の表式を使う.

$$(3) \quad A_p = \frac{2\pi}{L} \frac{1}{\sqrt{|p|}} \left\{ \theta(p) \sum_q : \hat{\psi}_1^*(q) \hat{\psi}_1(q+p) : \right. \\ \left. + \theta(-p) \sum_q : \hat{\psi}_2^*(q) \hat{\psi}_2(q+p) : \right\}, \quad p \in \Gamma'$$

$D_0(L) \subset \mathcal{H}_F(L)$ を粒子数有限の部分空間とし.

$$A_p^\dagger = A_p^*|_{D_0(L)}$$

となく, $\bar{\Psi}, \Psi \in D_0(L)$ のとき

$$(4) \quad [A_p, A_q] \bar{\Psi} = [A_p^\dagger, A_q^\dagger] \bar{\Psi} = 0,$$

$$[A_p, A_q^\dagger] \bar{\Psi} = \frac{L}{2\pi} \delta_{p,q} \bar{\Psi},$$

および

$$(A_p \bar{\Psi}, \Psi) = (\bar{\Psi}, A_p^\dagger \Psi)$$

をみるのは容易である. 従って $\{A_p^\dagger\}$ はボースの交換関係, をみたす.

current vector $j^\mu(x, t)$ は通常の場合 $\partial_\mu j^\mu(x, t) = 0$ の他に $\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu} j_\nu(x, t) = 0$ をみたす. 但し, $\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}$, $\varepsilon^{01} = -1$.

Thirring モデルが解ける理由は $\equiv$ にあるが, このことから

$$j^\mu(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^\mu j(x, t)$$

となるスカラ $j(x, t)$ の存在する $\equiv$ が期待できる (0 次元ならば当然). 実際, 量子化された場の場合にもこのようにな

$j(x, t)$ があって, $\{A_p^\# \}$ を用いて次のように表わせる

$$(5) \quad j(x, t) = -i \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \sum_p' \frac{1}{\sqrt{2|p|}} [e^{i|p|t - ipx} A_p^+ - e^{-i|p|t + ipx} A_p^-] \\ + \frac{\sqrt{\pi}}{L} [t(\Lambda_1 + \Lambda_2) + x(\Lambda_1 - \Lambda_2)]$$

ここに,

$$(6) \quad \Lambda_p = \frac{2\pi}{L} \sum_q [u_p(q) a_q^* a_q - v_p(-q) b_q^* b_q], \quad p=1, 2$$

演算子 Λ_1, Λ_2 はそれぞれ非負 (負) の運動量をもつ a 粒子の数から正 (非正) の運動量をもつ b 粒子の数を引いたものを表わし, 他の主要な演算子のすべてと交換する.

$$(7) \quad [\Lambda_1, \Lambda_2] = 0,$$

$$[A_p^\#, \Lambda_p] = [H_0(L, \sigma), \Lambda_p] = [H_2(L, \sigma), \Lambda_p] = 0.$$

従って, Λ_1, Λ_2 の同時固有空間 $\mathcal{H}(\lambda)$ を

$$\Lambda_p \mathcal{H}(\lambda) = \lambda_p \mathcal{H}(\lambda), \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2$$

とすると, Fock 空間 $\mathcal{H}_F(L)$ は

$$\mathcal{H}_F(L) = \bigoplus_{\lambda} \mathcal{H}(\lambda)$$

と分解される.

Fock 真空を Ω_0 とすると, $D_0(\lambda) = D_0(L) \cap \mathcal{H}(\lambda)$ は

$$\prod_{i=1}^{m^+} a_{p_i^+}^* \prod_{j=1}^{m^-} a_{p_j^-}^* \prod_{r=1}^{n^+} b_{p_r^+}^* \prod_{s=1}^{n^-} b_{p_s^-}^* \Omega_0$$

ある形の基礎ベクトルをもっている。ただし,

$$q_i^+ \geq 0, \quad q_i^- < 0, \quad p_i^+ > 0, \quad p_i^- \leq 0$$

$$m^+ - n^+ = \lambda_1, \quad m^- - n^- = \lambda_2$$

である。 $A_p^\#(\lambda) = A_p^\#|_{D_0(\lambda)}$ とおくとき, $\{A_p^\#(\lambda)\}_{p \in T'}$ は $\mathcal{H}(\lambda)$

で Fock 表現可能である。 $A_p(\lambda) \Omega_0(\lambda) = 0$ で定義される各

部分空間 $\mathcal{H}(\lambda)$ の真空 $\Omega_0(\lambda)$ は Fock の真空 Ω_0 から計算さ

れる: $\Omega_0(\lambda) = U_\lambda \Omega_0$

$$U_\lambda = \left[\delta_{\lambda,0} + \theta(\lambda_1-1) \prod_{r=0}^{\lambda_1-1} a_{-\frac{2\pi}{L}r}^* + (1-\theta(\lambda_1)) \prod_{v=1}^{|\lambda_1|} b_{\frac{2\pi}{L}v}^* \right]$$

$$\cdot \left[\delta_{\lambda,0} + \theta(\lambda_2-1) \prod_{r=1}^{\lambda_2} a_{-\frac{2\pi}{L}r}^* + (1-\theta(\lambda_2)) \prod_{v=1}^{|\lambda_2|-1} b_{-\frac{2\pi}{L}v}^* \right]$$

§ 3. Koenig の identity

相互作用 Hamiltonian $H_I(L, \sigma)$ は $\{A_p^\#\}$ と Λ_p で書くと

が出来る,

$$(8) \quad H_I(L, \sigma) = 2g \frac{2\pi}{L} \sum_p^+ p \chi_\sigma(p) [A_p^+ A_{-p}^+ + A_p A_{-p}] + 2g \frac{2\pi}{L} \Lambda_1 \chi_{\sigma(0)} \Lambda_2$$

と (3) になる。

$$\chi_\sigma(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ipx} f_\sigma(x) dx.$$

(8) の各項の定義されるため, $\sum_p^+ |p \chi_\sigma(p)|^2 < \infty$ と仮定す。

3.

$H_0(L, \sigma)$ と $A_p^\#$ との交換関係を計算すると, $\bar{\psi} \in D_0(L)$ に対して

$$[H_0(L, \sigma), A_p^\dagger] \bar{\psi} = i p_1 A_p^\dagger \bar{\psi}$$

と $\psi = \psi_0$ となる。従って, $H_0(\lambda) = H_0(L, \sigma)|_{D_0(L)}$ に対して

$$[(H_0(\lambda) - \frac{2\pi}{L} \sum_p i p_1 A_p^\dagger(\lambda) A_p(\lambda)), A_p^\#(\lambda)] = 0$$

が成り立つ。 $\{A_p^\#(\lambda)\}$ の既約性から

$$(9) \quad H_0(\lambda) - \frac{2\pi}{L} \sum_p i p_1 A_p^\dagger(\lambda) A_p(\lambda) = E_0(\lambda) I(\lambda).$$

ここで, $I(\lambda)$ は $\mathcal{H}(\lambda)$ の恒等演算子である。この結果は, 各部分空間 $\mathcal{H}(\lambda)$ でフェルミ粒子の自由 Hamiltonian $H_0(\lambda)$ はボース粒子の free Hamiltonian と等しいことを示している。これを Kohn の恒等式という。 $E_0(\lambda)$ は ψ_0 を $\mathcal{H}_0(\lambda)$ に作用させることによって定まる。

$$E_0(\lambda) = \frac{\pi}{L} [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1 + \lambda_2]$$

このようにして, total Hamiltonian $H(L, \sigma)$ は各部分空間 $\mathcal{H}(\lambda)$ (sector と呼ぶ) における Hamiltonian (sector Hamiltonian と呼ぶ) の直和と分解されることになった。

$$H(L, \sigma) = \bigoplus_{\lambda} H(\lambda),$$

$$(10) \quad H(\lambda) = \frac{2\pi}{L} \sum_p |p| A_p^\dagger(\lambda) A_p(\lambda)$$

$$+ 2g \frac{2\pi}{L} \sum_p^\dagger \chi_0(p) [A_p^\dagger(\lambda) A_{-p}^\dagger(\lambda) + A_p(\lambda) A_{-p}(\lambda)] + E_g(\lambda) 1(\lambda)$$

$= = \kappa$

$$E_g(\lambda) = \frac{\pi}{L} [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1 + \lambda_2] + \frac{\pi}{L} 4g \chi_0(0) \lambda_1 \lambda_2.$$

§ 4. Bogoliubov 変換.

$H(\lambda)$ は $A_p^\dagger(\lambda)$ に関する quadratic Hamiltonian である。その
本値的自己共役性は、 $\chi_0(p)$ に対する条件 $\sum_p^\dagger |p \chi_0(p)|^2 < \infty$ によ
って保証されている⁷⁾。さらに $\chi_0(-p) = \chi_0(p)$ を仮定し

$$\varphi_p = \frac{1}{2} \tanh^{-1}(-2\chi_0(p))$$

と置く、Bogoliubov 変換

$$A_p(\lambda) \rightarrow \tilde{A}_p(\lambda) = \cosh \varphi_p A_p(\lambda) + \sinh \varphi_p A_{-p}^\dagger(\lambda)$$

$$A_p^\dagger(\lambda) \rightarrow \tilde{A}_p^\dagger(\lambda) = \sinh \varphi_p A_{-p}(\lambda) + \cosh \varphi_p A_p^\dagger(\lambda)$$

によって $H(\lambda)$ は対角化される。 $\chi_0(p)$ の条件より、

$\sum_p |p \chi_0(p)|^2 < \infty$ であるから、この変換はユニタリ変換であっ

て、

$$A_p(\lambda) = U(\lambda) \tilde{A}_p(\lambda) U^\dagger(\lambda)$$

と 113 2 = タリ 演算子 $U(\lambda)$ が存在する. 実際

$$(11) \quad U(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{2\pi}{L} \sum_p \varphi_p (A_p^+(\lambda) A_p^+(\lambda) - A_p(\lambda) A_p(\lambda)) \right\}$$

と 113. = λ に対応して $\Omega(\lambda)$ の真空 $\Omega_0(\lambda)$ は

$$\Omega_0(\lambda) \rightarrow \bar{\Omega}_0(\lambda) = U^{-1}(\lambda) \Omega_0(\lambda)$$

と 変換される. $H(\lambda)$ の対角化は

$$(12) \quad U(\lambda) H(\lambda) U^{-1}(\lambda) = \sum_p \omega^\sigma(p) A_p^+(\lambda) A_p(\lambda) + \dots$$

と 113. 右辺において, λ に依存する ϵ 級項が省略されてい

る. かく

$$(13) \quad \omega^\sigma(p) = |p| \operatorname{sech} 2\varphi_p = |p| \sqrt{1 - 4g^2 \chi_0(p)^2}$$

がエネルギー・スペクトルを与える. 空間の切断をとり除いた

極限 ($\sigma \rightarrow \infty$ で $f_\sigma(x) \rightarrow \delta(x)$) では $\chi_0(p) = \frac{1}{2\pi}$ であるから,

すなわち $\omega^\sigma(p) \rightarrow |p| \sqrt{1 - g^2/\pi^2}$ と 113. = の分散式は相対

論的且不変性理論を暗示するから場合か要い. $\omega(p) = |p|$

と 113 べきである. = λ を是正するため, Volovich-Sushko

は $A_p^{\#}(\lambda)$ について 2 次の λ 項を Idamiltonian とつけ

加えている.

Idamiltonian の対角化は, $A_p^{\#}(\lambda)$ を $A_p^{\#}$ で置きかえること

によって, 全 Fock 空間に拡張できることを付言しておく.

以上述べたことから判るよう、associated boson を導入してみると、Thirring モデルの構造は中性スカラールモデルの構造と著しく似通っている。即ち、 $\mathcal{H}(\lambda)$ は中性スカラールモデルにおける核子数一定の sector に対応し、associated boson は、勿論、中性スカラールモデルにおける中間子に対応している。また、フェルミ粒子の演算子は、中性スカラールモデルにおける核子演算子の如く、相異なる sectors をつないでいる。さらに、上記の Bogoliubov 変換はまさに dressing transformation である。従って、Volonich-Sushko の二のちの議論はおもその見当がつく。ただ、Thirring モデルでは $\psi_p^\#(p)$ は $A_p^\#$ と交換しないので、中性スカラールモデルの場合と違って trivial な理論にはならない。

文 献

- 1) B. Klaiber, Boulder Lectures in Theoretical Physics
Vol. XA (1967), 141-176
- 2) I. V. Volonich and V. N. Sushko, Theor. Math. Phys. 9
(1971), 211-231 (in Russian)
- 3) W. Thirring, Ann. Phys. 3 (1958), 91-112.

- 4) A. S. Wightman, 1964 Cargèse Lectures in Theoretical Physics, pp. 171-291.
- 5) F. A. Berezin, Mat. Sb. 76 (1968), 3-25
- 6) D. A. Ullendrock, Commun. Math. Phys. 4 (1967), 64-76

尚 4)~6) に関連して次の解説がある.

麦林布道, 日本物理学会誌 24 (1969), 203-211.

- 7) F. A. Berezin, The Method of Second Quantization
(Academic Press, New York - London, 1966)